Approche « élémentaire » à une certaine série de Fourier

A. Soit $c \in [0,1]$, et $0 < \varepsilon < 1$, on cherche à représenter la fonction « triangle » f, qui vaut $f(t) = 1 - \frac{2}{\varepsilon}|t-c|$ pour $|t-c| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ et 0 ailleurs, sous la forme d'une série de Fourier $A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k(t-c))$. En réalité la série de Fourier est automatiquement 1-périodique donc nous imposons aussi à f d'être 1-périodique.

B. Il sera un peu plus commode de travailler avec la fonction 2π-périodique $F(x) = f(c + \frac{1}{2\pi}x)$, qui est continue, paire, affine par morceaux, avec $F(0) = 1$ et $F(\pm\pi\varepsilon) = 0$. Il existe un théorème général[1] qui dit que toute fonction F, 2π-périodique, continue, C^1 par morceaux, paire, s'écrit $F(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ (avec $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$), les coefficients étant donnés par les formules de Fourier $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx$ et $A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\,dx$. Après quelques calculs, ces formules dans notre cas particulier donneraient :

$$A = \frac{\varepsilon}{2} \qquad a_k = \frac{4\sin^2(\pi\varepsilon k/2)}{\pi^2 k^2\, \varepsilon}$$

Mais on voudrait ici ne pas invoquer ce théorème, ni utiliser les méthodes caractéristiques de la théorie générale.

C. On va suivre une méthode élémentaire, avec comme point de départ quelques considérations sur les sommes $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ku)}{k}$. Montrons en premier lieu le **Lemme :**

$$\left|\pi - u - 2\sum_{1\leq k\leq n} \frac{\sin(ku)}{k}\right| \leq \begin{cases} \pi & (0 \leq u \leq \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}) \\ \frac{2\pi}{(n+\frac{1}{2})u} & (0 < u \leq \pi) \end{cases}$$

Pour cela nous aurons besoin de la fonction :

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{1\leq k\leq n} \cos(kt) = \sum_{-n\leq k\leq n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

La formule à droite est obtenue par exemple en multipliant la somme par $\sin(\frac{t}{2})$ et en utilisant $2\sin(\frac{t}{2})\cos(kt) = \sin((k+\frac{1}{2})t) - \sin((k-\frac{1}{2})t)$.

D. Soit $0 < u \leq \pi$. On a $\pi - u - 2\sum_{1\leq k\leq n} \frac{\sin(ku)}{k} = \int_u^{\pi} D_n(t)\,dt = \int_u^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt$. Posons $g(t) = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$. C'est une fonction C^1 et décroissante sur $]0,\pi]$. Intégrons par parties :

$$\int_u^{\pi} \sin((n+\frac{1}{2})t)g(t)\,dt = \left[\frac{-\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}g(t)\right]_u^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_u^{\pi} \cos((n+\frac{1}{2})t)g'(t)\,dt$$

$$\left|\int_u^{\pi} \sin((n+\frac{1}{2})t)g(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(g(u) + \int_u^{\pi}(-g'(t))\,dt\right) \leq \frac{2}{(n+\frac{1}{2})\sin(\frac{u}{2})} \leq \frac{2\pi}{(n+\frac{1}{2})u}$$

Cela donne bien pour $0 < u \leq \pi$: $\left|\pi - u - 2\sum_{1\leq k\leq n} \frac{\sin(ku)}{k}\right| \leq \frac{2\pi}{(n+\frac{1}{2})u}$.

E. Supposons $0 \leq (n+\frac{1}{2})u \leq \pi$ et partons cette fois-ci de $u + 2\sum_{1\leq k\leq n} \frac{\sin(ku)}{k} = \int_0^u D_n(t)\,dt = \int_0^u \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt$. La fonction intégrée est positive ou nulle sur $[0,u]$ puisque

1. cas particulier de ce qui est appelé dans les livres de premier cycle « Théorème de Dirichlet », mais il avait des fonctions monotones par morceaux. Et $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ est déduit de l'inégalité de Bessel pour F'.

$(n+\frac{1}{2})u \leq \pi$. De plus sur la définition de $D_n(t)$ on voit $D_n(t) \leq 2n+1$. Donc

$$0 \leq u + 2\sum_{1\leq k\leq n} \frac{\sin(ku)}{k} \leq (2n+1)u \leq 2\pi\ ,$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue $\left|\pi - u - 2\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\sin(ku)}{k}\right| \leq \pi$ (pour $0 \leq u \leq \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$).

F. Pour tout x de l'intervalle $[0,\pi]$ on calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^x \left|\pi - u - 2\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\sin(ku)}{k}\right| du &\leq \int_0^\pi \left|\pi - u - 2\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\sin(ku)}{k}\right| du \\ &\leq \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\pi + \int_{\pi/(n+\frac{1}{2})}^{\pi} \frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}\frac{du}{u} = \frac{\pi^2 + 2\pi\log(n+\frac{1}{2})}{n+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|-\frac{1}{2}(\pi-x)^2 + \frac{1}{2}\pi^2 + 2\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\cos(kx)-1}{k^2}\right| \leq \frac{\pi^2 + 2\pi\log(n+\frac{1}{2})}{n+\frac{1}{2}}$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$ nous obtenons l'identité[2] sur $[0,\pi]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{1}{4}(\pi-x)^2 - \frac{1}{4}\pi^2 + A\,,$$

avec $A = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$. Par une astuce classique $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2} + A = 2\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(2j)^2} = \frac{1}{2}A$, donc en faisant $x=\pi$ on obtient $-\frac{1}{2}A = -\frac{1}{4}\pi^2 + A$ d'où $A = \frac{\pi^2}{6}$ et finalement :

$$0 \leq x \leq \pi \implies \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{1}{4}(x-\pi)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

G. Cette identité vaut aussi pour $\pi \leq x \leq 2\pi$ car il suffit d'y remplacer x par $2\pi - x$. Ainsi la fonction g définie par $g(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(kx)}{k^2}$ est la fonction 2π-périodique, paire, qui vaut $\frac{1}{4}(x-\pi)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$.

H. Soit $0 < \varepsilon < 1$. On va être assez rusé et considérer la fonction, elle aussi paire, $k(x) = g(x+\pi\varepsilon) + g(x-\pi\varepsilon) - 2g(x)$. Pour $\pi\varepsilon \leq x \leq \pi$, on obtient $k(x) = \frac{1}{4}((x-\pi+\pi\varepsilon)^2 + (x-\pi-\pi\varepsilon)^2 - 2(x-\pi)^2) = \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^2$. Pour $0 \leq x \leq \pi\varepsilon$ le résultat va différer de $\frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^2$ par $-\frac{1}{4}(x-\pi\varepsilon-\pi)^2 + \frac{1}{4}(\pi\varepsilon - x - \pi)^2 = -\pi(\pi\varepsilon - x)$, donc $k(x) = \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^2 - \pi(\pi\varepsilon - x)$. Comme $\cos(k(x+\pi\varepsilon)) + \cos(k(x-\pi\varepsilon)) - 2\cos(kx) = 2\cos(kx)(\cos(k\pi\varepsilon)-1) = -4\cos(kx)\sin^2(\frac{1}{2}k\pi\varepsilon)$ on obtient :

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin^2(\frac{1}{2}k\pi\varepsilon)}{k^2}\cos(kx) = \begin{cases}\frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^2 - \pi(\pi\varepsilon - x) & (0 \leq x \leq \pi\varepsilon)\\ \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^2 & (\pi\varepsilon \leq x \leq \pi)\end{cases}$$

ce qui donne le résultat recherché :

$$\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin^2(\frac{1}{2}k\pi\varepsilon)}{\pi^2k^2\varepsilon}\cos(kx) = \begin{cases}1 - \frac{|x|}{\pi\varepsilon} & (0 \leq |x| \leq \pi\varepsilon)\\ 0 & (\pi\varepsilon \leq |x| \leq \pi)\end{cases}$$

(pour $-\pi \leq x \leq 0$ on a mis $|x|$ pour avoir un résultat pair) Lille, 8 mars 2007.

2. l'inégalité obtenue n'a qu'un intérêt temporaire, l'identité permet une meilleure majoration en C/n.