manuscripta math. 108, 495–513 (2002)

Olivier Ramaré

Sur un théorème de Mertens

Received: 20 March 2002

Résumé. We investigate and improve on a proof of Mertens concerning the distribution of primes in arithmetic progressions. As a by-product, we establish fairly efficient numerical bounds for related quantities.

1. Introduction

En 1839 Dirichlet démontrait que les nombres premiers se distribuaient de façon uniforme parmis les classes inversibles modulo q, et ce pour tout entier q. L'argument principal était et reste encore la non annulation de $L(1,\chi)$ et il faut souligner que le théorème des nombres premiers n'était même pas connu à l'époque (Dirichlet obtient son résultat 20 ans avant le mémoire de Riemann !). En 1874, Mertens simplifia la preuve et obtint une démonstration très élégante de

$$V(L;q,a) = \sum_{\substack{\ell\equiv a[q]\\ \ell\leq L}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} = \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} + \mathcal{O}_q(1), \tag{1}$$

où Λ est la fonction de Van Mangoldt. L'ensemble des travaux de Mertens de l'époque sur le sujet sont repris dans [9] et il est possible de lire cette preuve dans les deux dernières pages du chapitre 7 de [3], livre auquel nous renvoyons le lecteur de façon générale.

Dans cet article, nous nous intéressons à la q-dépendance de ce résultat, et nous limitons à des méthodes "élémentaires" qui respectent l'idée initiale de Mertens: extraire Λ de l'équation implicite $\operatorname{Log} = \mathbb{1} \star \Lambda$. En particulier nous n'utilisons pas de régions sans zéros pour les fonctions L mais uniquement une borne de type Brun-Titchmarsh en moyenne (ce dont ne disposait pas Mertens et dont le lecteur trouvera une exposition au chapitre 3 du livre de Bombieri [1]). Ce renseignement supplémentaire ne suffit pas à expliquer nos résultats; nous modifions la méthode de Mertens en employant des caractères additifs au départ, au lieu de caractères multiplicatifs ce qui plus tard donnera naissance à une forme bilinéaire pour le terme d'erreur. Notre résultat essentiel est le suivant:

O. Ramaré: Laboratoire de mathématiques AGAT, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France. e-mail: Oliver.Ramare@agat.univ-lille 1.fr

Mathematics Subject Classification (2000): Primary 11N13, 11Y35; Secondary 11M20, 11A41

Théorème 1. *Pour $L' \geq L \geq Q^2$, nous avons*

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ q \neq 1}} \sum_{\chi \bmod^* q} q|L(1,\chi)|^2 \left| \sum_{L \leq \ell \leq L'} \frac{\chi(\ell)\Lambda(\ell)}{\ell} \right|^2 \ll Q \operatorname{Log}^5 Q,$$

où la somme sur χ porte sur les caractères primitifs modulo q.

En l'état, il s'agit d'un exercice de style, ce que nous confirmons en comparant ce résultat au théorème de Barban-Davenport-Halberstam (i.e. le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques + l'inégalité du grand crible, comme on le trouvera dans le chapitre 29 de [3]): il est en effet possible d'obtenir le théorème 1 en procédant comme suit: si $\operatorname{Log} L' \leq C(\operatorname{Log} Q)^2$, utiliser l'inégalité du grand crible, sinon utiliser cette inégalité sur le début de la sommation et le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques de $\exp(C(\operatorname{Log} Q)^2)$ à L'.

Combiné à une borne inférieure sur $L(1,\chi)$, le théorème 1 se révèle remarquablement performant. La borne inférieure dont nous nous servons est

$$\sum_{\substack{f|q \\ f \neq 1}} \frac{f}{\phi(f)} \sum_{\chi \bmod^* f} |L(1,\chi)|^{-2} \ll q, \tag{†}$$

borne qui est optimale (ce que nous démontrons).

Voici deux corollaires issus de la conjugaison du théorème 1 et de la borne (†):

Corollaire 1. *Si q est un entier positif et a un entier premier à q, nous avons*

$$\sum_{\substack{\ell \equiv a[q] \\ \ell \leq L}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} = \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} + C(q,a) + \mathcal{O}\Big(\frac{\sqrt{q}\operatorname{Log}^3 q}{\phi(q)}\Big),$$

où $C(q,a)$ est donné par

$$C(q,a) = \frac{-1}{\phi(q)} \Big\{ \gamma + \sum_{p|q} \frac{\operatorname{Log} p}{p-1} + \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi \neq \chi_0}} \bar{\chi}(a) \frac{L'}{L}(1,\chi) \Big\}.$$

En comparaison, l'introduction dans la preuve de Mertens des renseignements sur $L(1,\chi)$ que nous utilisons donnerait

$$V(L;q,a) = \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} + \mathcal{O}(\sqrt{q}\operatorname{Log}^8 q).$$

Voici un autre corollaire:

Corollaire 2. *Si q est un entier positif et a un entier premier à q, nous avons*

$$\sum_{\ell \leq L} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} e(a\ell/q) = \frac{\mu(q)\operatorname{Log} L}{\phi(q)} + C'(q,a) + \mathcal{O}\Big(\frac{q}{\phi(q)} \operatorname{Log}^2 q\Big),$$

pour une certaine constante $C'(q,a)$.

La constante $C'(q,a)$ est la constante asymptotiquement correcte.

Pour obtenir des résultats en moyenne, nous pouvons remplacer (†) par:

$$\sum_{\substack{f \le F \\ f \ne 1}} \frac{f}{\phi(f)} \sum_{\chi \bmod^* f} |L(1,\chi)|^{-2} \ll F^2 \tag{††}$$

et établir par exemple:

Corollaire 3. *Si $L \ge Q^2$ alors*

$$\sum_{q \le Q} \max_{a \bmod^* q} \left| \sum_{\substack{\ell \equiv a[q] \\ l \le L}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} - \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} - C(q,a) \right| \ll \operatorname{Log}^3 Q.$$

Ou, dit autrement, le terme d'erreur du corollaire 1 est en moyenne $\mathcal{O}((\operatorname{Log}^3 q)/q)$ ou encore, en anticipant sur la discussion autour de (6) ci-après, il n'y a pas de zéros de Siegel "en moyenne".

La preuve que nous développons donne une bonne dépendance en q, et nous pouvons nous poser la question de la dépendance en L. En particulier le corollaire étant extrêment réminiscent du théorème de Bombieri-Vinogradov, nous pourrions penser qu'en incorporant des résultats sur la distribution des nombres premiers dans les petites progressions une borne supérieure tendant vers 0 serait accessible. En l'occurrence il n'en est rien (tout au moins si l'on suit le cheminement usuel), bien que la preuve échoue de très peu.

Par contre nous pouvons résoudre un problème du même registre mais restreint à un seul module. En effet à partir de théorèmes de Čebyshef de la forme

$$\max_{L \ge L_0} \frac{\phi(q)}{L} \max_{a \bmod^* q} |\psi(L;q,a) - L/\phi(q)| \le \varepsilon_q \tag{2}$$

nous déduisons

$$V(L;q,a) = \frac{1}{\phi(q)} \operatorname{Log} L + C(q,a) + \mathcal{O}\left(\varepsilon_q \frac{\sqrt{q}\operatorname{Log}^2 q}{\phi(q)}\right) \tag{3}$$

pour $L \ge L_0$. La dérivation usuelle (via une intégration par parties) demande des informations bien plus fortes sur $\psi(L;q,a)$, que ne donnent pas [8, 12]. Comparée au corollaire 1, cette borne semble gagner outre le facteur ε_q une puissance de logarithme. C'est inexact et la même puissance de logarithme est valable dans ce corollaire, mais la déduction que nous proposons en passant par le théorème 1 et non par un résultat restreint au module q engendre cette perte. Elle a lieu au niveau de l'inégalité (29).

Cette approche est développée dans la sixième section. Cela nous permet de construire les tables situées à la fin et qui donnent des majorations de

$$\max_{a \bmod^* q} \left| V(L;q,a) - \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} - C(q,a) \right| \tag{4}$$

pour tous les modules de la liste de Rumely [12, 16]:

$$q \in [3,72] \bigcup \{74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 102, 104, 105, 106, 108, 110, 111, 112, 114, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 124, 125, 126, 128, 130, 132, 134, 138, 140, 142, 143, 144, 150, 154, 156, 162, 163, 168, 169, 170, 174, 180, 182, 186, 190, 210, 216, 222, 234, 242, 243, 250, 256, 286, 326, 338, 360, 420, 432, 486\}$$

Tout d'abord, nous avons calculé les quantités ci-dessus et obtenu:

Théorème 2. *Pour q dans la liste de Rumely (cf [12, 16]), nous avons*

$$\max_{1 \le L \le 10^5} \max_{a \bmod^* q} \sqrt{L} \left| V(L;q,a) - \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} - C(q,a) \right| \le v^\sharp(q) \le 1$$

où $v^\sharp$ est donné dans les tables situées à la fin de cet article.

De même que dans [12], nous avons constaté que la quantité (4) multipliée par $\sqrt{L}$ variait très peu, et par conséquent le théorème 2 est en fait très précis malgré le vaste domaine couvert. Voici deux corollaires issus de la conjonction des deux théorèmes:

Corollaire 4. *Pour q dans la liste de Rumely (cf [12, 16]), nous avons*

$$\max_{L \ge 182} \max_{a \bmod^* q} \left| V(L;q,a) - \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} - C(q,a) \right| \le \varepsilon^\sharp(q) \le 2/9$$

où $\varepsilon^\sharp$ est donné dans les tables situées à la fin de cet article.

Corollaire 5. *Pour q dans la liste de Rumely (cf [12, 16]), nous avons*

$$\max_{L \ge 1} \max_{a \bmod^* q} \left| V(L;q,a) - \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} - C(q,a) \right| = 0.978\ldots$$

atteint par $q = 6$, $a = 1$ et $L = 1$.

Nous donnons à la fin de cet article des bornes plus précises pour chaque module. La valeur $2/9$ est forcée par les modules 163 et 326, mais si par exemple nous nous restreignons aux modules ≤ 16, nous pouvons remplacer cette valeur par $1/12$, et ce pour $L \ge 95$ au plus.

Comme remarqué par Mertens et Selberg, le corollaire 1 contient des bornes de type Čebyshev:

$$\delta_q \frac{L}{\phi(q)} \ll \sum_{\substack{\ell \le L \\ \ell \equiv a[q]}} \Lambda(\ell) \ll (2-\delta_q) \frac{L}{\phi(q)} \tag{5}$$

avec $\delta_q = \exp(-c\sqrt{q}\operatorname{Log}^2 q)$ (où c est une constante assez grande) et pourvu que $L\delta_q \gg 1$.

Nous discutons à présent l'optimalité du corollaire 1. Un terme d'erreur $\mathcal{O}(f(q)^{-1})$ dans ce corollaire avec $f(q) \ll \phi(q)$ donnerait que le zéro exceptionnel β modulo q si il existe vérifie:

$$1 - \beta \gg \frac{f(q)}{\phi(q)}. \tag{6}$$

Par conséquent $f(q) = q^\alpha$ pour un $\alpha > \frac{1}{2}$ améliorerait de façon effective notre connaissance du zéro de Siegel.

Nous nous penchons à présent sur (†) et (††). La seule difficulté dans leur preuve vient (essentiellement) de ce que nous utilisons l'inégalité

$$\Re \frac{L'}{L}(\sigma, \chi) \ll \sqrt{q}\,\mathrm{Log}^A q \quad (1 \le \sigma \le 1 + 1/\sqrt{q})$$

où $A = 0$ dans notre preuve, mais une puissance plus large ne gâterait pas de beaucoup nos corollaires. Cette inégalité est triviale si $|L(1, \chi)| \ge c(\mathrm{Log}\, q)^2/\sqrt{q}$ pour une constante c assez grande (il suffit d'employer le théorème des accroissements finis), ce qui fait qu'il nous reste à nous occuper des très petites valeurs de $|L(1, \chi)|$. Le lecteur peut dès lors imaginer les différentes façons de procéder, selon ce que l'on s'autorise à utiliser.

En ce qui concerne les notations, χ désigne un caractère de Dirichlet modulo q or d, de conducteur f_χ. Nous posons en outre

$$\tau_q(\chi) = \sum_{a \bmod^* q} \chi(a) e(a/q),$$

et rappelons que, pour tout n premier à q, nous avons

$$\tau_q(\bar{\chi})\chi(n) = \sum_{a \bmod^* q} \bar{\chi}(a) e(na/q),$$

ainsi que

$$|\tau_q(\chi)|^2 = \begin{cases} f_\chi \mu^2(q/f_\chi) & \text{si } (q/f_\chi, f_\chi) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les symboles mod et mod* ont deux utilisations: $\sum_{a \bmod q}$ désigne une somme portant sur tous les entiers modulo q alors que $\sum_{a \bmod^* q}$ désigne une somme restreinte aux entiers modulo q premiers à q. De façon similaire, les symboles $\sum_{\chi \bmod q}$ et $\sum_{\chi \bmod^* q}$ désignent des sommes portant respectivement sur les caractères modulo q et sur les caractères primitifs modulo q. La distinction entre les deux familles de symboles est induite par le contexte. Si la notation $\mathcal{O}$ est bien connue, nous utiliserons aussi $f = \mathcal{O}^*(g)$ pour signifier $|f| \le g$.

2. Préparation

Pour $0 < \theta < 1$, nous posons

$$f_q(\theta) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(n,q)=1}} \frac{e(n\theta)}{n}, \tag{7}$$

et

$$f_q(\theta, Y) = \sum_{\substack{n\leq Y\\(n,q)=1}} \frac{e(n\theta)}{n}, \quad \bar{f}_q(\theta, Y) = f_q(\theta) - f_q(\theta, Y) \tag{8}$$

Pour $0 < \theta < 1$, nous posons

$$g_q(\theta) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(n,q)=1}} \frac{\operatorname{Log} n}{n} e(n\theta) \tag{9}$$

et

$$g_q(\theta, Y) = \sum_{\substack{n\leq Y\\(n,q)=1}} \frac{e(n\theta)\operatorname{Log} n}{n}, \quad \bar{g}_q(\theta, Y) = g_q(\theta) - g_q(\theta, Y) \tag{10}$$

Pour ce qui est des évaluations effectives, nous aurons besoin des deux lemmes suivants de Rosser et Rosser & Schoenfeld:

Lemme 1 ([14]). $\max_{t\geq 1} \psi(t)/t = \psi(113)/113 \leq 1.04$.

Lemme 2 ([15]). *Pour $L \geq 319$, nous avons*

$$\sum_{\ell\leq L} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} = V(L; 1, 1) = \operatorname{Log} L - \gamma + \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{2\operatorname{Log} L} + \frac{1}{2\sqrt{L}}\right).$$

Pour les lemmes généraux de grand crible, nous renvoyons le lecteur au chapitre 27 de [3] ou aux premiers chapitres de [1]. Nous isolons deux résultats:

Lemme 3 (Gallagher)

$$\sum_{\chi \bmod^* d} \left|\sum_n b_n \chi(n)\right|^2 \leq \frac{\phi(d)}{d} \sum_{a \bmod^* d} \left|\sum_n b_n\, e(na/d)\right|^2.$$

Il s'agit en fait de la preuve du théorème 4 du chapitre 27 proposée dans [3] et de celle des théorèmes 7 et 8 donnée dans [1]. Voici une version de l'inégalité de Brun-Titchmarsh en moyenne dont on trouvera une preuve dans [13] thm 3.1.3 (une version plus simple se trouve au niveau de l'équation (7.8) dans [11]).

Lemme 4. *Supposons que $a_n = 0$ dès que n a un facteur premier inférieur à D. Alors*

$$\sum_{d\leq D} \sum_{a \bmod^* d} \left|\sum_{n\leq N} \varphi_n\, e\,(na/d)\right|^2 \ll \sum_{n\leq N} |\varphi_n|^2\, (N + D^2) \operatorname{Log}(2D)$$

3. Une formule implicite avec un bon terme d'erreur

Définissons

$$\mathcal{R}(X, L, q, c_0) = \sum_{\substack{m \le X/L \\ (m,q)=1}} \frac{1}{m} \sum_{\substack{L < \ell \le X/m \\ (\ell,q)=1}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} e(m\ell\bar{c}_0/q), \tag{11}$$

ainsi que

$$C(X, L, q, c_0) = \bar{g}_q(\frac{\bar{c}_0}{q}, X) - \sum_{\substack{\ell \le L \\ (\ell,q)=1}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} \bar{f}_q(\frac{\ell\bar{c}_0}{q}, X/\ell). \tag{12}$$

Le résultat principal de cette section est le suivant:

Lemme 5. *Soit $X > L$ deux réels, et q un entier $\neq 1$. Soit c_0 une classe inversible modulo q. Nous avons*

$$\sum_{c \bmod^* q} V(L; q, c) f_q(c\bar{c}_0/q) = g_q(\bar{c}_0/q) - \mathcal{R}(X, L, q, c_0) + C(X, L, q, c_0)$$

Remarque. Il est clair que nous pourrions évaluer la quantité $C(X, L, q, c_0)$ maintenant puisque $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont des termes d'erreur, mais plutôt que d'utiliser des bornes individuelle pour ces termes, nous allons utiliser un effet de moyenne qui provient de la preuve du théorème 1.

Preuve. D'un côté nous avons

$$\sum_{\substack{n \le X \\ (n,q)=1}} \frac{\operatorname{Log} n}{n} e(n\bar{c}_0/q) = g_q(X, \bar{c}_0/q) \tag{13}$$

et de l'autre, le membre de gauche de (13) égale

$$\sum_{\substack{\ell \le L \\ m \le X/\ell \\ (m\ell,q)=1}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell m} e(\ell m\bar{c}_0/q) + \mathcal{R}(X, L, q, c_0) \tag{14}$$

soit encore

$$\sum_{\ell \le L} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} f_q(\frac{X}{\ell}, \frac{\bar{c}_0\ell}{q}) + \mathcal{R}(X, L, q, c_0). \tag{15}$$

Nous terminons la preuve en écrivant $f_q(\theta, Y) = f_q(\theta) - \bar{f}_q(\theta, Y)$ et pareillement pour les g_q. $\square$

4. Comment les caractères de Dirichlet s'introduisent d'eux-mêmes

Nous regardons le lemme 5 comme un système linéaire de $\phi(q)$ équations en les $\phi(q)$ variables $V(L; q, c)$. La matrice de ce système est

$$M_q = \big(f_q(c\bar{c}_0/q)\big)_{\substack{c \bmod^* q \\ c_0 \bmod^* q}} \tag{16}$$

que nous devons étudier. Soit χ un caractère de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ et posons $V(\chi) = (\chi(c))_{c \bmod^* q}$. Nous avons

$$M_q V(\chi) = \Bigg(\sum_{c \bmod^* q} f_q(c\bar{c}_0/q)\chi(c)\Bigg)_{c_0 \bmod^* q} = \lambda_\chi V(\chi)$$

avec

$$\lambda_\chi = \sum_{c \bmod^* q} f_q(c/q)\chi(c), \tag{17}$$

ce qui nous permet de diagonaliser notre système. Recherchons à présent une autre expression pour λ_χ. À l'aide de (7), nous obtenons

$$\lambda_\chi = \tau_q(\chi)L(1, \bar{\chi}) \quad (\chi \text{ primitif}). \tag{18}$$

Nous verrons dans la prochaine section comment ne rencontrer que des caractères primitifs dans notre problème.

5. Preuve du théorème 1

La preuve est centrée sur la quantité suivante:

$$\Sigma(w, Q) = \sum_{1 \neq q \leq Q} \sum_{\chi \bmod^* q} \sum_{c_0 \bmod^* q} w(\chi)\chi(c_0) \sum_{c \bmod^* q} f_q(c\bar{c}_0/q)V(L; q, c) \tag{19}$$

où les $w(\chi)$ sont des poids quelconques. Nous remarquons tout d'abord, en échangeant les sommations sur c et sur c_0 que

$$\Sigma(w, Q) = \sum_{1 \neq q \leq Q} \sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi)\lambda_{\bar{\chi}} V(L, \chi). \tag{20}$$

Par ailleurs, dans (19), nous pouvons remplacer la somme sur c par l'expression donnée par le lemme 5.

Le second terme résiduel est C, que nous traitons essentiellement à q fixé de la façon suivante:

$$-\sum_{\substack{\ell \leq L \\ (\ell, q)=1}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} \sum_{\chi \bmod^* q} \sum_{c_0 \bmod^* q} w(\chi)\chi(c_0)\bar{f}_q\Big(\frac{\ell\bar{c}_0}{q}, X/\ell\Big)$$
$$+ \sum_{\chi \bmod^* q} \sum_{c_0 \bmod^* q} w(\chi)\chi(c_0)\bar{g}_q\Big(\frac{\bar{c}_0}{q}, X\Big).$$

Comme $\bar{f}_q$ et $\bar{g}_q$ sont des sommes sur des entiers n et que les caractères sont primitifs, nous pouvons introduire la somme sur c_0 à l'intérieur de ces sommations et obtenir

$$-\sum_{\ell\le L}\frac{\Lambda(\ell)}{\ell}\sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi)\tau_q(\bar{\chi})\sum_{n>X/\ell}\frac{\chi(n\ell)}{n}+\sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi)\tau_q(\bar{\chi})\sum_{n>X}\frac{\chi(n)\operatorname{Log} n}{n}.$$

Nous séparons les termes des deux sommations sur χ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et nous retrouvons à étudier des sommes du type

$$S_h=\sum_{2<q\le Q}\sum_{\chi \bmod^* q}\left|\sum_{n>N}\chi(n)h(n)\right|^2. \tag{21}$$

L'inégalité de Gallagher (lemme 3) les majore par

$$S_h\le\sum_{2<q\le Q}\frac{\phi(q)}{q}\sum_{a \bmod^* q}\left|\sum_{n>N}e(na/q)h(n)\right|^2 \tag{22}$$

où nous utilisons alors une sommation par parties

$$\begin{aligned}S_h &\le \sum_{2<q\le Q}\frac{\phi(q)}{q}\sum_{a \bmod^* q}\left|\int_N^\infty\sum_{N<n\le t}e(na/q)h'(t)dt\right|^2\\ &\le \sum_{2<q\le Q}\frac{\phi(q)}{q}\int_N^\infty|h'(t)|dt\int_N^\infty\sum_{a \bmod^* q}|\sum_{N<n\le t}e(na/q)|^2|h'(t)|dt\end{aligned}$$

valable pour peu que h soit C^1 et de limite nulle en l'infini, ce que nos deux fonctions vérifient. De plus, nous avons aussi $h'(t)\le 0$ pour les t qui nous intéressent (moyennant de rappeler que $X\ge e$). Il vient alors

$$S_h\le\sum_{2<q\le Q}\frac{\phi(q)}{q}h(N)^2\rho(q)^2q^2 \tag{23}$$

avec

$$\rho(q)=\left(\max_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{q^2}\sum_{a \bmod^* q}(\sin na\pi/q)^2(\sin a\pi/q)^{-2}\right)^{1/2}\ll 1. \tag{24}$$

Nous obtenons le terme d'erreur:

$$\left(\sum_{2<q\le Q}\rho(q)^2q\phi(q)\right)^{1/2}\frac{1.04L+\operatorname{Log} X}{X}. \tag{25}$$

Signalons ici que l'idée d'introduire ce maximum pour améliorer un peu l'aspect numérique vient de [2]. Le gain numérique n'est ici de que 2 à 3 pourcents, mais l'idée est jolie.

Pour étudier le terme issu de $\mathcal{R}(X, L, q, c_0)$, nous introduisons quelques notations. Tout d'abord

$$S_q(\alpha, t) = \sum_{\substack{L<\ell\le t\\ (\ell,q)=1}} \Lambda(\ell) e(\ell\alpha). \tag{26}$$

Ensuite, nous allons utiliser la mesure définie pour toute fonction Lebesgue-intégrable $h(m, t)$ par

$$\int_{m,t} h(m,t)d\nu = \sum_{m\le X/L} \left\{ \int_L^{X/m} h(m,t)\frac{dt}{mt^2} + \frac{1}{X} h(m, X/m) \right\}. \tag{27}$$

Une sommation par parties nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X, L, q, c_0) &= \sum_{\substack{m\le X/L\\ (m,q)=1}} \frac{1}{m}\left\{ \frac{m}{X} S_q(m\overline{c_0}/q, X/m) + \int_L^{X/m} S(m\overline{c_0}/q, t)\frac{dt}{t^2}\right\}\\ &= \int_{m,t} \mathbb{1}_{(m,q)=1} S_q(m\overline{c_0}/q, t)d\nu.\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \sum_{1\ne q\le Q} \sum_{c_0 \bmod^* q} \sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi)\chi(c_0)\mathcal{R}(X, L, q, c_0)\\ &= \int_{m,t} \sum_{\substack{1\ne q\le Q\\ (m,q)=1}} \sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi) \sum_{c_0 \bmod^* q} \chi(c_0) S_q(m\overline{c_0}/q, t)d\nu\\ &= \int_{m,t} \sum_{1\ne q\le Q} \sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi) \sum_{c \bmod^* q} \chi(m\overline{c}) S_q(c/q, t)d\nu.\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz et obtenons la majoration suivante de $|\mathfrak{R}|$:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{R}| \le \int_{m,t} &\Bigg(\sum_{1\ne q\le Q} \sum_{\chi \bmod^* q} |w(\chi)|^2 \Bigg)^{1/2}\\ &\times \Bigg(\sum_{1\ne q\le Q} \sum_{\chi \bmod^* q} \Big| \sum_{c \bmod^* q} \chi(\overline{c}) S(c/q, t)\Big|^2 \Bigg)^{1/2} d\nu. \end{aligned} \tag{28}$$

Dans le dernier facteur, nous étendons la somme sur χ à tous les caractères modulo q et développons le carré. Il nous reste à remarquer que

$$\int_{m,t} \Bigg(\sum_{1\ne q\le Q} \phi(q) \sum_{c \bmod^* q} \big|S_q(c/q, t)\big|^2 \Bigg)^{1/2} d\nu \ll \sqrt{Q \operatorname{Log}^5 Q} \tag{29}$$

grâce au lemme 4 et en prenant $X = Q^2 L$ et $L \ge Q^2$.

Quant à la contribution de $g_q(\bar{c}_0/q)$, elle est constante par rapport à L. En effectuant la différence des expressions obtenues en L et L', il vient

$$\sum_{1\neq q\leq Q}\sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi)\lambda_{\bar{\chi}} \sum_{L\leq \ell\leq L'} \frac{\Lambda(\ell)\chi(\ell)}{\ell} \ll \sqrt{Q\operatorname{Log}^5 Q}\left(\sum_{1\neq q\leq Q}\sum_{\chi \bmod^* q} |w(\chi)|^2\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Nous prenons alors

$$w(\chi) = \frac{q}{\tau_q(\bar{\chi})} L(1,\bar{\chi}) \sum_{L\leq \ell\leq L'} \frac{\Lambda(\ell)\bar{\chi}(\ell)}{\ell} \tag{31}$$

et obtenons le théorème 1.

6. Une version explicite du théorème 1

Nous reprenons ici la preuve du paragraphe précédent mais avec des visées numériques et essentiellement en pensant q comme "petit" (disons $q = 3$ ou $q = 4$). Il est trivial de modifier la preuve précédente pour obtenir

$$\sum_{\chi \bmod^* q} w(\chi)\lambda_{\bar{\chi}} \sum_{L\leq \ell} \frac{\Lambda(\ell)\chi(\ell)}{\ell} \leq \tau_q\sqrt{q}\left(\sum_{\chi \bmod^* q} |w(\chi)|^2\right)^{1/2} \tag{32}$$

avec

$$\tau_q\sqrt{q} = \int_{m,t}\left(\sum_{\chi \bmod^* q}\Big|\sum_{c \bmod^* q}\chi(\bar{c})S_q(c/q,t)\Big|^2\right)^{1/2} d\nu + \frac{\rho(q)\sqrt{q\phi(q)}}{X}(1.04L+\operatorname{Log} X).$$

Pour ce qui est du premier terme, nous pouvons ici faire appel au théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques modulo q et passer par le lemme suivant:

Lemme 6. *Soit q un entier différent de 1 et $t \geq L$ deux réels. Supposons que pour tout a premier à q, nous ayons*

$$\sum_{\substack{L\leq \ell<t\\ \ell\equiv a[q]}} \Lambda(\ell) = \frac{t-L}{\phi(q)} + \mathcal{O}^*\left(\eta_q \frac{t+L}{\phi(q)}\right)$$

pour un certain $\eta_q \geq 0$. Alors, nous avons

$$\sum_{\chi \bmod^* q}\Big|\sum_{c \bmod^* q}\chi(\bar{c})S_q(c/q,t)\Big|^2 \leq (1+\tfrac{L}{t})^2\eta_q^2 q t^2.$$

Preuve. Tout d'abord, nous écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \bmod^* q} \Big| \sum_{c \bmod^* q} \chi(\overline{c}) S_q(c/q,t)\Big|^2 &= q \sum_{\chi \bmod^* q} \big|S_q(\chi,t)\big|^2 \\ &= q \sum_{\chi \bmod^* q} \Bigg| \sum_{a \bmod^* q} \chi(a) \Bigg(\sum_{\substack{L\le \ell < t\\ \ell\equiv a[q]}} \Lambda(\ell) - \frac{t-L}{\phi(q)}\Bigg)\Bigg|^2\end{aligned}$$

la dernière ligne étant rendue possible par le fait que χ n'est pas le caractère principal. Nous étendons alors la somme externe pour porter sur tous les caractères modulo q et développons pour obtenir

$$\sum_{\chi \bmod^* q} \Big| \sum_{c \bmod^* q} \chi(\overline{c}) S_q(c/q,t)\Big|^2 \le q\phi(q) \sum_{a \bmod^* q} \Bigg| \sum_{\substack{L\le \ell < t\\ \ell\equiv a[q]}} \Lambda(\ell) - \frac{t-L}{\phi(q)}\Bigg|^2$$

et notre hypothèse conclut. □

Disons à présent que nous savons montrer que

$$\sum_{\chi \bmod^* q} \Big| \sum_{c \bmod^* q} \chi(\overline{c}) S_q(c/q,t)\Big|^2 \le \varepsilon_q^2 (1+\tfrac{L}{t})^2 q t^2, \quad (L_0 \le t \le X). \tag{33}$$

La quantité τ_q se majore par

$$\begin{aligned}&\varepsilon_q \sum_{\substack{m\le X/L\\ (m,q)=1}} \left\{ \int_L^{X/m} \frac{t+L}{mt^2} dt + \big(\frac{1}{m} + \frac{L}{X}\big)\right\} + \frac{\rho(q)\sqrt{q\phi(q)}}{Xq^{1/2}} (1.04L + \operatorname{Log} X) \\ &\le \varepsilon_q \sum_{\substack{m\le X/L\\ (m,q)=1}} \left\{ \frac{\operatorname{Log}(X/(Lm))}{m} + \frac{2L}{X}\right\} + \frac{\rho(q)\sqrt{q\phi(q)}}{Xq^{1/2}} (1.04L + \operatorname{Log} X) \\ &\le \varepsilon_q \sum_{\substack{m\le \theta_q\\ (m,q)=1}} \left\{ \frac{\operatorname{Log}(\theta_q/m)}{m} + \frac{2}{\theta_q}\right\} + \frac{\rho(q)\sqrt{q\phi(q)}}{\theta_q q^{1/2}} \left(1.04 + \frac{\operatorname{Log}(\theta_q L_0)}{L_0}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

pour $X \ge L \ge L_0$ avec $\theta_q = X/L$. Approximativement

$$\theta_q \operatorname{Log} \theta_q \simeq \frac{1.04\, q\rho(q)}{2\varepsilon_q \phi(q)^{1/2}}. \tag{35}$$

Avant de passer à des applications numériques, poursuivons la preuve. Supposons que nous disposions d'une borne

$$\sum_{\chi \bmod^* d} |L(1,\chi)|^2 \left| \sum_{L\le \ell} \frac{\chi(\ell)\Lambda(\ell)}{\ell}\right|^2 \le \tau_d^2 \qquad (L \ge L_0, 1 \ne d|q). \tag{36}$$

Nous suivons alors l'argumentation classique

$$\begin{aligned}V(L;q,a) =&\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(a)}V(L,\chi)\\ =&\frac{1}{\phi(q)}\sum_{d|q}\sum_{\chi \bmod^* d}\overline{\chi(a)}V(L,\chi)\\ &-\frac{1}{\phi(q)}\sum_{d|q}\sum_{\chi \bmod^* d}\overline{\chi(a)}\sum_{\substack{\ell\geq 1\\(d,\ell)\neq 1}}\frac{\Lambda(\ell)\chi(\ell)}{\ell}\\ &+\mathcal{O}^*\Big(\frac{1}{\phi(q)}\sum_{p^\alpha\|q}\phi(p^\nu)\frac{\operatorname{Log} p}{L(1-1/p)}\Big).\end{aligned}$$

Nous complétons ensuite les $V(L,\chi)$ en $V(\infty,\chi)$ pour $d\neq 1$ et obtenons

$$\begin{aligned}&V(L;q,a)\\ &\quad=\frac{V(L;1,1)+\gamma}{\phi(q)}+C(q,a)\\ &\qquad+\mathcal{O}^*\Bigg(\frac{1}{\phi(q)}\Bigg(\sum_{1\neq d|q}\tau_d^2\sum_{\chi \bmod^* d}|L(1,\chi)|^{-2}\Bigg)^{1/2}+\frac{1}{L\phi(q)}\sum_{p^\alpha\|q}p^\alpha\operatorname{Log} p\Bigg)\end{aligned}$$

pour $L\geq L_0$, que nous réécrivons sous la forme

$$\begin{aligned}V(L;q,a) &= \frac{V(L;1,1)+\gamma}{\phi(q)}+C(q,a)+\mathcal{O}^*(\tilde{\tau}_q)\\ &= \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)}+C(q,a)+\mathcal{O}^*\Bigg(\tilde{\tau}_q+\frac{2}{\phi(q)\sqrt{L}}+\frac{1}{2\phi(q)\operatorname{Log} L}\Bigg)\end{aligned}\tag{37}$$

pour $L\geq L_0$ et en utilisant le lemme 2. Pour L inférieur à L_0, et disons supérieur à L_1, supposons que nous disposions de "l'hypothèse de Riemann":

$$\psi(x;q,a)=\frac{x}{\phi(q)}+\mathcal{O}^*(\overline{\eta}_q\sqrt{x})\qquad (L_1\leq x\leq L_0).$$

Nous écrivons alors

$$V(L;q,a)-\frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)}=\frac{1}{\phi(q)}+\frac{\psi(L;q,a)-\frac{L}{\phi(q)}}{L}+\int_2^L\Big(\psi(t;q,a)-\frac{t}{\phi(q)}\Big)\frac{dt}{t^2}$$

ce qui nous donne (pour $L\leq L_0$)

$$\begin{aligned}&\Bigg(V(L;q,a)-\frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)}\Bigg)-\Bigg(V(L_0;q,a)-\frac{\operatorname{Log} L_0}{\phi(q)}\Bigg)\\ &\quad=\frac{\psi(L;q,a)-\frac{L}{\phi(q)}}{L}-\frac{\psi(L_0;q,a)-\frac{L_0}{\phi(q)}}{L_0}-\int_L^{L_0}\Big(\psi(t;q,a)-\frac{t}{\phi(q)}\Big)\frac{dt}{t^2}.\end{aligned}$$

Pour $L \in [L_1, L_0]$, nous obtenons alors

$$V(L;q,a) - \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} - C(q,a) = \mathcal{O}^*\left(\frac{\overline{\eta}_q \times \frac{3}{2}}{\sqrt{L}} + \frac{\overline{\eta}_q \times \frac{1}{2}}{\sqrt{L_0}} + \tilde{\tau}_q + \frac{2}{\phi(q)\sqrt{L_0}} + \frac{1}{2\phi(q)\operatorname{Log} L_0}\right). \tag{38}$$

La mise en place pratique de ce procédé est décrit dans la dernière section.

Nous avons dit dans l'introduction qu'il nous suffisait de théorèmes de Čebyshev modulo q, alors que nous avons utilisé ici de tels théorèmes modulo d pour tout d divisant q. Tout d'abord, il faut noter que les premiers impliquent les seconds, et avec essentiellement les mêmes constantes (seuls les diviseurs de q qui ne divisent pas d empêchent une parfaite égalité). D'un point de vue numérique, il est un peu meilleur de faire la distinction.

7. Preuve de (†) et de (††)

Voici un lemme essentiellement dû à Landau et que le lecteur retrouvera comme une partie du théorème 4.2 de [4].

Lemme 7. *Supposons que l'on dispose d'une borne supérieure M pour la fonction holomorphe F dans le disque $|s - s_0| \leq R$. Supposons que $F(s_0) \neq 0$. Alors*

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{|\rho - s_0| \leq R/2} \frac{1}{s-\rho} + \mathcal{O}^*\left(8\frac{\operatorname{Log}(M/|F(s_0)|)}{R}\right)$$

pour $|s - s_0| \leq \frac{1}{4}R$, où ρ désigne un zéro de F.

Lemme 8. *Nous avons*

$$\sum_{\substack{f|q\\ f\neq 1}} \frac{f}{\phi(f)} \sum_{\chi \bmod^* f} \frac{1}{|L(1,\chi)|^2} \asymp q, \quad \sum_{\substack{f\leq F\\ f\neq 1}} \frac{f}{\phi(f)} \sum_{\chi \bmod^* f} \frac{1}{|L(1,\chi)|^2} \asymp F^2.$$

Preuve. Le lemme 7 nous garantit que

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|\rho-1|\leq R} \frac{1}{s-\rho} + \mathcal{O}(\sqrt{q})$$

si $|s-1| \leq R/2$, $R = (\operatorname{Log} q)/\sqrt{q}$ et où la somme porte sur les zéros de L. Comme il y a au plus un seul tel zéro, qu'il est réel et au moins à $\mathcal{O}(1/\sqrt{q})$ de 1 d'après le théorème de Haneke [5,6], nous obtenons

$$\Re\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) \ll \sqrt{q} \quad (1 \leq \sigma \leq 1 + 1/\sqrt{q}).$$

En intégrant $\Re\frac{L'}{L}(\sigma,\chi)$ sur $[1, 1+\xi]$, cela nous donne

$$\frac{1}{|L(1,\chi)|^2} \ll \frac{1}{|L(1+\xi,\chi)|^2} \quad (0 \leq \xi \leq 1/\sqrt{q}).$$

Il nous suffit dès lors d'opérer en $1+\xi$ et non plus en 1. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2|L(1+\xi,\chi)|^2} &\le |\sum_{n\le Y}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{1+\xi}}|^2+(1+\xi)|\int_Y^\infty\sum_{Y<n\le t}\mu(n)\chi(n)\frac{dt}{t^{2+\xi}}|^2,\\ &\le |\sum_{n\le Y}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{1+\xi}}|^2+\frac{(1+\xi)^2}{\xi Y^\xi}\int_Y^\infty|\sum_{Y<n\le t}\mu(n)\chi(n)|^2\frac{dt}{t^{3+\xi}},\end{aligned}$$

où Y est un réel positif à choisir. L'inégalité du grand crible nous garantit alors que

$$\sum_{f\le F}\sum_{\chi\bmod^* f}\frac{f/\phi(f)}{|L(1+\xi,\chi)|^2}\le 2\sum_{n\le Y}\frac{\mu^2(n)}{n^{2+2\xi}}(Y+F^2)+\frac{2(1+\xi)^2}{\xi Y^\xi}\int_Y^\infty\frac{t+F^2}{t^{2+\xi}}dt$$

que nous majorons encore par

$$\frac{12}{\pi^2}(Y+F^2)+\frac{2(1+\xi)^2}{\xi^2Y^{2\xi}}\big\{1+\frac{\xi F^2}{(1+\xi)Y}\big\}.$$

Nous prenons $Y=\xi F^2$ et $\xi=F^{-1}$ ce qui conclut la preuve de la seconde inégalité (avec le signe $\ll$ au lieu de $\asymp$). La preuve de la première est tout à fait similaire avec $Y=\xi q$ et $\xi=\sqrt{q}^{-1}$.

Pour vérifier que ces bornes supérieures sont du bon ordre de grandeur, il suffit de remarquer que nous aurions pu montrer ces mêmes inégalités avec $L(1,\chi)$ au lieu de $L(1,\chi)^{-1}$. Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur

$$\Bigg(\sum_{\substack{f|q\\ f\neq 1}}\frac{f}{\phi(f)}\sum_{\chi\bmod^* f}|L(1,\chi)|\times\frac{1}{|L(1,\chi)|}\Bigg)^2$$

combiné à

$$\sum_{\substack{f|q\\ f\neq 1}}\frac{f}{\phi(f)}\sum_{\chi\bmod^* f}1=\prod_{p^\alpha\|q}\big(p^\alpha-\frac{1}{p-1}\big),$$

nous obtenons bien

$$q\ll\sum_{\substack{f|q\\ f\neq 1}}\frac{f}{\phi(f)}\sum_{\chi\bmod^* f}\frac{1}{|L(1,\chi)|^2}\ll q,$$

comme annoncé. Remarquons que le facteur $f/\phi(f)$ est ici important si l'on ne veut pas voir apparaître un désobligeant facteur $q/\phi(q)$. □

Une remarque pour finir. La première égalité du lemme 8 nous donne $|L(1,\chi)|\gg 1/\sqrt{\phi(q)}$ alors qu'elle ne s'appuie que sur un résultat essentiellement équivalent à $|L(1,\chi)|\gg 1/\sqrt{q}$. De tels phénomènes ont déjà été notés par le passé et nous renvoyons le lecteur à [10] pour plus de détails. La preuve que nous pésentons permettrait de retrouver les résultats présentés dans [10] sous une forme très légèrement améliorée.

8. Preuve de (5)

Pour ce qui est de la borne inférieure de type Čebyshev, nous écrivons

$$V(L;q,a) = \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} + C(q,a) + \mathcal{O}^*(f(q)), \tag{39}$$

pour $L \geq L_0(q)$. D'où

$$\sum_{\substack{\delta_q L < \ell < L \\ \ell \equiv a[q]}} \Lambda(\ell) \geq \delta_q L \sum_{\substack{\delta_q L < \ell < L \\ l \equiv a[q]}} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell} \geq \frac{\delta_q L}{\phi(q)} (\operatorname{Log} \delta_q - 2\phi(q) f(q)) > 0 \tag{40}$$

pourvu que $\delta_q > \exp\{2\phi(q)f(q)\}$ and $\delta_q L \geq L_0(q)$.

9. Applications numériques

Sous

$$\psi(x;d,a) = \frac{x}{\phi(d)}(1 + \mathcal{O}^*(\eta_d)) \qquad (d|q,\ x \geq L_0) \tag{41}$$

et

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\phi(q)} + \mathcal{O}^*(\overline{\eta}_q \sqrt{x}) \qquad (L_1 \leq x \leq L_0), \tag{42}$$

la quantité

$$V(L;q,a) - \frac{\operatorname{Log} L}{\phi(q)} - C(q,a) \tag{43}$$

est majorée en valeur absolue pour $L \geq L_2 \geq L_1$ par

$$\begin{aligned} \frac{3\overline{\eta}_q}{2\sqrt{L_2}} + \frac{\overline{\eta}_q}{2\sqrt{L_0}} + \frac{1}{\phi(q)} \Bigg(\sum_{1 \neq d | q} \tau_d^2 \sum_{\chi \bmod^* d} |L(1,\chi)|^{-2} \Bigg)^{1/2} \\ + \sum_{p^\alpha \| q} \frac{p^\alpha \operatorname{Log} p}{L_0 \phi(q)} + \frac{2}{\phi(q)\sqrt{L_0}} + \frac{1}{2\phi(q) \operatorname{Log} L_0} \end{aligned} \tag{44}$$

où τ_d est donné par

$$\eta_d \sum_{\substack{m \leq \theta_d \\ (m,d)=1}} \left\{ \frac{\operatorname{Log}(\theta_d/m)}{m} + \frac{2}{\theta_d} \right\} + \frac{\rho(d)\sqrt{d\phi(d)}}{\theta_d} \left(1.04 + \frac{\operatorname{Log}(\theta_d L_0)}{L_0} \right) \tag{45}$$

ce que l'on obtient en rassemblant (34), (36), (37) (qui contient la définition de $\tilde{\tau}$) et enfin (38). Pour ce qui est de l'optimisation requise pour obtenir le meilleur θ_d, remarquons que le mieux est de prendre θ_d immédiatement inférieur à un entier. Une remarque s'impose encore, dans le cas où $q = 2q'$ avec q' impair. Comme les caractères modulo q sont en fait modulo q', nous pouvons nous contenter de q' tant que nous étudions ce qui se passe au niveau des caractères, c'est à dire pour ε_d et τ_d.

L'étape suivante consiste bien sûr à calculer (43) lorsque L est petit et le seul problème est ici de calculer $L'(1,\chi)$. Après avoir considéré différentes approches, nous avons opté pour la technique suivante: nous écrivons le développement en séries de $L(s,\chi)$ au voisinage de 1 et identifions le coefficient de $(s-1)$ comme étant $L'(1,\chi)$. Pour écrire ce développement de Laurent, nous exprimons $L(s,\chi)$ en fonction des fonctions ζ de Hurwitz pour lesquelles nous avons

$$\zeta(s,x)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+x)^s}=\frac{1}{s-1}+\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j\gamma_j(x)}{j!}(s-1)^j \tag{46}$$

où les $\gamma_n(x)$ sont les constantes généralisées de Euler-Stieltjes définies par

$$\gamma_j(x)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{1\leq n\leq N}\frac{\mathrm{Log}^j(n+x)}{n+x}-\frac{\mathrm{Log}^{j+1}(N+x)}{j+1}\right). \tag{47}$$

Ces constantes ont fait l'objet d'une littérature assez conséquente. En posant

$$\gamma_j(\chi)=\frac{1}{q}\sum_{1\leq a\leq q}\chi(a)\gamma_j(a/q) \tag{48}$$

nous obtenons facilement

$$\gamma_0(\chi)=L(1,\chi),\quad -\gamma_1(\chi)-\gamma_0(\chi)\,\mathrm{Log}\,q=L'(1,\chi) \tag{49}$$

de sorte qu'il nous reste à calculer $\gamma_1(x)$, ce que nous faisons à l'aide de la formule élégante suivante:

Lemme 9 (N.-Y. Zhang & K.Williams, [17]). *Soit $x\in]0,1]$ et m et j des entiers positifs ou nuls. Nous avons*

$$\begin{aligned}\gamma_j(x)=&\sum_{k=0}^{m}\frac{\mathrm{Log}^j(k+x)}{k+x}-\frac{\mathrm{Log}^{j+1}(m+x)}{j+1}-\frac{\mathrm{Log}^j(m+x)}{2(m+x)}\\&+\int_m^\infty B_1(t)\frac{\mathrm{Log}^j(t+x)}{t+x}dt\end{aligned}$$

où $B_1(x)=\{x\}-\frac{1}{2}$ est le premier polynôme de Bernoulli.

En utilisant des intégrations par parties successives et en introduisant les polynômes de Bernoulli, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_m^\infty B_1(t)\frac{\mathrm{Log}(t+x)}{t+x}dt=&\frac{-\mathrm{Log}(m+x)}{12(m+x)}+\frac{2\,\mathrm{Log}(m+x)-3}{720(m+x)^3}\\&+\int_m^\infty\frac{B_5(t)}{120}\frac{d}{dt}\left(\frac{-6\,\mathrm{Log}(t+x)+11}{(t+x)^4}\right)dt\end{aligned} \tag{50}$$

Tableau 1

q	$v^\sharp(q)$	$\varepsilon^\sharp(q)$
3	0.7475	0.0714
4	0.7867	0.0544
5	0.8115	0.0813
6	0.9785	0.0714
7	0.7128	0.0754
8	0.7924	0.0537
9	0.7566	0.0615
10	0.8118	0.0813
11	0.7608	0.0737
12	0.7078	0.0518
13	0.7406	0.0766
14	0.7085	0.0754
15	0.5685	0.0776
16	0.7851	0.0759
17	0.8566	0.1362
18	0.7565	0.0615
19	0.8255	0.1460
20	0.7271	0.0451
21	0.7171	0.0747
22	0.7621	0.0737
23	0.6963	0.1318
24	0.7503	0.0510
25	0.7691	0.1165
26	0.7390	0.0766
27	0.6852	0.0960
28	0.7243	0.0687
29	0.7670	0.1370
30	0.5685	0.0776
31	0.7299	0.1407
32	0.8322	0.0837
33	0.7437	0.0815
34	0.8566	0.1362
35	0.6150	0.0935
36	0.7032	0.0553
37	0.7751	0.1447
38	0.8255	0.1460
39	0.6380	0.0783
40	0.7720	0.0578
41	0.7157	0.1424
42	0.7132	0.0747
43	0.7651	0.1454
44	0.7769	0.0778
45	0.6963	0.0861
46	0.7000	0.1318
47	0.7594	0.1502
48	0.7874	0.0604
49	0.6722	0.1291
50	0.7691	0.1165
51	0.6375	0.1003

q	$v^\sharp(q)$	$\varepsilon^\sharp(q)$
52	0.6324	0.0725
53	0.6871	0.1491
54	0.6852	0.0960
55	0.6950	0.1057
56	0.7200	0.0681
57	0.8163	0.1081
58	0.7669	0.1370
59	0.7080	0.1599
60	0.6566	0.0505
61	0.6764	0.1583
62	0.7302	0.1407
63	0.6985	0.0860
64	0.7065	0.0819
65	0.6218	0.1084
66	0.7437	0.0815
67	0.6766	0.1596
68	0.7315	0.0960
69	0.5847	0.1058
70	0.6150	0.0935
71	0.6722	0.1613
72	0.7069	0.0565
74	0.7751	0.1447
75	0.6267	0.0915
76	0.7846	0.1003
77	0.6071	0.1272
78	0.6380	0.0783
80	0.7099	0.0678
81	0.6294	0.1078
82	0.7157	0.1424
84	0.6480	0.0616
85	0.6521	0.1240
86	0.7649	0.1454
87	0.6575	0.1120
88	0.7716	0.0751
90	0.6963	0.0861
91	0.6808	0.1322
92	0.6782	0.0997
93	0.6722	0.1139
94	0.7610	0.1502
95	0.6422	0.1252
96	0.7230	0.0617
98	0.6722	0.1291
99	0.6470	0.1005
100	0.7090	0.0820
102	0.6375	0.1003
104	0.6652	0.0805
105	0.5805	0.0798
106	0.6871	0.1491
108	0.7970	0.0699

q	$v^\sharp(q)$	$\varepsilon^\sharp(q)$
110	0.6931	0.1057
111	0.7079	0.1164
112	0.7363	0.0722
114	0.8163	0.1081
116	0.6644	0.1013
117	0.6301	0.1082
118	0.7080	0.1599
120	0.6800	0.0506
121	0.6803	0.1707
122	0.6764	0.1583
124	0.7021	0.1040
125	0.6592	0.1469
126	0.6985	0.0860
128	0.6685	0.0884
130	0.6218	0.1084
132	0.6558	0.0657
134	0.6766	0.1596
138	0.5847	0.1058
140	0.6461	0.0726
142	0.6722	0.1613
143	0.6829	0.1633
144	0.6572	0.0615
150	0.6267	0.0915
154	0.6071	0.1272
156	0.6304	0.0573
162	0.6294	0.1078
163	0.7038	0.2116
168	0.6712	0.0567
169	0.6935	0.1944
170	0.6521	0.1240
174	0.6575	0.1120
180	0.7144	0.0606
182	0.6808	0.1322
186	0.6722	0.1139
190	0.6422	0.1252
210	0.5805	0.0798
216	0.6799	0.0670
222	0.7080	0.1164
234	0.6301	0.1082
242	0.6660	0.1707
243	0.6865	0.1454
250	0.6592	0.1469
256	0.7168	0.1047
286	0.6829	0.1633
326	0.7038	0.2116
338	0.6935	0.1944
360	0.6740	0.0583
420	0.6185	0.0600
432	0.6844	0.0748
486	0.6865	0.1454

Comme $|B_5(t)| \leq 0.0245$, nous constatons que la dernière intégrale est facile à majorer et décroît assez rapidement quand m croît. Le choix $m = 10000$ nous donne une précision de 18 décimales.

Enfin, nous avons vérifié les valeurs obtenues pour $L'(1, \chi)$ en les comparant aux valeurs que l'on obtient par d'autres procédés: en calculant la série tronquée qui définit $L'(1, \chi)$ ou en calculant $(L(1 + \varepsilon, \chi) - L(1, \chi))/\varepsilon$.

10. Preuve des corollaires 4 et 5

Tout d'abord, la borne du corollaire est établie pour $L \geq 10^5$ grâce aux calculs décrits dans la section précédente. Ensuite, grâce au théorème 2, il nous suffit de trouver y pour lequel $v^\sharp(q)y^{-1/2} \leq \varepsilon^\sharp(q)$, et $y = 261$ convient. Il est facile de finir.

Pour le corollaire 5, nous determinons d'abord le plus petit y tel que $v^\sharp(q)y^{-1/2} \leq 0.9784$ et il vérifie $y \leq 1.000204426$. Il ne reste plus alors que le module 6 en compétition et un calcul plus précis conclut.

Bibliographie

[1] Bombieri, E.: *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres* (Astérisque, Paris 1987) 103pp

[2] Cochrane, T., Peral, J.C.: An asymptotic formula for a trigonometric sum of Vinogradov. J. Number Theory, **91**, 1–19 (2001)

[3] Davenport, H.: *Multiplicative Number Theory* (Springer-Verlag, Berlin 2000) 177pp

[4] Ellison, W., Mendès France, M.: *Les nombres premiers* (Hermann, Nancago 1975) 442pp

[5] Haneke, W.: Über die reellen Nullstellen der Dirichletschen L-Reihen. Acta Arith., **22**, 391–421 (1973)

[6] Haneke, W.: Corrigendum to Über die reellen Nullstellen der Dirichletschen L-Reihen. Acta Arith., **31**, 99–100 (1976)

[7] McCurley, K.S.: Explicit estimates for the error term in the prime number theorem for arithmetic progressions. Math. Comp., **42**, 265–285 (1984)

[8] McCurley, K.S.: Explicit estimates for θ (x;3,ℓ) and ψ (x;3,ℓ). Math. Comp., **42**, 287–296 (1984)

[9] Mertens, F.: Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien (Math.), **106**, 254–286 (1897)

[10] Pintz, J.: Elementary methods in the theory of L-functions, II. Acta Arith., **31**, 273–289 (1976)

[11] Ramaré, O.: On Snirel'man's constant. Ann. Scu. Norm. Pisa, **21**, 645–706 (1995)

[12] Ramaré, O., Rumely, R.: Primes in arithmetic progressions. Math.Comp., **65**, 397–425 (1996)

[13] Ramaré, O., Ruzsa, I.Z.: Additive properties of dense subsets of sifted sequences. J. Théorie N. Bordeaux, (2001)

[14] Rosser, J.B.: Explicit bounds for some functions of prime numbers. Amer. J. Math., **63**, 211–232 (1941)

[15] Rosser, J.B., Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. Math., **6**, 64–94 (1962)

[16] Rumely, R.: Numerical Computations Concerning the ERH. Math. Comp., **61**, 415–440 (1993)

[17] Williams, K.S., Zhang, N.-Y.: Some results on the generalized Stieltjes constants Analysis, **14**, 147–162 (1994)