

## RÉSUMÉ.

Let  $\mathcal{A}$  be a finite alphabet of positive integers with  $|\mathcal{A}| \geq 2$ , and  $F(\mathcal{A})$ , the set of numbers in  $[0, 1)$  whose partial quotients belong to  $\mathcal{A}$ . We construct a Kaufman measure on every such set with Hausdorff dimension  $> 1/2$  and establish, this way, the existence of infinitely many normal numbers in  $F(\mathcal{A})$ . This improves previous results of Kaufman and Baker.

# ANALYSE DE FOURIER DES FRACTIONS CONTINUES À QUOTIENTS RESTREINTS

par Martine Queffélec et Olivier Ramaré

## 1. INTRODUCTION

Il est intéressant de classer les ensembles de mesure de Lebesgue nulle : on peut considérer leur cardinalité, leur dimension de Hausdorff, ou préciser le comportement des mesures (singulières) qu'ils portent.

1.1 – On sait que les nombres normaux (en toute base) sont de mesure pleine pour la mesure de Lebesgue, et Kahane & Salem [9] ont posé la question suivante : soit  $\mu$  une mesure borélienne sur  $\mathbf{T}$  identifié à  $[0, 1)$  dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini ( $\mu \in M_0(\mathbf{T})$ ) ; est-il encore vrai que  $\mu$ -presque tout nombre de  $[0, 1)$  est normal en base 2 par exemple ?

Autrement dit, est-ce que l'ensemble des nombres non-normaux en base 2 est annulé par toute mesure de  $M_0(\mathbf{T})$  ? ou porte-t-il, au contraire, une mesure de  $M_0(\mathbf{T})$  ?

**DÉFINITION 1.1.** Un sous-ensemble  $E \subset \mathbf{T}$  est dit **de multiplicité (stricte)** s'il existe une mesure (de probabilité)  $\mu \in M_0(\mathbf{T})$  telle que  $\mu(E) \neq 0$ .

Russell Lyons [11] a montré que l'ensemble  $W^*$  des nombres non-normaux en base 2 était de multiplicité en précisant la borne inférieure de la vitesse de convergence de  $\hat{\mu}(n)$  vers 0, lorsque  $\mu$  charge positivement  $W^*$ . La réponse à la question de Kahane & Salem est donc : non.

1.2 – Les nombres à quotients partiels bornés sont de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Pour chaque  $N \geq 2$ , notons  $F(N)$  l'ensemble des irrationnels de  $[0, 1)$  dont le développement en fraction continue ne comporte que des entiers  $\in \{1, \dots, N\}$ . C'est un compact de type Cantor, de mesure de Lebesgue

nulle. Mais sa dimension de Hausdorff est non nulle et tend vers 1 quand  $N \rightarrow \infty$ . La dimension de Hausdorff de  $F(2)$  est de l'ordre de  $0,53\dots$

Kaufman [8] sait construire sur tout ensemble  $F(N)$  dont la dimension de Hausdorff est  $> 2/3$  (en fait, dont la dimension de Hausdorff est  $> \frac{1+\sqrt{17}}{8} \simeq 0,64$ ) une mesure de probabilité dont la transformée de Fourier est en  $O(|n|^{-\delta})$  où  $\delta > 0$ , quand  $|n| \rightarrow \infty$ . Il résulte des encadrements précis de cette dimension, dus à Hensley [6], que  $F(N)$  est un ensemble de multiplicité pour  $N \geq 3$ . La question reste alors en suspens pour  $N = 2$  ...

1.3 – Il n'existe pas de lien entre le développement en base entière et le développement en fraction continue d'un nombre réel et on peut se demander s'il existe des nombres normaux à quotients partiels bornés. Dans son livre [12], Montgomery rapporte l'observation faite par Baker à la parution du résultat de Kaufman, observation que l'on peut formuler ainsi :

**THÉORÈME 1.2 (Baker).** *Pour tout  $N \geq 3$ , il existe une infinité de nombres normaux dans  $F(N)$ .*

Subsiste alors la question de savoir s'il existe un nombre normal appartenant à  $F(2)$  (et même une infinité).

Par une relecture soigneuse de la construction de Kaufman, nous apportons une réponse positive à cette dernière question; plus précisément, nous établissons

**THÉORÈME 1.3.** *Il existe une infinité de nombres normaux dans  $F(\mathcal{A})$  pour tout ensemble  $\mathcal{A}$  fini d'entiers  $\geq 1$  contenant au moins deux éléments et tel que  $\dim_{\text{h}} F(\mathcal{A}) > 1/2$ .*

Ce théorème est la conséquence facile du théorème suivant, qui annonce l'existence d'une mesure **de Kaufman** sur  $F(\mathcal{A})$  pour un tel alphabet.

**THÉORÈME 1.4.** *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 1$ . Nous supposons que  $\mathcal{A}$  contient au moins deux éléments et que la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $F(\mathcal{A})$  est  $> \frac{1}{2}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $1/2 < \delta < \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A})$ . Il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $F(\mathcal{A})$  et deux constantes  $> 0$   $c_1$  et  $c_2$  telles que*

- Pour tout borélien  $S$ ,  $\mu(S) \leq c_1(\text{diam } S)^\delta$ .
- Pour tout  $u > 0$ ,  $|\hat{\mu}(u)| \leq c_2(1 + |u|)^{\eta+8\varepsilon}$  avec  $\eta = \frac{\delta(1-2\delta)}{(2\delta+1)(4-\delta)}$ .

L'article est construit comme suit : après des rappels sur le développement en fraction continue et les ensembles  $F(\mathcal{A})$ , nous reprenons en grande partie la construction de Kaufman en l'adaptant à notre propos pour établir le théorème 1.4, puis nous en déduisons le théorème 1.3 par une démarche classique désormais (voir aussi [13],[14]) et qu'utilisait déjà Baker [1].

## 2. LES ENSEMBLES $F(\mathcal{A})$

Soit  $N \geq 2$  et  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\subset [1, \dots, N]$  contenant au moins deux éléments.

Nous nous intéressons à l'ensemble  $F(\mathcal{A})$  des irrationnels de  $[0, 1)$  dont le développement en fraction continue  $[0; a_1, a_2, \dots]$  est tel que  $a_i \in \mathcal{A}$  pour tout  $i \geq 1$ .

Si  $x = [0; a_1, a_2, \dots] \in F(\mathcal{A})$ , notons  $\frac{P_k(x)}{Q_k(x)} := \frac{P_k}{Q_k} = [0; a_1, a_2, \dots, a_k]$  la  $k$ -ième réduite de  $x$ ; nous avons ainsi  $P_0 = 0$ ,  $Q_0 = 1$ ,  $P_1 = 1$  et  $Q_1 = a_1$ . Pour exprimer les  $P_k$  et  $Q_k$ , il est commode pour cela d'introduire les matrices de déterminant  $-1$

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i(x) \end{pmatrix};$$

Alors

$$(1) \quad M_k(x) = A_k(x) \dots A_1(x) = \begin{pmatrix} P_{k-1}(x) & Q_{k-1}(x) \\ P_k(x) & Q_k(x) \end{pmatrix}.$$

Il ressort de ces récurrences que  $P_k(x)$  et  $Q_k(x)$  sont en fait des polynômes en  $a_1, \dots, a_k$ , liés par la relation  $P_{k-1}Q_k - Q_{k-1}P_k = (-1)^k$ . Par transposition dans (1), il vient :

$$(2) \quad Q_k(a_1, \dots, a_k) = Q_k(a_k, \dots, a_1),$$

et

$$(3) \quad P_k(a_1, \dots, a_k) = Q_{k-1}(a_k, \dots, a_2),$$

d'où

$$(4) \quad \frac{Q_{k-1}}{Q_k} = [0; a_k, \dots, a_1].$$

Cela signifie que deux dénominateurs consécutifs contiennent tout le passé de la fraction continue.

Les réduites fournissent de bonnes approximations rationnelles de  $x$  et nous retiendrons

$$(5) \quad x - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{(x_{k+1}Q_k + Q_{k-1})Q_k}$$

où

$$x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \dots].$$

Enfin remarquons que  $F(\mathcal{A})$  admet un plus petit et un plus grand élément : le plus petit admet comme fraction continue la suite périodique répétant  $N, a$  où  $N$  est le plus grand élément de  $\mathcal{A}$  et  $a$  est son plus petit élément, alors que le plus grand lui répète  $a, N$ . Il s'agit donc, pour le plus petit élément, de la solution de

$$x(N + \frac{1}{x+a}) = 1$$

qui est  $\geq \frac{a}{aN+1} \geq \frac{1}{N+1}$  alors que le plus grand est  $\leq \frac{2N}{2aN+1} \leq \frac{2N}{2N+1}$ .

L'ensemble  $F(\mathcal{A})$  peut être regardé comme sous-ensemble de  $\mathbf{R}$ , avec sa topologie et sa mesure, ce que nous nommerons la structure linéaire, ou bien comme un produit infini  $\mathcal{A}^{\mathbf{N}^*}$  qui est naturellement muni d'une structure profinie. Les morphismes qui passent d'une structure à l'autre sont respectivement et trivialement l'application qui à un nombre associe son développement en fractions continues et l'application qui à un tel développement associe un réel ... Ces deux structures se ressemblent beaucoup !

LEMME 2.1. Soit  $x$  et  $y$  de  $F(\mathcal{A})$ . Supposons  $a_i(x) = a_i(y)$  pour  $i$  variant de 1 à  $k$ . Alors

$$|x - y| \leq \frac{N^2}{Q_{k+1}(x)^2}$$

et si  $a_{k+1}(x) \neq a_{k+1}(y)$ , alors

$$|x - y| \geq \frac{1}{N(N+2)Q_{k+1}(x)^2}.$$

*Démonstration.* En effet, puisque  $Q_j(x) = Q_j(y) := Q_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , par (5),

$$x - y = \frac{(-1)^k(y_{k+1} - x_{k+1})}{(x_{k+1}Q_k + Q_{k-1})(y_{k+1}Q_k + Q_{k-1})}$$

et

$$y_{k+1}Q_k + Q_{k-1} \leq \left( \frac{y_{k+1}}{a_{k+1}(x)} + 1 \right) (a_{k+1}(x)Q_k + Q_{k-1}) \leq (N+2)Q_{k+1}(x)$$

alors que d'un autre côté

$$y_{k+1}Q_k + Q_{k-1} \geq \frac{1}{a_{k+1}(x)} (a_{k+1}(x)Q_k + Q_{k-1}) \geq \frac{1}{N}Q_{k+1}(x).$$

Il nous reste à minorer  $|y_{k+1} - x_{k+1}|$  sous la seule hypothèse  $a_{k+1}(x) \neq a_{k+1}(y)$  (mais aussi  $1/x_k \in F(N)$ ). Le pire qui puisse arriver est que  $x_{k+1}$  soit le plus grand possible par rapport à  $a_{k+1}(x)$ , que  $a_{k+1}(y) = a_{k+1}(x) + 1$  et que  $y_{k+1}$  soit le plus petit possible. Leur différence serait alors minorée par

$$1 - \frac{\sqrt{N^2 + 1}}{N + 1} + \frac{\sqrt{2}}{N + 1} \geq \frac{1}{N}$$

car  $1 - \frac{\sqrt{N^2 + 1}}{N + 1} \geq 0$  si  $N \geq 1$ , et  $N\sqrt{2} \geq N + 1$  si  $N \geq 3$ . Il suffit alors de vérifier l'inégalité pour  $N = 2$ .  $\square$

LEMME 2.2. *Soit  $t$  et  $h > 0$  des réels. Supposons que  $h < (N + 2)^{-1}$ . Alors il existe  $\ell \geq 1$  et  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_\ell$  des entiers entre 1 et  $N$  tels que*

$$t \leq x \leq t + h \implies a_i(x) = \tilde{a}_i \quad (i \in \{1, \dots, \ell\}).$$

De plus  $Q_\ell(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_\ell) \geq (N + 2)^{-1}h^{-1/2}$ .

*Démonstration.* La preuve est essentiellement contenue dans le lemme précédent. En effet, comme  $Q_{k+1}$  est borné, l'existence ne pose pas de problème. Il nous suffit alors de prendre  $\ell$  maximal, i.e. tel qu'il existe deux points  $x$  et  $y$  avec  $a_{\ell+1}(x) \neq a_{\ell+1}(y)$  et le lemme précédent conclut.  $\square$

Si nous désignons par  $T$  le shift unilatéral sur  $F(\mathcal{A})$  considéré comme sous-ensemble de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ , de sorte que  $Tx := T[0; a_1, a_2, \dots] = [0; a_2, a_3, \dots]$ , la fonction  $(n, x) \rightarrow M_n(x)$  est un cobord matriciel pour  $T$  au sens où :

$$M_{k+\ell}(x) = M_\ell(T^k x)M_k(x)$$

soit

$$\begin{pmatrix} P_{k+\ell-1}(x) & Q_{k+\ell-1}(x) \\ P_{k+\ell}(x) & Q_{k+\ell}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\ell-1}(T^k x) & Q_{\ell-1}(T^k x) \\ P_\ell(T^k x) & Q_\ell(T^k x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}(x) & Q_{k-1}(x) \\ P_k(x) & Q_k(x) \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire

$$Q_{k+\ell}(x) = P_\ell(T^k x)Q_{k-1}(x) + Q_\ell(T^k x)Q_k(x)$$

d'où l'encadrement, puisque  $P_j \leq Q_j$  pour tout  $j$ ,

$$(6) \quad 1 \leq \frac{Q_{k+\ell}(x)}{Q_\ell(T^k x)Q_k(x)} \leq 2.$$

En nous souvenant que  $P_j(x)$  et  $Q_j(x)$  ne dépendent que des  $j$  premiers quotients partiels de  $x$ , nous avons montré

LEMME 2.3. *Si tous les  $a_i$  sont au moins égaux à 1, la différence  $\text{Log } Q_{k+\ell}(a_1, \dots, a_{k+\ell}) - \text{Log } Q_k(a_1, \dots, a_k) - \text{Log } Q_\ell(a_{k+1}, \dots, a_{k+\ell})$  est en valeur absolue inférieure à  $\text{Log } 2$ .*

### 3. DIMENSION DE HAUSDORFF

Les ensembles  $F(\mathcal{A})$  sont tous de mesure de Lebesgue nulle, mais de dimension de Hausdorff  $> 0$ . Good [4] a montré le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 0$ . Soit  $m \geq 1$ . Soit  $\alpha_{m,\mathcal{A}} > 0$  la solution en  $\alpha$  de*

$$\sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\alpha} = 1.$$

*Alors la limite de  $\alpha_{m,\mathcal{A}}$  quand  $m$  tend vers l'infini existe et vaut la dimension de Hausdorff de  $F(\mathcal{A})$  muni de la métrique induite par la distance sur  $\mathbf{R}$ .*

En fait, la preuve qui mène à ce résultat est très instructive. En notant

$$\Sigma_m(\alpha) = \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\alpha}$$

nous constatons en utilisant (6) que  $\Sigma_{m+\ell}(\alpha) \leq \Sigma_m(\alpha)\Sigma_\ell(\alpha)$ . Par ailleurs  $\Sigma_m(\alpha)$  décroît en  $\alpha$  et par conséquent, si  $\Sigma_m(\alpha_1) \geq 1$ , alors  $\alpha_{m,\mathcal{A}} \geq \alpha_1$ . Or

$$\Sigma_m(\alpha) \geq N^{-2m\alpha} F_m^{-2\alpha} |\mathcal{A}|^m$$

où  $F_m$  est le  $m$ -ième nombre de Fibonacci. Nous souhaitons donc avoir

$$-2(\text{Log } N + \frac{1}{m} \text{Log } F_m)\alpha + \text{Log } |\mathcal{A}| \geq 0$$

ce qui nous garantit que

$$\dim_h F(\mathcal{A}) \geq \frac{\text{Log } |\mathcal{A}|}{2(\text{Log } N + \text{Log } \frac{1+\sqrt{5}}{2})}.$$

Cette minoration nous montre en particulier que cette dimension est strictement positive.

Notons dans l'autre sens que  $d = \dim_h F(\mathcal{A}) \leq 1/2$  pour certains alphabets  $\mathcal{A}$ , par exemple  $\mathcal{A} = \{1, 4\}$ . Cela résulte de la remarque suivante : s'il existe des  $m$  arbitrairement grands pour lesquels  $\Sigma_m(\alpha) < 1$ , alors  $\alpha \geq d$  ; dans le cas contraire, en effet, puisque  $\lim_m \alpha_m = d$ ,  $\alpha < \alpha_m$  et  $\Sigma_m(\alpha) \geq \Sigma_m(\alpha_m) = 1$  pour  $m$  assez grand. Par ailleurs dès que  $\Sigma_m(\alpha) < 1$  pour un  $m$  fixé, nous avons  $\Sigma_{km}(\alpha) < 1$  pour tout  $k \geq 1$ . En prenant  $m = 6$  dans l'exemple précédent, nous obtenons alors  $d \leq 0.492$ .

## 4. UNE MESURE SPÉCIALE

Dans la construction de la mesure qui nous intéresse, nous allons éliminer du support les points pour lesquels  $\text{Log } Q_m$  est trop loin de sa valeur moyenne, auquel cas les deux structures considérées sur  $F(\mathcal{A})$  seront vraiment similaires .

Soit  $\delta < \dim_{\text{H}} F(\mathcal{A})$ . Le théorème 3.1 et la définition de la dimension de Hausdorff nous assurent que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m(\delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\delta} = +\infty;$$

nous pouvons trouver  $m$  assez grand pour que  $\Sigma_m(\delta) \geq 8$ . Fixons provisoirement  $m$  ainsi et regardons  $F(\mathcal{A})$  comme formé à partir des blocs  $\mathcal{A}^m$ .

Nous munissons le bloc  $\mathcal{A}^m$  de la mesure de probabilité discrète  $\nu_m = \nu_{m,\delta}$  définie par

$$\nu_m(\{a_1, \dots, a_m\}) = Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\delta} / \Sigma_m(\delta)$$

Soit alors  $m\sigma_m(\delta)$  la moyenne de  $\text{Log } Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)$  pour cette mesure. Comme

$$(7) \quad \text{Log } Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m) \geq \text{Log } Q_m(1, 1, \dots, 1) \geq (m-1) \text{Log } \sqrt{2}$$

nous avons  $m\sigma_m(\delta) \geq (m-1) \text{Log } \sqrt{2}$ .

Notons

$$Y_1 = Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m), Y_2 = Q_m(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{2m}), \dots$$

Les variables  $(Y_j)_j$  forment une suite de variables indépendantes équidistribuées sur l'espace  $\Omega = (\mathcal{A}^m)^{\mathbf{N}^*}$  muni de la mesure de probabilité:  $\mathbf{P} = \nu_m \times \nu_m \times \dots$

Par la loi faible des grands nombres, pour  $\varepsilon > 0$  nous pouvons trouver  $j_0 = j_0(m, \varepsilon)$  tel que pour  $j \geq j_0$ :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{j}(\text{Log } Y_1 + \text{Log } Y_2 + \dots + \text{Log } Y_j) - \mathbf{E}(\text{Log } Y_1)\right| \leq \varepsilon \mathbf{E}(\text{Log } Y_1)\right) > \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, à l'aide du lemme 2.3, pour  $j \geq j_0$

$$\begin{aligned} |\text{Log } Q_{jm}(a_1, a_2, \dots, a_{jm}) - jm\sigma_m(\delta)| &\leq \varepsilon jm\sigma_m(\delta) + (j-1) \text{Log } 2 \\ &\leq \left(\varepsilon + \frac{j-1}{2jm}\right) jm\sigma_m(\delta) \end{aligned}$$

sur un ensemble  $E = E(\varepsilon, j_0)$  de  $\mathbf{P}$ -mesure  $> \frac{1}{2}$ ; en prenant  $m \geq 1/2\varepsilon$  (ce qui fixe  $j_0$  en fonction de  $\varepsilon$ ) et en posant  $J_0 = j_0 m$ , nous obtenons sur  $E$

$$(8) \quad |\text{Log } Q_J(a_1, a_2, \dots, a_J) - J\sigma_m(\delta)| \leq 2\varepsilon J\sigma_m(\delta)$$

pour tout  $J \geq J_0$  et divisible par  $m$ .

$J_0$  étant fixé, nous regardons cette fois  $F(\mathcal{A})$  comme construit autour des blocs  $\mathcal{A}^{J_0}$ . Soit  $\nu$  la mesure de probabilité induite sur  $E$  par la mesure  $\underbrace{\nu_m \times \dots \times \nu_m}_{J_0}$ . La mesure  $\mu$  qui convient est  $\times_1^\infty \nu$ , obtenue en prenant des copies de  $\nu$  sur chaque facteur  $\mathcal{A}^{J_0}$ .

Puisque  $Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m) = Q_m(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1)$ , la mesure discrète  $\nu_m$  est invariante par la transformation  $(a_1, \dots, a_m) \rightarrow (a_m, \dots, a_1)$  et par définition des variables  $Y_j$ , l'ensemble

$$E = \left\{ \left| \frac{1}{j} (\text{Log } Y_1 + \text{Log } Y_2 + \dots + \text{Log } Y_j) - \mathbf{E}(\text{Log } Y_1) \right| \leq \varepsilon \mathbf{E}(\text{Log } Y_1) \right\}$$

est à son tour invariant par la transformation  $(a_1, \dots, a_{jm}) \rightarrow (a_{jm}, \dots, a_1)$ . Il ressort alors de la construction que  $\nu$  est invariante par la transformation  $(a_1, \dots, a_{J_0}) \rightarrow (a_{J_0}, \dots, a_1)$ ; enfin  $\mu$  est invariante par la transformation  $(a_1, \dots, a_J) \rightarrow (a_J, \dots, a_1)$  pour tout  $J$  multiple de  $J_0$ .

Nous retiendrons en particulier de cette construction :

**PROPOSITION 4.1.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $1/2 < \delta < \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A})$  nous pouvons trouver  $m$ ,  $J_0$  multiple de  $m$  et une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $F(\mathcal{A})$  tels que :*

- a)  $\mu(I) \leq c|I|^\delta$ ,  $I$  intervalle de  $[0, 1)$ , où  $c > 0$
- et, pour tout  $J$  divisible par  $J_0$ ,
- b)  $\mu$  est invariante par la transformation  $(a_1, \dots, a_J) \rightarrow (a_J, \dots, a_1)$ ,
- c)  $Q^{1+2\varepsilon} \geq Q_J(x) \geq Q^{1-2\varepsilon}$ ,  $Q^{1+2\varepsilon} \geq Q_{J-1}(x) \geq Q^{1-2\varepsilon}/(2N)$   $\mu$ -presque sûrement, avec  $Q = \exp(J\sigma_m(\delta))$ .

Des mesures vérifiant la propriété a) se rencontrent souvent en théorie de la dimension et permettent d'obtenir une borne inférieure pour celle-ci via le théorème de Frostman (cf [10]).

*Démonstration.* Il reste à établir la propriété a) qui va découler du lemme 2.2. Soit  $I = [t, t+h]$ . Quitte à décomposer  $I$  en petits intervalles disjoints, nous pouvons supposer  $h < \frac{1}{N+2}$ . Par le lemme 2.2,  $I$  est contenu dans le cylindre s'appuyant sur  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_\ell$ ,  $1 \leq \tilde{a}_j \leq N$ , avec de plus  $Q_\ell(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_\ell) \geq (N+2)^{-1}h^{-1/2}$ .

Si l'entier  $p$  est tel que  $pJ_0 \leq \ell < (p+1)J_0$ ,

$$Q_{pJ_0}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{pJ_0}) \geq Ch^{-1/2}$$

où  $C$  est indépendant de  $h$ , et par l'inégalité (6),

$$Q_{pJ_0}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{pJ_0}) \leq 2^\lambda Q_m(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \dots Q_m(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \dots, \tilde{a}_{\lambda m}),$$

avec  $pJ_0 = \lambda m$ . Nous en déduisons

$$(9) \quad Q_m(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \dots Q_m(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \dots, \tilde{a}_{\lambda m}) \geq C2^{-\lambda}h^{-1/2}.$$

Maintenant, en notant  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  le cylindre s'appuyant sur  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , nous pouvons majorer

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\ell})) &\leq \mathbf{P}(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{pJ_0})) \\ &= \nu_m(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)) \dots \nu_m(C(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \dots, \tilde{a}_{\lambda m})) \\ &= Q_m(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)^{-2\delta} \dots Q_m(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \dots, \tilde{a}_{\lambda m})^{-2\delta} \Sigma_m(\delta)^{-\lambda} \\ &\leq C^{-2\delta} 2^{2\lambda\delta} h^{\delta} \Sigma_m(\delta)^{-\lambda}, \end{aligned}$$

d'après l'estimation (9).

Rappelons que  $\nu$  est la mesure de probabilité induite sur  $E$  par la mesure :  $\underbrace{\nu_m \times \dots \times \nu_m}_{j_0}$  et que  $\mathbf{P}(E) \geq 1/2$ , où  $E$  ne dépend que des  $J_0$  premières variables. Il en résulte que

$$\nu(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{J_0})) \leq 2 \underbrace{(\nu_m \times \dots \times \nu_m)}_{j_0}(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{J_0}));$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \mu(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{pJ_0})) &\leq 2^p \nu_m(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)) \dots \nu_m(C(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \dots, \tilde{a}_{\lambda m})) \\ &\leq C^{-2\delta} 2^{2\lambda\delta+p} \Sigma_m(\delta)^{-\lambda} h^{\delta}. \end{aligned}$$

Pour finir, nous remarquons que  $2^{2\lambda\delta+p} = 2^{\lambda(2\delta+1/j_0)}$  puis que  $2^{(2\delta+1/j_0)} \leq 8 \leq \Sigma_m(\delta)$  par choix de  $m$ .  $\square$

## 5. INTÉGRALES OSCILLANTES

Nous établissons trois lemmes sur des intégrales oscillantes. Les deux premiers portent sur la mesure de Lebesgue alors que le dernier est une idée originale de Kaufman.

LEMME 5.1. Si  $f$  est  $C^2$  sur  $[0, 1]$ , vérifie  $|f'(t)| \geq a$  et  $|f''(t)| \leq b$ , alors nous avons

$$\left| \int_0^1 e(f(t)) dt \right| \leq \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2},$$

avec la notation usuelle  $e(x) = \exp(2i\pi x)$ .

Il s'agit là d'une version intégrale modifiée du lemme de Kuzmin-Landau, aussi ce que l'on nomme de façon informelle "le critère de la dérivée première".

Le second lemme s'applique lorsque  $f'(t)$  s'annule dans l'intervalle en question.

LEMME 5.2. Si  $f$  est  $C^2$  sur  $[0, 1]$  et  $f'(t) = (\alpha t + \beta)g(t)$  où  $g$  vérifie  $|g(t)| \geq a$  et  $|g'(t)| \leq b$  avec  $b \geq a$ , alors nous avons

$$\left| \int_0^1 e(f(t)) dt \right| \leq 6 \frac{b}{a^{3/2} |\alpha|^{1/2}}.$$

Classiquement, la méthode de la phase stationnaire donnerait une contribution de l'ordre de  $1/\sqrt{|f''(-\beta/\alpha)|}$ , lorsque  $b/a$  est de l'ordre de 1, et c'est bien ce que donne notre lemme.

Le dernier lemme permet de comparer l'intégrale d'une fonction par rapport à deux mesures distinctes.

LEMME 5.3. Soit  $F$  une fonction  $C^1$  sur  $[0, 1]$  bornée en valeur absolue par 1 et telle que  $|F'(t)| \leq M$ . Notons  $m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt$ . Soit ensuite  $\lambda$  une mesure de probabilité sur  $[0, 1]$  et notons par  $\Lambda(u)$  le maximum des  $\lambda[t, t+u]$  pour tout  $t$  dans  $[0, 1-u]$ . Nous avons alors pour tout  $r > 0$

$$\int_0^1 |F(t)| d\lambda \leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}).$$

*Démonstration.* Recouvrons  $[0, 1]$  par au plus  $M/r$  intervalles disjoints de longueur  $r/M$ . Il reste au plus un intervalle de plus petite longueur. Soit  $N$  le nombre de ces intervalles sur lesquels  $\sup |F(t)| \geq 2r$ . En utilisant le théorème des accroissements finis, nous constatons que  $|F(t)| \geq r$  sur tous les intervalles considérés. Par conséquent

$$m_2 \geq N r^2 \frac{r}{M}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^1 |F(t)| d\lambda &\leq 2r + (N+1)\Lambda(r/M) \\ &\leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}). \end{aligned}$$

□

## 6. ESTIMATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Nous nous occupons ici du comportement asymptotique de

$$\hat{\mu}(u) = \int_0^1 e(ut) d\mu(t)$$

pour  $|u|$  grand; nous supposons, sans restriction,  $u$  positif.

Commençons par rappeler que si  $x = [0; a_1, a_2, \dots]$  et  $t = T^J(x) = [0; a_{J+1}, \dots]$

$$\begin{aligned} [0; a_1, a_2, \dots, a_J + t] &= \frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} \\ &= \frac{P_J}{Q_J} + \frac{(-1)^J t}{(Q_J + tQ_{J-1})Q_J}. \end{aligned}$$

Partons donc de  $J = kJ_0$  fixé: par construction, nous pouvons décomposer notre mesure  $\mu$  sous la forme

$$\mu = \underbrace{\nu \times \dots \times \nu}_k \times \mu := \rho_k \times \mu$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(u) &= \int_0^1 \int e\left(\frac{P_J(x) + tP_{J-1}(x)}{Q_J(x) + tQ_{J-1}(x)} u\right) d\rho_k(x) d\mu(t) \\ &:= \int_0^1 F(t) d\mu(t), \end{aligned}$$

où

$$(10) \quad F(t) = \int e\left(\frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} u\right) d\rho_k$$

à laquelle nous nous proposons d'appliquer les lemmes précédents. Puisque  $J$  est fixé, nous avons

$$(11) \quad Q^{1-2\varepsilon} \leq Q_J \leq Q^{1+2\varepsilon}, \quad \frac{1}{2N} Q^{1-2\varepsilon} \leq Q_{J-1} \leq Q^{1+2\varepsilon},$$

avec  $Q = \exp(J\sigma_m(\delta))$ ; mais, comme  $Q$  tend vers l'infini avec  $J$ , nous pouvons le choisir au voisinage d'un nombre fixé à l'avance, à une constante multiplicative près (constante comprise entre  $\exp(J_0\sigma_m(\delta))$  et son inverse).

Nous commençons par déduire des lemmes 5.1 et 5.2 une estimation de  $m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt$ .

LEMME 6.1. Si  $Q^{2+4\delta} \geq u$ , nous avons

$$\int_0^1 |F(t)|^2 dt \ll_N \frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}}.$$

*Démonstration.* En développant le carré, nous obtenons

$$\int_0^1 |F(t)|^2 dt = \iint \int_0^1 e\left(\left(\frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} - \frac{P_J^* + tP_{J-1}^*}{Q_J^* + tQ_{J-1}^*}\right)u\right) dt d\rho_k d\rho_k$$

où  $P_J^*, Q_J^*, \dots$  sont des variables indépendantes de  $P_J, Q_J, \dots$  et identiquement distribuées. Notre expression se réécrit :

$$\iint e\left(\left(\frac{P_J}{Q_J} - \frac{P_J^*}{Q_J^*}\right)u\right) \int_0^1 e(f(t)) dt d\rho_k d\rho_k$$

où l'on a posé

$$(12) \quad f(t) = \frac{t(-1)^J u}{(Q_J + tQ_{J-1})Q_J} - \frac{t(-1)^J u}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)Q_J^*}$$

L'argument  $f(t)$  de l'exponentielle admet pour dérivée :

$$f'(t) = \left( \frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2} - \frac{1}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} \right) (-1)^J u$$

soit encore

$$f'(t) = \frac{(Q_J + Q_J^* + t(Q_{J-1} + Q_{J-1}^*))(Q_J - Q_J^* + t(Q_{J-1} - Q_{J-1}^*))}{(Q_J + tQ_{J-1})^2(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} (-1)^J u,$$

qui pourra s'écrire  $g(t)(\alpha t + \beta)$  avec :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{Q_J + Q_J^* + t(Q_{J-1} + Q_{J-1}^*)}{(Q_J + tQ_{J-1})^2(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} \\ &= \frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} + \frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)}. \end{aligned}$$

Il nous faut aussi calculer

$$g'(t) = -\frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} h(t)$$

où nous avons posé

$$h(t) = Q_{J-1} + Q_{J-1}^* + \frac{2Q_{J-1}^*(Q_J + tQ_{J-1})}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)} + \frac{2Q_{J-1}(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)}{(Q_J + tQ_{J-1})}.$$

Nous poursuivons l'estimation de

$$(13) \quad \int_0^1 e(f(t)) dt \quad \text{notée } \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*)$$

en discutant selon l'existence ou non d'un point stationnaire pour  $f$ , i.e. d'un point  $t \in [0, 1)$  tel que  $f'(t) = 0$  ce qui impose  $Q_{J-1} \neq Q_{J-1}^*$ , et  $t = -(Q_J - Q_J^*) / (Q_{J-1} - Q_{J-1}^*) \in [0, 1)$ .

1) Tout d'abord rappelons (voir (4)) que si  $Q_{J-1} = Q_{J-1}^*$  et  $Q_J = Q_J^*$ ,  $a_i = a_i^*$  pour tout  $i \leq J$ ; les points  $P_J/Q_J$  et  $P_J^*/Q_J^*$  sont donc confondus, et  $\kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) = 1$  d'après (12) et (13). Compte tenu du lemme 2.1 et du caractère höldérien de  $\mu$  (proposition 4.1 a)), la contribution de ce terme dans le calcul de la transformée de Fourier sera au plus

$$\begin{aligned} & \int \int_{\{Q_J=Q_J^*, Q_{J-1}=Q_{J-1}^*\}} \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) d\rho_k d\rho_k \\ & \leq \int \rho_k \left( \left[ \frac{P_J}{Q_J} - \frac{N^2}{Q_J^2}, \frac{P_J}{Q_J} + \frac{N^2}{Q_J^2} \right] \right) d\rho_k \\ & \ll \frac{1}{Q^{2\delta-6\varepsilon}}. \end{aligned}$$

2) a) Supposons qu'il y ait un point stationnaire (en particulier  $Q_{J-1} \neq Q_{J-1}^*$ ); alors le lemme 5.2 donne

$$(14) \quad \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) \ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{|Q_{J-1} - Q_{J-1}^*|u}}.$$

En effet, avec les notations du lemme 5.2,

$$|g(t)| \geq a = \frac{1}{4}Q^{-3-6\varepsilon},$$

et

$$|g'(t)| \leq 10Q^{-3+14\varepsilon} = b;$$

l'estimation suit en se rappelant que

$$|\alpha| = |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*|u.$$

b) Supposons maintenant plus généralement que  $1 \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq H_0$  et  $|(Q_j - Q_j^*)/(Q_{j-1} - Q_{j-1}^*)| \leq 2$ ; si  $H$  décrit les entiers de la forme  $2^j$  entre 1 et  $H_0$ , cet ensemble est approximativement la réunion sur  $j$  des ensembles

$$2^{j-1} \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq 2^j \quad , \quad |Q_j - Q_j^*| \leq 2|Q_{j-1} - Q_{j-1}^*|.$$

En posant  $H = 2^j$ ,

$$\begin{aligned} & \{H/2 \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq H, |Q_j - Q_j^*| \leq 2|Q_{j-1} - Q_{j-1}^*|\} \subset \\ & \{H/2 \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq H, |Q_j - Q_j^*| \leq 2H\}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & \iint_{\{H/2 \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq H, |Q_j - Q_j^*| \leq 2|Q_{j-1} - Q_{j-1}^*|\}} d\rho_k d\rho_k \\ & \ll \iint_{\{H/2 \leq |P_j - P_j^*| \leq H, |Q_j - Q_j^*| \leq 2H\}} d\rho_k d\rho_k \end{aligned}$$

en utilisant l'invariance de la mesure  $\rho_k$  par la transformation  $(a_1, \dots, a_j) \rightarrow (a_j, \dots, a_1)$  (proposition 4.1 b)) ainsi que (2) et (3).

Or les hypothèses  $H/2 \leq |P_j - P_j^*| \leq H$ ,  $|Q_j - Q_j^*| \leq 2H$  impliquent clairement,

$$\left| \frac{P_j}{Q_j} - \frac{P_j^*}{Q_j^*} \right| \leq \frac{|P_j - P_j^*|}{Q_j} + \frac{|Q_j - Q_j^*| P_j^*}{Q_j Q_j^*} \ll \frac{H}{Q^{1-2\varepsilon}};$$

donc, si nous conservons dans ce cas les estimations 14 de  $\kappa$  obtenues dans le cas a) d'existence d'un point stationnaire, nous obtenons une contribution de l'ordre de

$$\begin{aligned} & \iint_{\{H/2 \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq H, |Q_j - Q_j^*| \leq 2|Q_{j-1} - Q_{j-1}^*|\}} \kappa(Q_j, Q_{j-1}, Q_j^*, Q_{j-1}^*) d\rho_k d\rho_k \\ & \ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{Hu}} \iint_{\left| \frac{P_j}{Q_j} - \frac{P_j^*}{Q_j^*} \right| \leq H/Q} d\rho_k d\rho_k \\ & \ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{Hu}} (H/Q)^\delta \end{aligned}$$

en se souvenant de la propriété höldérienne de  $\mu$  (proposition 4.1 a)).

En sommant sur  $j$ , nous trouvons pour l'ensemble  $\{1 \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq H_0, |Q_j - Q_j^*| \leq 2|Q_{j-1} - Q_{j-1}^*|\}$  une contribution totale d'au plus

$$\frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{Q^\delta \sqrt{u}} H_0^{\delta-1/2}.$$

c) Si  $|Q_{J-1} - Q_{J-1}^*| \geq H_0$  cette fois, le même lemme fournit une contribution de l'ordre de

$$Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}/\sqrt{H_0u}.$$

3) a) Si  $Q_{J-1} \neq Q_{J-1}^*$  et  $|(Q_J - Q_J^*)/(Q_{J-1} - Q_{J-1}^*)| \geq 2$ , il n'y a pas de point stationnaire et nous sommes dans les conditions d'application du lemme 5.1 qui nous donne la majoration

$$(15) \quad \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{(|Q_J - Q_J^*| + |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*|)u}.$$

En effet il résulte des calculs précédents, en reprenant la minoration de  $|g(t)|$ , que

$$|f'(t)| \geq |\beta||g(t)| \gg uQ^{-3-6\varepsilon}|Q_J - Q_J^*|$$

et en dérivant  $f'(t) = (\alpha t + \beta)g(t)$  nous déduisons

$$\begin{aligned} |f''(t)| &\leq |\alpha||g(t)| + (|\alpha| + |\beta|)|g'(t)| \\ &\ll Q^{-3-6\varepsilon}|Q_J - Q_J^*|u + Q^{-3+14\varepsilon}(|Q_J - Q_J^*| + |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*|)u \\ &\ll Q^{-3+14\varepsilon}(|Q_J - Q_J^*| + |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*|)u, \end{aligned}$$

d'où la majoration annoncée.

Le cas  $|Q_{J-1} - Q_{J-1}^*| \geq H_0$  ayant été pris en compte à l'étape précédente, il suffit de considérer l'ensemble  $1 \leq |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*| \leq H_0, |(Q_J - Q_J^*)/(Q_{J-1} - Q_{J-1}^*)| \geq 2$  et la discussion se poursuit ainsi :

b) Supposons  $1 \leq |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*| \leq H_0$  et  $|Q_J - Q_J^*| \geq 2H_0$  ; la majoration du lemme 5.1 nous donne une contribution de

$$\frac{Q^{3+26\varepsilon}}{H_0u}.$$

c) Supposons  $|Q_J - Q_J^*| \leq 2H_0$  (ce qui implique  $1 \leq |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*| \leq H_0$ ) ; cet ensemble se décrit comme la réunion sur  $j$ , avec  $1 \leq 2^j \leq H_0$ , des ensembles

$$\{|Q_{J-1} - Q_{J-1}^*| \leq 2^j, 2^j \leq |Q_J - Q_J^*| \leq 2^{j+1}\}.$$

Utilisons alors les estimations (15) de  $\kappa$ , établies dans le cas a) sans point stationnaire, nous obtenons par des arguments similaires

$$\iint_{\{1 \leq |Q_{J-1} - Q_{J-1}^*| \leq H, H \leq |Q_J - Q_J^*| \leq 2H\}} \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) d\rho_k d\rho_k$$

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu} \iint_{\{1 \leq |p_j - p_j^*| \leq H, H \leq |Q_j - Q_j^*| \leq 2H\}} d\rho_k d\rho_k \\
&\ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu} \iint_{\left| \frac{p_j}{Q_j} - \frac{p_j^*}{Q_j^*} \right| \leq H/Q} d\rho_k d\rho_k \\
&\ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu} (H/Q)^\delta.
\end{aligned}$$

En sommant sur  $j$ , nous trouvons pour l'ensemble  $\{1 \leq |Q_{j-1} - Q_{j-1}^*| \leq H_0, |Q_j - Q_j^*| \geq 2|Q_{j-1} - Q_{j-1}^*|\}$  une contribution totale d'au plus

$$\frac{Q^{3+26\varepsilon}}{H_0^{1-\delta} Q^\delta u}.$$

Il s'agit en fait essentiellement du carré de la quantité précédente. Comme notre intégrale *est* inférieure à 1, nous pouvons négliger ce terme (aux  $Q^{26\varepsilon}$  près).

4) Enfin la dernière contribution qu'il faille ajouter vient du cas  $Q_{j-1} = Q_{j-1}^*$  mais  $Q_j \neq Q_j^*$ ; il se traite comme le cas 3) précédent et fournit un terme majorant du même ordre de grandeur.

Nous sommes en mesure de terminer la preuve du lemme : le choix optimal dans l'estimation est donné par  $H_0 = Q$ ; en négligeant la contribution des cas 3) et 4), cela nous donne

$$m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt \ll_N \frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}}$$

comme attendu.  $\square$

Pour estimer  $\hat{\mu}(u) = \int_0^1 F(t) d\mu(t)$ , nous pouvons maintenant utiliser le lemme 5.3 avec la fonction  $F$  et la mesure  $\mu$  : par construction, la fonction de répartition de  $\mu$  est höldérienne d'exposant  $\delta$  et  $M = 2\pi Q^{-2+4\varepsilon} u$  convient. Pour tout  $r > 0$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(u)| &\ll r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}) \\
&\ll r + r^\delta Q^{2\delta} u^{-\delta} + \frac{Q^{2\delta-2+4\varepsilon} u^{1-\delta}}{r^{3-\delta}} \left( \frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}} \right).
\end{aligned}$$

Nous choisissons  $Q$  de façon à égaliser les deux termes de l'estimation de  $m_2$ , ce qui revient à prendre  $Q^{2+4\delta}$  de l'ordre de  $u$ ; comme nous l'avons remarqué en effet, nous pouvons,  $u$  étant fixé, choisir  $J = kJ_0$  suffisamment grand, i.e.  $k$  suffisamment grand, pour rendre  $Q$  proche de  $u^{\frac{1}{2+4\delta}}$  : il suffit de prendre

$$k = \left[ \frac{\log u}{(2 + 4\delta)\sigma_m J_0} \right]$$

pour avoir

$$Q^{2+4\delta} = e^{(\sigma_m k J)(2+4\delta)} \leq u \leq Q^{2+4\delta} e^{(\sigma_m J_0)(2+4\delta)}.$$

Il en résulte

$$(16) \quad |\hat{\mu}(u)| \ll r + r^\delta u^{\delta/(1+2\delta)} u^{-\delta} + u^{\delta/(1+2\delta)} u^{1-\delta} r^{3-\delta} u^{(-\delta+13\varepsilon)/(1+2\delta)}$$

$$(17) \quad \ll r + r^\delta u^{-2\delta^2/(1+2\delta)} + u^{(\delta-2\delta^2+15\varepsilon)/(1+2\delta)} r^{3-\delta}.$$

Il reste à optimiser en  $r < 1$ . Choisissons-le de façon à égaliser les deux termes extrêmes qui sont dominants. En ignorant  $\varepsilon$ , cela revient à prendre  $r$  tel que

$$r = r^{3-\delta} u^{(\delta-2\delta^2)/(1+2\delta)}$$

ou encore

$$r = u^\eta \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\delta - 2\delta^2}{(4 - \delta)(1 + 2\delta)}$$

ce qui est licite si l'on suppose  $\delta > 1/2$ . En reportant dans (17), il vient

$$|\hat{\mu}(u)| \ll u^\eta + u^{-7\delta^2/[4(4-\delta)(1+2\delta)]} + u^\eta u^{15\varepsilon/(1+2\delta)} \ll u^{\eta+8\varepsilon},$$

car le second terme est négligeable.

Nous avons ainsi établi le théorème 1.4.

## 7. UNE QUESTION DE MONTGOMERY

Montgomery a posé dans [12] la question suivante (problème 45):

*Existe-t-il un nombre normal à quotients partiels bornés ?*

DÉFINITION 7.1. Un nombre  $x \in [0, 1)$  est normal en base  $q$  où  $q$  est un entier  $q \geq 2$  si et seulement si la suite  $(q^n x)$  est équirépartie modulo 1, ce qui, via le critère de Weyl, s'écrit :

$$\forall k \neq 0, \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(kq^n x) = 0.$$

Le théorème de Borel établit que si  $q \geq 2$ , presque tout nombre (au sens de la mesure de Lebesgue) est normal en base  $q$ . C'est le théorème ergodique appliqué à la transformation  $x \in [0, 1) \rightarrow qx \bmod 1$ . Qu'en est-il en restriction à un sous-ensemble de nombres irrationnels de  $[0, 1)$  ? Un outil est le suivant

THÉORÈME 7.2 ( Davenport-Erdős-LeVeque). Soit  $(s_n)$  une suite d'entiers et soit  $\mu$  une mesure de probabilité portée par  $[0, 1)$  telle que

$$\sum_{N \geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m, n=1}^N \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) < \infty,$$

pour tout entier  $k \neq 0$ , alors pour  $\mu$ -presque tout  $x \in [0, 1)$ , la suite  $(s_n x)$  est équirépartie modulo 1.

Démonstration. Fixons  $k \neq 0$ . Notons  $S_{N,k}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(ks_n x)$ , et  $I_{N,k} = \int |S_{N,k}(x)|^2 d\mu(x)$ . L'hypothèse n'est autre que

$$\sum_{N \geq 1} \frac{I_{N,k}}{N} < +\infty, \quad \forall k \neq 0.$$

Nous utilisons un lemme classique sur les séries :

LEMME 7.3. Soit  $(x_n)$  une suite de réels  $\geq 0$  telle que  $\sum_{n > 0} x_n/n < \infty$ . Alors il existe une suite d'entiers  $(N_r)$  telle que :

- a)  $\sum_r x_{N_r} < \infty$  ;
- b)  $\lim_r N_{r+1}/N_r = 1$ .

Nous omettons provisoirement l'indice  $k$  et nous appliquons le lemme à la suite  $(I_N)$ . Il existe une suite  $(N_r)$  telle que

$$\sum_r I_{N_r} = \int \sum_r |S_{N_r}(x)|^2 d\mu(x) < \infty.$$

En particulier,  $\sum_r |S_{N_r}(x)|^2 < \infty$   $\mu$ -presque partout et  $S_{N_r}(x) \rightarrow 0$   $\mu$ -presque partout. Maintenant nous interpolons :

$$\begin{aligned} \text{si } N_r \leq N \leq N_{r+1}, \quad NS_N - N_r S_{N_r} &= \sum_{N_r \leq n < N} e(ks_n x), \text{ et} \\ |NS_N - N_r S_{N_r}| &\leq \sum_{N_r \leq n < N} 1 = N - N_r \leq N_{r+1} - N_r, \text{ de sorte que} \\ N|S_N| &\leq N_r |S_{N_r}| + N_{r+1} - N_r \text{ et } |S_N(x)| \leq |S_{N_r}(x)| + \frac{N_{r+1} - N_r}{N}. \end{aligned}$$

Par la propriété b) du lemme,  $S_N(x)$  tend vers 0 pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , ce qui prouve l'équirépartition modulo 1 de la suite  $(s_n x)$  pour  $\mu$ -presque tout  $x$ .  $\square$

COROLLAIRE 7.4. Soit  $X$  un ensemble de réels portant une mesure de probabilité  $\mu$  telle que  $\hat{\mu}(n) = O(|n|^{-\delta})$  où  $\delta > 0$ .

Alors, pour toute suite  $(s_n)$  strictement croissante d'entiers, la suite  $(s_n x)$  est équirépartie modulo 1 pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 7.2 avec  $s_n$  et  $\mu$  la mesure portée par  $X$ . Or si  $k \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^N \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) &= N + \sum_{m,n \leq N, m \neq n} \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) \\ &\leq N + C \sum_{m,n \leq N, m \neq n} |k(s_n - s_m)|^{-\delta} \\ &\leq N + 2C \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} |(s_n - s_m)|^{-\delta}. \end{aligned}$$

Lorsque  $m > n$ ,  $s_m - s_n = s_m - s_{m-1} + s_{m-1} - \dots + s_{n+1} - s_n \geq m - n$ , et

$$\sum_{m,n=1}^N |\hat{\mu}(k(s_n - s_m))| \leq N + 2C \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} (m - n)^{-\delta}; \text{ maintenant,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} (m - n)^{-\delta} &= \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} n^{-\delta} \\ &\leq N \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\delta} = O(N^{2-\delta}). \end{aligned}$$

Finalement

$$\sum_{N \geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m,n=1}^N |\hat{\mu}(k(s_n - s_m))| < \infty$$

puisque  $\delta > 0$ . □

Nous en déduisons le résultat suivant qui contient celui de Baker :

**COROLLAIRE 7.5.** *Soit  $q$  un entier  $\geq 2$  et  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 1$  contenant au moins deux éléments; il existe une infinité de  $x \in F(\mathcal{A})$  normal en base  $q$  dès que la dimension de Hausdorff de  $F(\mathcal{A})$  est  $> 1/2$ .*

*Démonstration.* Soit  $1/2 < \delta < \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A})$  et  $0 < \varepsilon < \frac{\delta(2\delta-1)}{8(2\delta+1)(4-\delta)}$ . Il suffit d'appliquer le corollaire 7.4 avec  $s_n = q^n$  et  $\mu = \mu_{\varepsilon, \delta}$  la mesure de Kaufman portée par  $F(\mathcal{A})$ , donnée par le théorème 1.4. □

## 8. COMMENTAIRES ET QUESTIONS

Les mesures de Kaufman ainsi construites possèdent deux propriétés importantes: le comportement höldérien de la fonction de répartition et le

comportement asymptotique précis de la transformée de Fourier. En fait la seconde propriété, fondamentale ici, découle en partie de la première, mais le comportement höldérien joue un rôle primordial dans l'approche de la conjecture de Littlewood par Pollington & Velani [14].

Les ensembles  $F(\mathcal{A})$ ,  $|\mathcal{A}| \geq 2$ , sont donc des ensembles de multiplicité stricte, lorsqu'ils possèdent une dimension de Hausdorff  $> 1/2$ . On peut se demander si la borne  $1/2$  est infranchissable ou si elle relève au contraire de la construction. La propriété pour un ensemble d'être de multiplicité peut paraître stable: un résultat fameux de Salem & Zygmund (voir [10]) établit, pour des ensembles de type Cantor à rapport de dissection  $\xi$ , l'équivalence:

$$E \text{ est de multiplicité} \iff \frac{1}{\xi} \notin S$$

où  $S$  est l'ensemble des nombres de Pisot. L'ensemble  $S$  étant fermé, la propriété est stable pour les petites variations de  $\xi$ . Qu'en est-il pour les ensembles du type  $F(\mathcal{A})$ ? Ceci amène naturellement les questions:

**Questions:** Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 1$  tel que  $|\mathcal{A}| \geq 2$  et  $\dim_{\text{H}} F(\mathcal{A}) = d$ .

1.  $F(\mathcal{A})$  est-il encore de multiplicité?
2.  $F(\mathcal{A})$  porte-t-il une mesure dont la décroissance à l'infini est en  $\mathcal{O}(1/(\log |n|)^\delta)$  pour un  $\delta > 1$ ?

Le lien entre la dimension de Hausdorff et la propriété de multiplicité n'est pas clairement établie puisque des ensembles de dimension de Hausdorff positive, tel l'ensemble triadique de Cantor, sont annulés par toute mesure de  $M_0$  ([10]) tandis que certains autres, de dimension nulle, sont de multiplicité, ce qui est assez frappant ([2],[3]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER A.: Non publié, cf référence [12] ci-dessous, problème numéro 45.
- [2] BLUHM C.: *Liouville numbers, Rajchman measures and small Cantor sets* Proc. A.M.S. , (2000) **128**, 2637–2640.
- [3] BUGEAUD Y.: *Nombres de Liouville et nombres normaux* Preprint (2002).
- [4] GOOD I. J.: *The fractional dimensional theory of continued fractions* Proc. Cambridge Phil. Soc. (1941) **37**, 199–228.
- [5] HARDY G.H., WRIGHT E.M.: *An introduction to the theory of numbers* Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1979.
- [6] HENSLEY D.: *The Hausdorff dimensions of some continued fraction Cantor sets* J. Number Th. (1989) **33**, 182–198.

- [7] IVASHEV-MUSATOV O.S.: *M-Mengen und h-Mae* Mat. Zametki (1968) **3**, 441–447.
- [8] KAUFMAN R.: *Continued fractions and Fourier transforms* Mathematika (1980) **27**, 262–267.
- [9] KAHANE J.P., SALEM. R.: *Distribution modulo 1 and sets of uniqueness* Bull. Am. Math. Soc. , (1964) **70**, 259–261.
- [10] KAHANE J.P., SALEM. R.: *Ensembles parfaits et séries trigonométriques* Hermann, nouvelle édition 1994.
- [11] LYONS R.: *The measure of non-normal sets* Invent. math. , (1986) **83**, 605–616.
- [12] MONTGOMERY H. L.: *Ten lectures on the interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis* CBMS regional conf. series in Math. 84, A.M.S. Providence, RI, 1994.
- [13] MORAN W., POLLINGTON P.: *The discrimination theorem for normality to non-integer bases* Israel J. Math. (1997) **100**, 339–347.
- [14] POLLINGTON P., VELANI S.: *On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Littlewood's conjecture* Acta Math. (2000) **185**, 287–306.
- [15] ROGERS C. A.: *Some sets of continued fractions* Proc. London Math. Soc. (1964) **14**, 29–44.

Martine Queffelec et/ou Olivier Ramaré,  
UMR 8524,  
Université Lille I,  
59 655 Villeneuve d'Ascq Cédex.

Martine.Queffelec@agat.univ-lille1.fr  
Olivier.Ramare@agat.univ-lille1.fr