PROPRIÉTÉS DE DENSITÉ DE L'ENSEMBLE DES ENTIERS TELS QUE $\psi(r) - r > 0$

Olivier Ramaré (en collaboration avec Jerzy Kaczorowski)

I. Introduction.

Pour illustrer mon propos, je vais rappeler deux problèmes et résultats attenants.

Premier problème :

Nous regardons ici

$$\mathcal{A}_y = \{ r \in \mathbb{N} \quad / \quad \psi(r) - r > y\sqrt{r} \ \} \qquad (y \in \mathbb{R})$$

et nous nous demandons ce que nous pouvons dire sur sa "densité" (logarithmique, naturelle, ...).

En 1914, Littlewood montrait $A_y(R) = \Omega(R^{1/2} \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} R)$ ce qui est resté inchangé jusqu'en 1994 où Kaczorowski obtenait $A_y(R) = \Omega_\varepsilon(R^{1-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

La preuve de Littlewood (ou celle postérieure d'Ingham) se décompose en deux : soit l'hypothèse de Riemann est fausse et le résultat découle d'un théorème Ω du type de Landau, soit l'hypothèse de Riemann est vraie et la preuve devient difficile.

Nous nous restreignons ici au cas où l'hypothèse de Riemann est vérifiée et proposons une description de la situation.

Second problème :

Posons

$$N(R; 1, 3, 4) = \#\{ r \le R, \quad \psi(r; 4, 1) > \psi(r; 4, 3) \ \}.$$

Turan & Knapowski (1962) ont conjecturé que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R; 1, 3, 4)}{R} = 0$$

pour confirmer une assertion de Tchebischev disant qu'il y avait plus de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 qu'à 1 modulo 4. Un tel résultat restait largement hors d'atteinte puisque l'on n'avait pas de méthode donnant accès à la densité naturelle, jusqu'en 1992 où Kaczorowski obtenait (sous GRH) :

$$0 < \liminf \frac{N(R; 1, 3, 4)}{R} \le 0.0000106$$

$$0.040540454 \le \limsup \frac{N(R; 1, 3, 4)}{R} < 1.$$

les deux inégalités larges datant en fait de 1995.

La densité naturelle n'existe donc pas ! Que se passe-t'il ?

II. Fonctions presque-périodiques.

Il nous faut faire un détour par les fonctions presque périodiques pour pouvoir exposer nos résultats. Si f est une fonction sur $\mathbb{R}$, la fonction f_τ est définie par $f_\tau(t) = f(t + \tau)$. Par ailleurs un sous-ensemble E de la droite réelle est dit relativement dense (r.d.) si il existe un réel positif ℓ tel que tout intervalle de longueur $\ge \ell$ contienne au moins un point de E. Ce sont ces ensembles qui vont généraliser les progressions arithmétiques.

Une fonction f de $C^0(\mathbb{R})$ est dite uniformément presque périodique (**Uap**) si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(1) f est limite uniforme de combinaisons linéaires de $e^{i\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
(2) $\{f_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact pour $\|\cdot\|_\infty$.
(3) $\forall \varepsilon > 0$, $UE(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R}, \|f - f_\tau\|_\infty \le \varepsilon\}$ est r.d.

Nous introduisons aussi deux autres notions de fonctions presque périodiques.

Pour $\mathbf{S^2ap}$, i.e. presque périodique au sens de Stepanoff, il suffit de remplacer le Banach $(C^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ par $(L^2_{loc}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{S^2})$, où la (semi-)norme est définie par

$$\|f\|_{S^2} = \max_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Pour $\mathbf{W^2ap}$, i.e. presque périodique au sens de Weyl, il suffit de remplacer le Banach $(C^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ par $(L^2_{loc}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{W^2})$, où la (semi-)norme est définie par

$$\|f\|_{W^2} = \lim_{V\to\infty} \max_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{V}\int_x^{x+V} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Une propriété commune aux fonctions Uap et S^2 ap :

Supposons que l'on calcule f entre 0 et 1 et que son graphe ressemble à

On peut alors retrouver cette forme de courbe à ε près aussi loin que l'on veut, le long d'un ensemble r.d. On exporte donc le comportement au bout d'un temps fini jusqu'à l'infini.

En ce qui concerne les fonctions $\mathrm{W^2ap}$, ce n'est plus vrai (parce que le V dépend de ε) : on peut modifier le comportement sur un intervalle fini sans changer $\|f\|_{W^2}$.

III. Principe.

Posons

$$\begin{cases} v>0, & \phi(v) = e^{-v/2}\left[e^v - {\sum_{n\le e^v}}' \Lambda(n) - \frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-e^{-2v}) - \mathrm{Log}\, 2\pi\right] \\ v<0, & \phi(v) = e^{-v/2}\left[v + {\sum_{n\le e^v}}' \frac{\Lambda(n)}{n} + e^v + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(\frac{1-e^v}{1+e^v}) + C\right] \end{cases}$$

où C est la constante d'Euler.

Nous pouvons alors déduire d'un lemme de Kaczowski de 1992 le théorème suivant :

Théorème. *ϕ est S^2 ap.*

Il montre en fait que

$$\phi(v) = S^2 \lim_{u\to 0^+} \sum_{\gamma>0} \frac{e^{(v+iu)\rho}}{\rho}.$$

(1) Kaczorowski utilisait cette propriété sans le dire et n'utilisait donc pas le théorème structural de Stepanoff.
(2) Quand on écrit ce théorème sous cette forme et qu'on lui adjoint la remarque sur l'exportation des comportements, on voit à peu près comment obtenir des résultats sur les densités naturelles.

Nous pouvons revenir aux problèmes de densité. Pour f $\mathrm{S^2ap}$ à valeurs réelles, posons

$$\nabla_y(f,T) = e^{-T}\int_{-\infty}^{T} \mathbb{1}_{\{f(t)>y\}} e^t dt.$$

Alors $A_y(R)/R \simeq \nabla_y(\phi, \mathrm{Log}\, R)$. Nous émettons la conjecture suivante :

Conjecture. *$\nabla_y(\phi,\cdot)$ est Uap.*

Sauf peut-être pour y appartenant à un ensemble dénombrable. Puisque cette fonction est uniformément continue (lipschitzienne), montrer qu'elle est $\mathrm{S^2ap}$ impliquerait qu'elle est Uap, à cause d'un théorème de Bochner.

IV. Résultats.

Théorème B. *Soit f S^2ap à valeurs réelles. Il existe un ensemble au plus dénombrable $\mathcal{Y}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{Y}$, la fonction $\nabla_y(\phi, \cdot)$ est W^2ap.*

Fonction admissible :

(1) $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w \nearrow$, C^1 par morceaux, dans $L^1(]-\infty, 0]$.
(2) $W(T) = \int_{-\infty}^{T} w(t)dt \to \infty$ $(T \to \infty)$.

Corollaire. *Soit w admissible telle que $w(t) = o(W(t))$ quand $t \to +\infty$ et f comme dans le théorème précédent. Pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Y}$, on a*

$$\frac{1}{W(T)} \int_{-\infty}^{T} \mathbb{1}_{\{f(t)>y\}} w(t)dt \to \delta_y \qquad (T \to +\infty).$$

On rate juste $w(t) = e^t$!! Mais on fait mieux que la densité naturelle ($w(t) = 1$, cf Rubinstein & Sarnak 1994).

Théorème C.

$$\forall v \in \mathbb{R},\ \forall I \text{ intervalle borné},\ \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists \alpha > 0,\ \forall v' \in \mathbb{R},\ \left[\|\phi_v - \phi_{v'}\|_{S^2} \leq \alpha \implies \max_{t \in I} \left| \nabla_y(\phi, v+t) - \nabla_y(\phi, v'+t) \right| \leq \varepsilon \right]$$

Explications :

Supposons que $\nabla_y(\phi, \cdot)$ ressemble à

Alors on retrouve ce comportement jusqu'à l'infini :

Ces fenêtres ne se recoupent pas nécessairement...

V. Éléments de démonstration.