

# SOME EULER PRODUCTS WITH HIGH ACCURACY

S. ETTAHRI, O. RAMARÉ, AND L. SUREL

ABSTRACT. (File `SomeEulerProducts-02.tex`)

We proposed in [1] an algorithm to compute some Euler products with high precision. Here are some examples for  $s = 2$  and small  $q$ 's. We decided to produce 100 decimal digits each time. Each computation took at most five seconds and we selected uniformly  $P = 100$ .

**Modulo 3.**

$$\prod_{p \equiv 1[3]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.03401\ 48754\ 14341\ 88053\ 90306\ 44413\ 04762\ 85789\ 65428\ 48909$$

$$98864\ 16825\ 03842\ 12222\ 45871\ 09635\ 80496\ 21707\ 98262\ 05962 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 2[3]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.41406\ 43908\ 92147\ 63756\ 55018\ 19079\ 82937\ 99076\ 95069\ 39316$$

$$21750\ 39924\ 96242\ 39281\ 06992\ 08849\ 94537\ 54858\ 50247\ 51142 \dots$$

**Modulo 4.**

$$\prod_{p \equiv 1[4]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.05618\ 21217\ 26816\ 14173\ 79307\ 65316\ 21989\ 05875\ 80425\ 46070$$

$$80120\ 04306\ 19830\ 27928\ 16062\ 22693\ 04895\ 12958\ 37291\ 59718 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 3[4]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.16807\ 55854\ 10514\ 28866\ 96967\ 37064\ 04040\ 13646\ 79021\ 45554$$

$$79928\ 40563\ 68111\ 38106\ 59377\ 71094\ 66904\ 07472\ 79588\ 48702 \dots$$

**Modulo 5.**

$$\prod_{p \equiv 1[5]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.01091\ 51606\ 01019\ 52260\ 49565\ 84289\ 51492\ 09845\ 38627\ 58173$$

$$85237\ 32024\ 20089\ 25161\ 37424\ 56726\ 37093\ 96197\ 69455\ 89218 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 2,3[5]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.55437\ 60727\ 20889\ 22081\ 75902\ 82565\ 55177\ 56056\ 30147\ 34257$$

$$40072\ 50077\ 94457\ 39239\ 00871\ 38641\ 44091\ 80733\ 87878\ 70683 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 4[5]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00496\ 03239\ 22297\ 55899\ 37496\ 24810\ 25218\ 47955\ 10294\ 18802$$

$$28801\ 99528\ 37852\ 15071\ 27700\ 70076\ 98854\ 32491\ 36118\ 00619 \dots$$

**Modulo 7.**

$$\prod_{p \equiv 1[7]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00222\ 95338\ 19740\ 42627\ 18641\ 59138\ 22019\ 24486\ 37565\ 40128$$

$$87922\ 82973\ 79678\ 21741\ 90308\ 08041\ 42707\ 36575\ 28295\ 76151 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 2,4[7]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.34984\ 62543\ 65273\ 20787\ 74772\ 44978\ 62277\ 76508\ 69021\ 24860$$

$$12031\ 69999\ 35719\ 21654\ 93824\ 75777\ 02051\ 36300\ 53459\ 76601 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 3,5[7]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.18274\ 26007\ 67364\ 09208\ 00286\ 83933\ 15918\ 51718\ 05360\ 46335$$

$$82633\ 06344\ 66854\ 90324\ 90537\ 21799\ 81486\ 90001\ 86365\ 91391 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 6[7]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00705\ 20326\ 03074\ 04805\ 67193\ 52428\ 88870\ 69289\ 36714\ 73687$$

$$58335\ 65893\ 11634\ 74829\ 60947\ 12069\ 41243\ 26265\ 99553\ 53536 \dots$$

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11Y60, Secondary 11N13, 05A.  
*Key words and phrases.* Euler products.

**Modulo 8.**

$$\prod_{p \equiv 1[8]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00483\ 50650\ 34191\ 18711\ 83598\ 31169\ 10411\ 95979\ 07317\ 54340 \\ 88789\ 55156\ 06711\ 74639\ 62051\ 31056\ 35207\ 32105\ 88068\ 58783 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 3[8]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.13941\ 87771\ 08211\ 51502\ 70589\ 30773\ 34020\ 88725\ 59961\ 09629 \\ 48302\ 25821\ 27411\ 02101\ 65577\ 60742\ 91446\ 59374\ 91512\ 33349 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 5[8]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.05109\ 99849\ 42183\ 30793\ 68775\ 56006\ 33505\ 68012\ 01018\ 45817 \\ 85080\ 59912\ 94207\ 39729\ 30485\ 58783\ 38889\ 50479\ 59255\ 34495 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 7[8]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.02515\ 03739\ 25759\ 17991\ 61954\ 35560\ 94158\ 79433\ 11002\ 76024 \\ 41530\ 69566\ 94982\ 17644\ 97960\ 41007\ 90076\ 26943\ 14236\ 43529 \dots$$

**Modulo 9.**

$$\prod_{p \equiv 1[9]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00403\ 38350\ 51288\ 79798\ 24781\ 19924\ 74748\ 94825\ 22895\ 79877 \\ 28822\ 86701\ 42359\ 63409\ 37977\ 93839\ 33608\ 94316\ 94860\ 37141 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 2,5[9]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.40783\ 70719\ 96538\ 05093\ 52684\ 03433\ 79823\ 18382\ 56159\ 80878 \\ 18858\ 21039\ 93308\ 74959\ 08486\ 21687\ 68292\ 75777\ 90984\ 34897 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 4,7[9]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.02986\ 05876\ 77826\ 18491\ 88642\ 35135\ 21663\ 16312\ 01666\ 87293 \\ 15881\ 63094\ 56123\ 55333\ 65628\ 89969\ 28513\ 96515\ 60005\ 36245 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 8[9]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00442\ 33235\ 64550\ 15978\ 66082\ 58390\ 58205\ 39661\ 19672\ 30788 \\ 17744\ 79626\ 23017\ 18753\ 96410\ 76663\ 34579\ 95134\ 16501\ 66760 \dots$$

**Modulo 11.**

$$\prod_{p \equiv 1[11]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00232\ 82408\ 97736\ 52733\ 78057\ 92469\ 42582\ 04345\ 78064\ 14879 \\ 23124\ 99895\ 44150\ 38255\ 72926\ 07516\ 98484\ 87460\ 03110\ 08712 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 2,6,7,8[11]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.38240\ 11448\ 05788\ 71773\ 39824\ 35954\ 70441\ 91351\ 16435\ 84157 \\ 13863\ 06101\ 70250\ 01900\ 59181\ 34321\ 25138\ 72741\ 06748\ 64688 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 3,4,5,9[11]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.17640\ 19224\ 41514\ 71776\ 56838\ 81699\ 54785\ 03151\ 42210\ 45715 \\ 72819\ 38133\ 44304\ 81040\ 93008\ 74341\ 67383\ 61950\ 21979\ 26318 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 10[11]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00079\ 37707\ 14740\ 00680\ 22327\ 79981\ 38075\ 30993\ 79972\ 81556 \\ 86828\ 01966\ 59824\ 89326\ 65924\ 56171\ 20791\ 11742\ 28212\ 98769 \dots$$

**Modulo 12.**

$$\prod_{p \equiv 1[12]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00761\ 32452\ 14144\ 96616\ 93493\ 12247\ 73229\ 37895\ 47142\ 90433 \\ 17666\ 43368\ 44819\ 49208\ 97861\ 01855\ 78530\ 60579\ 11129\ 80649 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 5[12]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.04820\ 19036\ 00769\ 93683\ 49374\ 34895\ 79267\ 34804\ 13674\ 49481 \\ 52581\ 07376\ 14495\ 24161\ 71571\ 43788\ 23594\ 04990\ 88566\ 94968 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 7[12]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.02620\ 21468\ 31233\ 70070\ 72018\ 66966\ 36157\ 23611\ 09321\ 31334 \\ 95148\ 10400\ 66496\ 54603\ 29393\ 86454\ 19299\ 91782\ 63867\ 91609 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 11[12]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.01177\ 86368\ 50332\ 58370\ 51194\ 10267\ 33127\ 80584\ 01230\ 89520 \\ 87028\ 35959\ 40756\ 15016\ 41704\ 56300\ 54442\ 19591\ 32980\ 62727 \dots$$

**Modulo 13.**

$$\prod_{p \equiv 1[13]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00065\ 68661\ 98289\ 66605\ 74722\ 84730\ 77197\ 91777\ 00717\ 07399 \\ 33554\ 44837\ 12988\ 36602\ 52536\ 84343\ 79642\ 73590\ 88077\ 31673 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 2,6,7,11[5]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.38005\ 21671\ 19142\ 93623\ 73358\ 95833\ 59312\ 88490\ 63922\ 76216 \\ 00813\ 27801\ 96170\ 83570\ 07037\ 00666\ 02382\ 19997\ 07055\ 85939 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 3,9[13]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.12706\ 12738\ 77030\ 37596\ 05291\ 90459\ 70008\ 03562\ 53668\ 12081 \\ 48604\ 51380\ 13290\ 89754\ 69987\ 12664\ 24897\ 64722\ 52303\ 29593 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 4,10[13]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00628\ 51383\ 85264\ 35654\ 79220\ 78630\ 88874\ 03212\ 24553\ 50607 \\ 59162\ 40959\ 77321\ 01204\ 89381\ 53735\ 74182\ 12805\ 59112\ 51753 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 5,8[13]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.04384\ 79529\ 58163\ 48325\ 64453\ 12135\ 62867\ 13038\ 05109\ 49630 \\ 56435\ 71738\ 46465\ 77456\ 29690\ 71263\ 29350\ 03766\ 17988\ 29979 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 12[13]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00019\ 47228\ 43353\ 09720\ 12251\ 29852\ 70839\ 19867\ 65951\ 93000 \\ 49665\ 62593\ 02690\ 92410\ 34974\ 82067\ 06364\ 88262\ 34074\ 53639 \dots$$

**Modulo 15.**

$$\prod_{p \equiv 1[15]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00148\ 97422\ 73492\ 93695\ 62022\ 82152\ 29804\ 06202\ 71822\ 24183 \\ 85046\ 92061\ 06460\ 33370\ 47461\ 16170\ 34094\ 66709\ 13158\ 03303 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 2,8[15]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.34246\ 04551\ 54995\ 30799\ 30100\ 63345\ 72665\ 24298\ 78723\ 72380 \\ 96524\ 03928\ 73058\ 62457\ 83670\ 07480\ 09151\ 10334\ 06933\ 31380 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 4[15]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00317\ 84700\ 07976\ 58539\ 76886\ 54009\ 35749\ 55893\ 69169\ 67588 \\ 37351\ 26980\ 45622\ 46578\ 84368\ 96080\ 28447\ 94669\ 19055\ 69351 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 7,13[15]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.02920\ 54524\ 88970\ 30487\ 46169\ 68199\ 34620\ 53972\ 85734\ 20801 \\ 87576\ 81344\ 73863\ 39397\ 51683\ 30560\ 76995\ 20714\ 09590\ 99521 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 11[15]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00941\ 13977\ 70415\ 34074\ 11140\ 07967\ 71715\ 31828\ 38502\ 83487 \\ 41065\ 68439\ 10926\ 98429\ 51008\ 47969\ 06005\ 15885\ 02338\ 55701 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 14[15]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00177\ 62082\ 89544\ 73626\ 10915\ 43079\ 96283\ 15610\ 57061\ 98467 \\ 19519\ 14691\ 39870\ 02036\ 75682\ 26376\ 90944\ 75824\ 69831\ 96091 \dots$$

**Modulo 16.**

$$\prod_{p \equiv 1[16]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00378\ 12963\ 11174\ 37714\ 94711\ 72280\ 61816\ 45658\ 26785\ 28441 \\ 57268\ 63521\ 48911\ 54134\ 99502\ 87194\ 19254\ 71100\ 10645\ 46873 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 3,11[16]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.13941\ 87771\ 08211\ 51502\ 70589\ 30773\ 34020\ 88725\ 59961\ 09629 \\ 48302\ 25821\ 27411\ 02101\ 65577\ 60742\ 91446\ 59374\ 91512\ 33349 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 5,13[16]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.05109\ 99849\ 42183\ 30793\ 68775\ 56006\ 33505\ 68012\ 01018\ 45817 \\ 85080\ 59912\ 94207\ 39729\ 30485\ 58783\ 38889\ 50479\ 59255\ 34495 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 7[16]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.02325\ 48781\ 97407\ 08067\ 95776\ 68614\ 06977\ 00372\ 89157\ 54600 \\ 19844\ 97929\ 83355\ 91253\ 99909\ 55714\ 70317\ 40567\ 85934\ 05044 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 9[16]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00104\ 97991\ 21471\ 31637\ 83963\ 95210\ 10070\ 68052\ 00181\ 57035 \\ 98663\ 81304\ 47589\ 89310\ 55217\ 86340\ 51978\ 44383\ 63621\ 58657 \dots$$

$$\prod_{p \equiv 15[16]} (1 - p^{-2})^{-1} = 1.00185\ 24179\ 73996\ 13159\ 93578\ 02219\ 51678\ 26622\ 68517\ 41444 \\ 99996\ 30754\ 09303\ 19958\ 16127\ 21985\ 97936\ 04820\ 77136\ 34947 \dots$$

## REFERENCES

- [1] S. Ettahri, O. Ramaré, and L. Surel. “Fast multi-precision computation of some Euler products”. In: *Submitted* (2019), 23p (cit. on p. 1).

AIX MARSEILLE UNIV, CNRS, CENTRALE MARSEILLE, I2M, MARSEILLE, FRANCE  
*Email address:* `salma.ettahri@etu.univ-amu.fr`

CNRS / AIX MARSEILLE UNIV. / CENTRALE MARSEILLE, I2M, MARSEILLE, FRANCE  
*Email address:* `olivier.ramare@univ-amu.fr`

AIX MARSEILLE UNIV, CNRS, CENTRALE MARSEILLE, I2M, MARSEILLE, FRANCE  
*Email address:* `leon.surel@etu.univ-amu.fr`