**Remarques préliminaires sur la preuve de Plünnecke-Ruzsa.**

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-ensembles finis d'un groupe abélien et $h$ un entier naturel $\geq 1$ fixé. Nous considérons le graphe formé sur les ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, ... , $\mathcal{A}+h\mathcal{B}$ où l'on met une arête ("edge") entre $x \in \mathcal{A}+i\mathcal{B}$ et $y \in \mathcal{A}+(i+1)\mathcal{B}$ si $y-x \in \mathcal{B}$.

Nous appellerons un tel graphe un graphe d'addition. Ce sont de tels objets que nous souhaitons étudier. Notons dès à présent que le nombre d'arêtes issues de chaque point de $\mathcal{A}+i\mathcal{B}$ est constant et égal à $|\mathcal{B}|$ si $i<h$. Par contre le nombre d'arêtes arrivant en un point est une quantité délicate liée à la structure additive de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Le cas $\mathcal{B}=\emptyset$ est intéressant par sa simplicité.

Dans l'étude que nous proposons, nous souhaitons inclure aussi les graphes obtenus à partir des graphes d'addition *en inversant* les flèches. Nous avons alors recours à la généralisation suivante.

**Graphe $(h+1)$-ponté ("bridging graph").**

Par graphe $(h+1)$-ponté, nous entendons un $(h+2)$-uplet $G$ constitué de $(h+1)$ ensembles $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$, ... $\mathcal{S}_h$ (les ilôts, "islets") et d'un ensemble d'arêtes orientées, de telle sorte que toutes les arêtes issues de $\mathcal{S}_i$ arrivent dans $\mathcal{S}_{i+1}$.

Etant donné deux graphes $G$ et $G'$ tous deux $(h+1)$-pontés, nous définissons leur produit $G{\cdot}G'$ comme étant le graphe $(h+1)$-parti linéaire formé de la façon suivante. Les ilôts sont les $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}'_i$ et les points $(x,x') \in \mathcal{S}_i \times \mathcal{S}'_i$ et $(y,y') \in \mathcal{S}_{i+1} \times \mathcal{S}'_{i+1}$ sont liés si les points $x$ et $x'$ d'une part et $y$ et $y'$ de l'autre sont liés dans leur graphe d'origine.

Nous nous intéressons aux coefficients d'agrandissement de ces graphes, coefficients qui sont définis de la façon suivante. Si $\mathcal{X}$ est une partie de $\mathcal{S}_0$, notons $Im(\mathcal{X},\mathcal{S}_i)$ l'ensemble des points $y$ de $\mathcal{S}_i$ tels qu'il existe un chemin entre un point de $\mathcal{X}$ et $y$. Nous posons alors

$$D_i(G)=\min\left\{\frac{|Im(\mathcal{X},\mathcal{S}_i)|}{|\mathcal{X}|}, \mathcal{X}\subset\mathcal{S}_i\right\}.$$

L'une des propriétés remarquables de ces coefficients est leur multiplicativité, nommément

$$D_i(G\cdot G')=D_i(G)D_i(G').$$

Dans le cas des graphes d'addition, d'un point $x$ de $\mathcal{S}_0$ partent $|\mathcal{B}|^i$ chaines arrivant dans $\mathcal{S}_i$ ce qui suggère que $D_i(G)$ doit être comparé à $|\mathcal{B}|^i$, ou dans le cas général que $D_i^{1/i}(G)$ et $D_j^{1/j}(G)$ sont des grandeurs comparables.

**Graphe $(h+1)$-ponté commutatif.**

Il nous faut encore ajouter une notion pour modéliser correctement les graphes d'addition. Nous dirons qu'un graphe $(h+1)$-ponté est commutatif s'il vérifie en outre les deux propriétés suivantes pour tout entier $k\geq 1$ :

(1) Si $x\to y\to z_l$, $1\leq l\leq k$, où les $z_l$ sont distincts, alors on peut trouver $y_1,\ldots,y_k$ distincts tels que $x\to y_l\to z_l$, $1\leq l\leq k$.

(2) Si $w_l\to x\to y$, $1\leq l\leq k$, où les $w_l$ sont distincts, alors on peut trouver $x_1,\ldots,x_k$ distincts tels que $w_l\to x_l\to y$, $1\leq l\leq k$.

Nous vérifions sans peine qu'un graphe d'addition est commutatif. Nous avons alors le résultat suivant qui est le point clé de la preuve de Plünnecke :

*Dans un graphe $(h+1)$-ponté commutatif $G$, la suite $D_i^{1/i}(G)$ est décroissante.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons multiplier une puissance convenable de $G$ par des graphes $(h+1)$-pontés commutatifs connus de façon à se ramener à un cas simple similaire à ce qui se passe lorsque l'on considére le graphe d'addition formé sur un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque et $\mathcal{B} = \emptyset$ (ce qui constitue le cas "lisse").

Dans ce cas "lisse", nous montrerons que si $D_h(G) \geq 1$, c'est à dire si l'image dans $\mathcal{S}_h$ de toute partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{S}_0$ est de cardinal au moins aussi grand que $|\mathcal{X}|$, alors il existe $|\mathcal{S}_0|$ chemins disjoints de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathcal{S}_h$, ce qui implique $D_j(G) \geq 1$. Ce résultat est d'autant plus précis que l'on est proche du cas "lisse". La lecture de la preuve montre que l'hypothèse de commutativité n'est utilisée que pour montrer que les $\mathcal{S}_j$ intermédiares entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_h$ n'ont pas d'influence. Par conséquent pour regarder ce qui se passe entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_h$, nous pouvons supposer $h = 1$. Nous reconnaissons alors un résultat classique qui date à peu près de 1930 et qui est connu sous le nom de théorème de König-Hall. Ce résultat est optimal.

Appliqué à un graphe d'addition et moyennant de supposer que tous les $D_i$ sont supérieurs à 1, ce résultat signifie que l'accroissement de $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ est *plus important* que celui de $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_h$. Ceci conduit à deux types d'applications. Tout d'abord, en supposant que l'accroissement en allant jusqu'à $\mathcal{S}_h$ est grand, on en déduit que l'accroissement de $\mathcal{S}_0$ à $\mathcal{S}_1$ l'est d'autant plus ; ce qui conduit au théorème de Plünnecke (*Si $\mathcal{B}$ est une base d'ordre $h$ et $\mathcal{A}$ est une suite d'entiers, alors* $\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \geq \sigma(\mathcal{A})^{1-\frac{1}{h}}$). Le second cas d'application correspond aux cas de théorèmes "type Freiman", où nous supposons que l'accroissement de $\mathcal{S}_0$ à $\mathcal{S}_1$ est petit, ce qui implique que l'accroissement de $\mathcal{S}_0$ à $\mathcal{S}_h$ l'est aussi.

## Un exemple référence.

Dans $\mathbb{Z}^n$, prenons $\mathcal{A} = \{0\}$ et $\mathcal{B}$ constitué des vecteurs d'une base de $\mathbb{Z}^n$. Les coefficients d'agrandissement du graphe d'addition obtenu $I_{n,h}$ sont faciles à calculer, égaux à $\binom{n+i-1}{i}$. Si maintenant nous inversons les flêches, nous obtenons encore un graphe $(h+1)$-ponté commutatif (que l'on note $\hat{I}_{n,h}$). Quels sont ses coefficients d'agrandissement ?

Remarquons que quand on prend un graphe d'addition formé sur deux ensembles d'entiers $\geq 0$ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, le graphe formé sur $(\mathcal{A}+i\mathcal{B}) \cap [0..N]$ est encore un graphe commutatif.

## Réécriture de la preuve de $D_i(G' \cdot G'') \geq D_i(G')D_i(G'')$.

Cette partie de la preuve de Ruzsa me semble un peu nébuleuse dans son écriture. Je propose la démonstration suivante qui repose sur les mêmes arguments mais qui est un peu plus concise.

Partons d'une partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{S}_0' \times \mathcal{S}_0''$. Posons $\mathcal{X}_{s'} = \{s'' \in \mathcal{S}_0'' \;/\; (s', s'') \in \mathcal{X}\}$. Posons $\mathcal{Y} = \bigcup_{s' \in \mathcal{S}_0'} \{s'\} \times Im(\mathcal{X}_{s'}, \mathcal{S}_j'')$ et définissons $\mathcal{Y}_{s''} = \{s' \in \mathcal{S}_j' \;/\; (s', s'') \in \mathcal{Y}\}$ de sorte que $\mathcal{Y} = \bigcup_{s'' \in \mathcal{S}_j''} \mathcal{Y}_{s''} \times \{s''\}$.

Alors

$$\begin{aligned} Im(\mathcal{X}, \mathcal{S}'_j \times \mathcal{S}''_j) &= \bigcup_{s' \in \mathcal{S}'_0} Im(\{s'\}, \mathcal{S}'_j) \times Im(\mathcal{X}_{s'}, S'_j), \\ &= \bigcup_{s'' \in \mathcal{S}''_j} Im(\mathcal{Y}_{s''}, \mathcal{S}'_j) \times \{s''\}. \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \left|Im(\mathcal{X}, \mathcal{S}'_j \times \mathcal{S}''_j)\right| &= \sum_{s'' \in \mathcal{S}''_j} \left|Im(\mathcal{Y}_{s''}, \mathcal{S}''_j)\right|, \\ &\geq \sum_{s'' \in \mathcal{S}''_j} D_j(G'') \left|\mathcal{Y}_{s''}\right|, \\ &\geq D_j(G'') \sum_{s' \in \mathcal{S}'_0} \left|Im(\mathcal{X}_{s'}, S''_j)\right|, \\ &\geq D_j(G'') D_j(G') \sum_{s' \in \mathcal{S}'_0} \left|\mathcal{X}_{s'}\right|, \\ &\geq D_j(G'') D_j(G') \left|\mathcal{X}\right|, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Sur l'optimalité des multiplicateurs de Ruzsa.**

Ruzsa choisit comme multiplicateur des graphes simples d'addition ou d'addition inversée. Nous montrons dans ce paragraphe que ces multiplicateurs sont optimaux.

Considérons un graphe $(h+1)$-ponté $G$ avec $D_h(G) > 1$. Nous multiplions $G^k$ par un graphe référence $G_0$ à la puissance $l$, en supposant que $D_h(G_0) < 1$. En prenant $k$ et $l$ optimaux, nous obtenons l'inégalité :

$$\text{Log } D_i(G) \geq \frac{\text{Log } D_i(G_0)}{\text{Log } D_h(G_0)} \text{Log } D_h(G).$$

Comme $\text{Log } D_h(G_0) < 0$, l'inégalité $D_i(G_0)^{1/i} \geq D_h(G_0)^{1/h}$ nous garantit que

$$\frac{\text{Log } D_i(G_0)}{\text{Log } D_h(G_0)} \leq \frac{i}{h},$$

et cette borne est effectivement atteinte asymptotiquement par les graphes d'addition inversée utilisés par Ruzsa.