Estimation de l'ordre moyen d'une fonction arithmétique par la méthode de convolution

Perrine Berment, en magistère à Ker Lann,
antenne de l'ENS Cachan,
Olivier Ramaré, chargé de recherches au CNRS, Lille.

18 août 2012

Résumé

Nous présentons la méthode de convolution sur un exemple et profitons de ce contexte pour explorer plus avant quelques propriétés des séries de Dirichlet.

1 Introduction

Les fonctions arithmétiques sont très souvent mal connues, et possèdent un comportement qui semble irrégulier et sans cohérence. Nous nous attachons plus particulièrement dans cet article à l'étude de la fonction

$$f_0(n) = \prod_{p|n}(p-2). \tag{1}$$

La suite de ses valeurs sur les entiers entre 1 et 54, que voici

$$1, 0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 1, 0, 9, 0, 11, 0, 3, 0, 15, 0, 17, 0, 5, 0, 21, 0, 3, 0, 1, 0, 27,$$
$$0, 29, 0, 9, 0, 15, 0, 35, 0, 11, 0, 39, 0, 41, 0, 3, 0, 45, 0, 5, 0, 15, 0, 51, 0,$$

ne nous informe que peu, même si nous nous contentons de cette suite sur les entiers impairs de ce même intervalle :

$$1, 1, 3, 5, 1, 9, 11, 3, 15, 17, 5, 21, 3, 1, 27, 29, 9, 15, 35, 11, 39, 41, 3, 45, 5, 15, 51.$$

Pour obtenir plus d'informations, nous pouvons chercher à déterminer son ordre moyen, soit une approximation de $(1/X)\sum_{n\leqslant X} f_0(n)$. Et une régularité apparaît ici. Nous allons en effet démontrer que

Théorème 1. *Soit X un réel positif. Pour tout σ réel dans $]1/2, 1]$, nous avons*

$$(1/X)\sum_{n\leqslant X} f_0(n) = \mathscr{C}X + \mathcal{O}(X^\sigma)$$

où la constante impliquée dans le symbole $\mathcal{O}$ dépend de σ et où

$$\mathscr{C} = \tfrac{1}{2} \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right) = 0.14630\cdots$$

Remarquons que dans cet énoncé et de façon systématique dans la suite, la lettre p désigne un nombre premier.

L'ordre moyen a pour effet de dissimuler certaines valeurs aberrantes prises par la fonction considérée. Remarquons que comme cela est le cas pour les équivalents, nous choisissons comme ordre moyen une fonction "bien comprise" et "assez simple", qui permette de surcroît d'avoir un terme d'erreur assez petit. Quant à savoir ce qu'est une fonction "assez simple", cela dépend évidemment des auteurs !

La méthode que nous proposons appartient au folklore et n'a fait lieu d'aucune exposition systématique, pour autant que nous sachions. Elle est très souple dans son utilisation et donne accès à de très bons termes d'erreur. Il s'est développé depuis les années 50 une théorie complète pour évaluer les ordres moyens de fonctions multiplicatives (voir plus loin pour une définition), mais celle-ci s'est surtout orientée vers une extension maximale de la classe considérée plutôt que vers la qualité du terme d'erreur. Citons les théorèmes de Ikehara généralisé par Delange [3], le théorème de Wirsing [15], un autre résultat de Delange [4], et le travail exceptionnel de [8]. Le lecteur trouvera dans les livres de Ellison & Mendès France [7] et de Tenenbaum [14] des expositions pédagogiques de ce matériel.

Signalons encore qu'il nous serait très facile de remplacer le $\mathcal{O}$ dans ce théorème par une inégalité effective. Il est un peu plus difficile de certifier la valeur numérique de $\mathscr{C}$ que nous avançons, mais nous laissons ici ce problème de côté.

Présentons à présent les grandes lignes de la méthode de convolution. Il s'agit de déterminer l'ordre moyen d'une fonction arithmétique f. Pour cela, nous prenons une fonction "modèle" g, qui ressemble à f et dont nous connaissons l'ordre moyen. Le modèle pour f_0 sera la fonction qui à n associe n, dont nous connaissons évidemment un ordre moyen. Comment qualifier le fait que g soit un modèle pour f ? Nous allons définir un produit de convolution $\star$ et montrer qu'il existe une fonction h vérifiant $f = h \star g$, et où h sera "plus petite" que f. L'ordre moyen de f s'obtiendra alors en déterminant celui de $h \star g$, lequel sera essentiellement gouverné par celui de g.

Glissons ici un mot à propos du choix de la fonction f_0. Cette fonction n'a a priori aucune interprétation géométrique ; ce n'est pas tout à fait vrai puisque sa valeur sur un entier sans facteurs carrés, disons q, est le nombre de caractères de Dirichlet primitifs modulo q. Nous avons précisément choisi f_0 pour son côté "quelconque" ; sa forme particulière nous permet aussi de simplifier certaines parties de l'exposition.

La preuve en elle-même est très courte et fait l'objet de la section 5, mais nous détaillons avant les notions utilisées.

Nous tenons ici à remercier chaleureusement Hervé Queffelec pour ses indications et ses remarques qui nous ont été essentielles pour rédiger cet article.

2 Les fonctions arithmétiques

Les fonctions arithmétiques étant fortement utilisées par la suite, nous commençons par rappeler quelques définitions et propositions. Tout d'abord, une fonction arithmétique est tout simplement une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous la qualifions d'*arithmétique* lorsque qu'elle a un quelconque sens ... arithmétique, justement !

Parmi ces fonctions, les fonctions multiplicatives jouent un rôle particulier.

Définition 1. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est multiplicative si d'une part $f(1) = 1$, et d'autre part*

$$f(nm) = f(n)f(m), \quad \textit{dès que} \quad \operatorname{pgcd}(n, m) = 1.$$

Les fonctions arithmétiques multiplicatives présentent un intérêt majeur puisque l'image d'un entier est égale au produit des images des puissances des nombres premiers intervenant dans la décomposition de cet entier. En effet

$$f(n) = \prod_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha), \tag{2}$$

où la notation $p^\alpha \| n$ signifie que $p^\alpha | n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.

Ceci implique notamment qu'une fonction multiplicative est entièrement déterminée par ses valeurs sur les puissances de nombres premiers.

2.1 Bestiaire

Voici quelques fonctions multiplicatives célèbres :

- $\varphi(n)$: l'indicatrice d'Euler. Elle est égale au nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers avec n. Le lemme chinois nous permet de montrer qu'elle est multiplicative et que $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.
- $d(n)$: le nombre de diviseurs de n.
- $\sigma(n)$: la somme des diviseurs de n.
- $\delta_{n=k}$: la fonction indicatrice qui vaut 1 si $n = k$ et 0 sinon.
- $\theta_\alpha(n)$: la fonction qui à n associe n^α.
- $\mathbb{1}$ est une notation plus courante pour θ_0.
- $\mu(n)$: la fonction de Moebius. Elle est multiplicative et vaut -1 sur chaque nombre premier et 0 sur toutes leurs puissances supérieures.
- $\mu^2(n)$: la fonction indicatrice des entiers sans facteurs carrés. Elle vaut 1 si n n'est divisible par aucun carré strictement supérieur à 1 et 0 sinon.
- $\lambda(n)$: la fonction de Liouville qui vaut $(-1)^k$ sur tous les p^k.

2.2 Produit de convolution

Nous définissons le produit de convolution arithmétique de f et g par :

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d). \tag{3}$$

La lectrice vérifiera que ce produit est associatif et commutatif. La fonction $\delta_{n=1}$ en est l'élément neutre, puisque pour toute fonction arithmétique g, nous avons

$$(\delta_1 \star g)(n) = \sum_{\ell m = n} \delta_1(\ell) g(m) = g(n).$$

Ce produit est par ailleurs distributif vis-à-vis de l'addition de deux fonctions arithmétiques et ces deux lois permettent de munir l'ensemble de fonctions arithmétiques d'une structure d'algèbre commutative unitaire sur $\mathbb{C}$. Nous pourrions aussi enrichir cette structure en considérant la dérivation

$$\partial : (f(n))_{n \geqslant 1} \mapsto (f(n) \ln n)_{n \geqslant 1}$$

qui est linéaire et vérifie de surcroît $\partial(f \star g) = (\partial f) \star g + f \star (\partial g)$ mais nous sortons ici de notre cadre. La lectrice trouvera une étude assez détaillée de cette structure dans le livre de Bateman & Diamond [1].

Exercice 1. *Montrer que, si $D(f, s)$ converge absolument, il en est de même de $D(\partial f, r)$ pour $r > s$. Que penser de la réciproque ? Peut-on affaiblir cette condition à $r \geqslant s$?*

Voici le théorème central concernant les fonctions multiplicatives :

Théorème 2. *Si f et g sont deux fonctions multiplicatives, alors il en est de même de $f \star g$.*

Commençons par un lemme.

Lemme 1. *Soit m et n deux entiers premiers entre eux. Pour toute fonction F, nous avons*

$$\sum_{d|mn} F(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} F(d_1 d_2).$$

Preuve : Étant donné un entier n, nous désignons par $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble de ses diviseurs positifs, de telle sorte que $\mathcal{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Considérons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n) &\to \mathcal{D}(mn), & \Psi : \mathcal{D}(mn) &\to \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n), \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 d_2 & d &\mapsto (\mathrm{pgcd}(d, m), \mathrm{pgcd}(d, n)). \end{aligned}$$

La preuve consiste à montrer que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ et que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$, l'égalité énoncée dans le lemme n'en étant que la traduction fonctionnelle.

Soit $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n)$. Nous avons $\mathrm{pgcd}(d_1 d_2, m) = d_1$ et, de même, $\mathrm{pgcd}(d_1 d_2, n) = d_2$, ce qui nous garantit que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$. Ensuite, si d est un diviseur de mn, nous avons

$$\mathrm{pgcd}(d, mn) = \mathrm{pgcd}(d, m)\, \mathrm{pgcd}(d, n)$$

ce qui nous permet de conclure que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$. □

La preuve du théorème 2 est une simple application de ce lemme.

Preuve : Nous avons clairement $(f \star g)(1) = f(1)g(1) = 1$. Soit maintenant m et n deux entiers premiers entre eux. Il vient, par définition :

$$(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f\left(\frac{mn}{d}\right) g(d).$$

Nous invoquons ici le lemme 1, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}(f \star g)(mn) &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(m/d_2) f(n/d_2) g(d_1) g(d_2) = (f \star g)(m)(f \star g)(n)\end{aligned}$$

comme souhaité. □

Ceci nous permet d'obtenir la multiplicativité de certaines fonctions données, puisque par exemple on a : $d(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1})(n)$. Dans ce cas précis, la lectrice remarquera que le lemme 1 est en fait très exactement équivalent à cette multiplicativité !

Exercice 2. *Montrer que $\mathbb{1} \star \lambda$ est la fonction caractéristique des carrés.*

Exercice 3. *Soit f et g les fonctions définies par $f(n) = d(n)^2$ et $g(n) = d(n^2)$. Montrer que $f = \mathbb{1} \star g$.*

Exercice 4. *Montrer que $\theta_1 = \mathbb{1} \star \phi$.*

3 Les séries de Dirichlet

Nous ne parlerons que de séries de Dirichlet d'argument réel, et nous nous bornerons à rester dans des domaines de convergence absolue dans le cas réel, ce qui nous suffira ici. Pour une étude dans le cas complexe, voir [14] ou [7].

Lorsque nous disposons d'une fonction arithmétique, disons f, nous pouvons former sa *série de Dirichlet* qui est, pour tout argument réel s :

$$D(f, s) = \sum_{n \geqslant 1} f(n)/n^s. \tag{4}$$

Cette définition est a priori formelle, puisqu'il n'est pas toujours vrai qu'il existe au moins un s pour lequel cette série converge (il n'en existe d'ailleurs pas quand $f(n) = e^n$).

Propriété 1. *Soit f une fonction arithmétique telle que sa série de Dirichlet converge absolument pour un certain s. Alors, pour tout $r > s$, la série $D(f, r)$ converge absolument.*

Preuve : Nous avons
$$D(f,r) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}\frac{n^s}{n^r}.$$
Or $r > s$ donc $n^s/n^r < 1$, d'où $D(|f|,r) < D(|f|,s)$, i.e. la série de Dirichlet de f converge pour tout $r > s$. □

Cette propriété nous donne accès à la notion d'abscisse de convergence.

Définition 2. *On appelle* abscisse de convergence *de la fonction f, le plus petit réel s tel que la série de Dirichlet $D(f,s)$ converge. Si $D(f,s)$ converge pour tout s, on dit alors que l'abscisse de convergence est $-\infty$.*

Notons qu'il n'est pas acquis que la série en question converge en son abscisse de convergence. D'après un théorème de Landau, voir [6], cette situation n'arrive même jamais dès que cette abscisse est finie et que que f est positive ou nulle. Notons ici que l'abscisse de convergence peut valoir $-\infty$ et la fonction f être positive ou nulle, sans que cela n'implique que f soit à support borné, i.e. qu'elle s'annule partout sauf sur un nombre fini de valeurs. Le cas $f(n) = e^{-n}$ fournit un contre-exemple.

Propriété 2. *Supposons que la série de Dirichlet de la fonction multiplicative f converge absolument pour un certain s. Alors, $D(f,s)$ est développable en produit eulérien :*
$$D(f,s) = \prod_{p\geqslant 2}\sum_{k\geqslant 0}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Preuve : Il suffit de développer n en produit de nombres premiers et grâce à la multiplicativité de f, on obtient le résultat. Pour une démonstration complète, le lecteur pourra se référer à [14]. □

Nous pouvons associer à chaque fonction arithmétique f une série de Dirichlet, et cette série convergera au moins en un point si la fonction f croît *raisonnablement*. Une telle série de Dirichlet définit en fait parfaitement la fonction dont elle est issue comme le montre la propriété suivante. Nous ne l'utiliserons pas dans la suite.

Propriété 3. *Soit f et g deux fonctions arithmétiques telles que leurs séries de Dirichlet respectives convergent absolument pour un certain s. Supposons en outre que $D(f,r) = D(g,r)$ pour tout $r > s$. Alors $f = g$.*

Preuve : En posant $h_1 = f - g$, nous avons $D(h_1, r) = 0$ pour tout $r > s$. Comme cette série converge en $r = s+1$, nous en déduisons que $h_2(n) = h_1(n)/n^{r+1}$ est bornée en valeur absolue et vérifie $D(h_2, r) = 0$ pour tout $r > -1$ et il nous faut établir que $h_2 = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas, et nommons n_0 le plus petit entier n tel que $h_2(n) \neq 0$. Une comparaison à une intégrale nous donne directement, pour $r > 1$:

$$|n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0)| \leqslant \max_n |h_2(n)| \sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{n_0^r}{n_r}$$
$$\leqslant \max_n |h_2(n)| n_0^r \int_{n_0}^{\infty} \frac{dt}{t^r} \leqslant \max_n |h_2(n)|/(r-1),$$

quantité qui tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Mais $D(h_2, r) = 0$, ce qui nous garantit que $h_2(n_0) = 0$ contrairement à notre hypothèse. Le lecteur pourra modifier cette démonstration de deux façons : tout d'abord remplacer le recours à un raisonnement par l'absurde par une démonstration par récurrence. Ensuite, une petite modification donne $n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0) = \mathcal{O}((1 + n_0^{-1})^{-r})$ alors que la preuve ci-dessus ne donne que $\mathcal{O}(1/r)$. $\square$

3.1 La fonction ζ de Riemann.

La fonction ζ est très importante en arithmétique puisqu'elle intervient dans la formule d'Euler, elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi la série de Dirichlet la plus simple puisqu'elle est associée à la fonction constante 1 (fonction que nous avons notée à la fois θ_0 et $\mathbb{1}$ dans notre bestiaire). Elle est définie pour $s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s}.$$

Si il s'agit de la série de Dirichlet la plus simple et la plus célèbre, cependant elle reste assez mal connue. Pour une étude approfondie de cette fonction, le lecteur pourra se référer à [14] et [7].

En application de la propriété 2, la fonction ζ possède un produit eulérien :

$$\zeta(s) = \prod_{p \geqslant 2} (1 - p^{-s})^{-1}, \tag{5}$$

qui converge absolument pour $s > 1$.

3.2 Séries de Dirichlet et produit de convolution

Les deux lois internes sur les fonctions arithmétiques se traduisent agréablement en termes de séries de Dirichlet :

- Concernant l'addition $(+)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, nous avons

$$D(f + g; s) = D(f; s) + D(g; s).$$

- Concernant la multiplication $(\star)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, alors celle de $f \star g$ est également absolument convergente, et nous avons

$$D(f \star g; s) = D(f; s) D(g; s).$$

Cette dernière égalité est facile à vérifier de ce que les séries convergent absolument, ce qui nous permet d'en déplacer les termes comme bon nous semble. Elle montre en particulier que l'opérateur qui, à une fonction arithmétique, lui associe sa série de Dirichlet trivialise le produit de convolution arithmétique, de la même façon que la transformée de Fourier trivialise le produit de convolution des fonctions de la droite réelle.

La notion d'abscisse de convergence nous amène à définir un concept de *taille* sur nos fonctions arithmétiques : une fonction f_1 est plus grande qu'une fonction f_2 tout simplement si son abscisse de convergence est plus grande ! Le méthode de convolution consiste alors à écrire $f = g \star h$ avec g ayant la même abscisse de convergence que f mais avec h ayant une abscisse plus petite. Nous verrons alors h comme une *petite perturbation*, et f simplement comme une version perturbée de g.

Il est clair que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet de $f \star g$ est majorée par le maximum des abscisses de convergence absolue des séries de Dirichlet associées à de f et g. Cette majoration est souvent une égalité *lorsque* ces deux abscisses ne sont pas égales ... et qu'aucun des facteurs n'est nul !

Exercice 5. *Montrer que*

1. $D(\phi, s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$,
2. *si* $f(n) = d(n)^2$, *alors* $D(f, s) = \zeta(s)^4/\zeta(s)$,
3. *si* $f(n) = d(n^2)$, *alors* $D(f, s) = \zeta(s)^3/\zeta(s)$,
4. $D(\lambda, s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$,
5. $D(\mu^2, s) = \zeta(s)/\zeta(2s)$.

Exercice 6. *Montrer que la série de Dirichlet associée à la fonction de Moebius* μ *est* $1/\zeta(s)$ *et en déduire un exemple montrant que l'abscisse de convergence absolue d'un produit peut être strictement inférieure à la plus grande des deux abscisses des deux facteurs (considérer* $\mathbb{1} \star \mu$*).*

4 La sommation par parties

Nous faisons ici un détour vers une technique très utile pour aborder le genre de problèmes qui nous occupe ici mais qui est étonnamment mal connue. Il s'agit de la *sommation par parties*, dans notre contexte bien évidemment. Nous décrivons ce procédé par un exemple. Commençons par rappeler que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\sum_{n \leqslant t} 1 = t + \mathcal{O}(1).$$

Supposons à présent que nous souhaitions obtenir une approximation de $\sum_{n \leqslant X} 1/n$.

Et bien il nous suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{X} + \int_n^X \frac{dt}{t^2}. \tag{6}$$

Il vient alors :

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}=\frac{\sum_{n\leqslant X}1}{X}+\int_1^X\sum_{n\leqslant t}1\frac{dt}{t^2}=\ln X+\mathcal{O}(1).$$

De la même façon, nous pouvons, par exemple, obtenir le développement de $\sum_{n\leqslant X}\ln n$.

Afin d'illustrer plus avant cette technique, anticipons sur la preuve du théorème 1 et démontrons dès à présent le corollaire suivant du théorème 1 :

Théorème 3.
Nous avons $\sum_{n\leqslant X}f_0(n)/n=2\mathscr{C}X+\mathcal{O}(X^\sigma)$ *pour tout* σ *réel dans* $]1/2,1]$.

Preuve : En effet, nous utilisons (6) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant X}f_0(n)/n&=\sum_{n\leqslant X}f_0(n)\Big(\frac{1}{X}+\int_n^X\frac{dt}{t^2}\Big)=\frac{\sum_{n\leqslant X}f_0(n)}{X}+\int_1^X\sum_{n\leqslant t}f_0(n)\frac{dt}{t^2}\\&=\mathscr{C}X+\mathcal{O}(X^\sigma)+\mathscr{C}\int_1^X dt+\mathcal{O}\Big(\int_1^X t^{\sigma-1}dt\Big)\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien le résultat annoncé. □

Le lecteur pourra trouver des théorèmes similaires, donnant l'ordre moyen de $f=g\star h$ connaissant celui de g, dans le lemme 3.2 de [13].

5 Preuve du théorème 1

Première étape

Commençons par expliciter la série de Dirichlet de f_0, et notamment son expression sous forme de produit eulérien. Nous avons, par définition :

$$D(f_0,s)=\prod_{p\geqslant 2}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\prod_{\ell|p^k}(\ell-2)}{p^{ks}}.$$

Regardons de plus près chaque facteur. Dans la somme portant sur k, la contribution correspondant à $k=0$ est exceptionnelle et vaut 1 ; le facteur eulérien en p devient :

$$1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{\prod_{\ell|p^k}(\ell-2)}{p^{ks}}.$$

Or ℓ et p sont des nombres premiers, ce qui implique que $\ell=p$. Il nous reste

$$\sum_{k\geqslant 1}(p-2)/p^{ks}=\frac{p-2}{p^s-1}.$$

Voici donc la série de Dirichlet associée à f_0 :

$$D(f_0, s) = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{p-2}{p^s - 1}\right). \tag{7}$$

Nous remarquons que ce produit *ressemble* à $\prod_{p \geqslant 2} \bigl(1 + \frac{1}{p^{s-1} - 1}\bigr)$ qui, lui, correspond à $\zeta(s-1)$. Entreprenons par conséquent de sortir ce facteur de notre produit. Nous écrivons

$$\begin{aligned} D(f_0, s) &= \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{p-2}{p^s - 1}\right) = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{2p^{s-1} + p - 3}{(p^s - 1)p^{s-1}}\right) \left(\frac{1}{1 - 1/p^{s-1}}\right) \\ &= H(s)\zeta(s-1). \end{aligned} \tag{8}$$

Le produit définissant $H(s)$ converge absolument pour les s pour lesquels la série $\sum \frac{2p^{s-1} + p - 3}{(p^s - 1)p^{s-1}}$ converge absolument, ce qui a lieu au moins, en étendant cette somme à tous les entiers, pour $s > 3/2$. L'abscisse de convergence absolue de $\zeta(s-1)$ est égale à 2, c'est aussi *probablement* celle de $D(f_0, s)$, tant et si bien que la série H converge effectivement dans un domaine plus large. Si nous réalisons la série H comme la série de Dirichlet d'une fonction, alors celle-ci sera bel et bien plus petite que f_0, au sens que nous avons donné à cette expression au paragraphe 3.2. Commentons plus avant le terme *probablement* ci-dessus. Remarquons tout d'abord que nous n'utilisons cette notion de taille que pour nous guider dans les calculs et qu'un contrôle heuristique nous suffit. Mais nous pouvons aussi montrer à posteriori que l'abscisse de convergence (et donc de convergence absolue ici puisque f_0 est positive ou nulle) est effectivement égale à 2. En effet, supposons le théorème 1 démontré. Une sommation par parties nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f_0(n)/n^s &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f_0(n) \Bigl(\frac{1}{N^s} + s\int_n^N \frac{dt}{t^{s+1}}\Bigr) \\ &= \frac{\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f_0(n)}{N^s} + s\int_n^N \sum_{1 \leqslant n \leqslant t} f_0(n) \frac{dt}{t^{s+1}} \\ &= \mathscr{C} N^{2-s} + s\mathscr{C} \int_1^N \frac{dt}{t^{s-1}} + \mathcal{O}(N^{1+\sigma-s}) + \mathcal{O}\Bigl(\int_1^N dt/t^{s-\sigma}\Bigr). \end{aligned} \tag{9}$$

En prenant $\sigma = 0.6$ par exemple, nous constatons bien que la série définissant $D(f_0, s)$ converge pour $s > 2$ et diverge pour $s < 2$. Nous poursuivons cette discussion dans la dernière section de cet article.

Deuxième étape

Il faut maintenant transformer les deux fonctions obtenue $H(s)$ et $G(s) = \zeta(s-1)$ en série de Dirichlet. Le cas de G est facile puisque $G(s) = D(\theta_1, s)$.

Tournons-nous à présent vers H. Nous cherchons une fonction h telle que

$$H(s) = \sum_{n \geqslant 1} h(n)/n^s \tag{10}$$

et nous limitons notre recherche à des fonctions multiplicatives. Nous cherchons donc h telle que :

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} = 1 - \frac{2p^{s-1} + p - 3}{(p^s - 1)p^{s-1}}. \tag{11}$$

La condition $h(1) = 1$ permet de régler le cas $k = 0$. Il nous reste à nous occuper de la somme correspondant à $k \geqslant 1$. Nous posons $z = 1/p^s$, et obtenons pour le membre de droite de (11) la fraction rationnelle en z suivante :

$$-\frac{\frac{2}{pz} + p - 3}{(\frac{1}{z} - 1)\frac{1}{pz}} = \frac{2z + p^2z^2 - 3pz^2}{z - 1} = -2\sum_{k \geqslant 1} z^k - (p^2 - 3p)\sum_{k \geqslant 2} z^k.$$

En identifiant termes à termes, nous constatons alors que la fonction multiplicative h définie par

$$\begin{cases} h(p) = -2, \\ h(p^k) = -(p^2 - 3p + 2) \quad \text{pour } k \geqslant 2, \end{cases} \tag{12}$$

résout notre problème.

Troisième étape

Comme $D(f_0, s) = H(s)\zeta(s-1)$, et que l'on sait développer en série de Dirichlet $H(s)$ et $\zeta(s-1)$, on a un produit de deux séries de Dirichlet, qui correspond donc à un produit de convolution arithmétique. La propriété 3 nous permet d'identifier termes à termes et de conclure que $f_0 = \theta_1 \star h$.

Nous présentons ici une autre méthode plus pédestre. Considérons la fonction multiplicative h définie par (12) et rappelons que θ_1 est la fonction $n \mapsto n$. Nous remarquons que : $\theta_1 \star h$ est encore une fonction multiplicative, qui est par conséquent définie par ses valeurs prises sur les puissances des nombres premiers. Or, pour p nombre premier et k entier naturel $\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}(\theta_1 \star h)(p^k) &= \sum_{\ell / p^k} \theta_1(\frac{p^k}{\ell})h(\ell) = \sum_{\ell / p^k} \frac{p^k}{\ell} h(\ell) \\ &= p^k\left(1 - \frac{2}{p} - \sum_{2 \leqslant t \leqslant k} \frac{p^2 - 3p + 2}{p^t}\right) = f(p^k).\end{aligned}$$

Par multiplicativité, cela implique bien $f_0(n) = (\theta_1 \star h)(n)$. Nous écrivons cette identité sous forme déployée pour la suite :

$$f_0(n) = \sum_{\ell m = n} h(\ell)\theta_1(m) = \sum_{\ell m = n} h(\ell)m.$$

Amorçons maintenant le calcul de l'ordre moyen de f_0. L'égalité ci-dessus nous donne

$$\sum_{n\leqslant X} f_0(n) = \sum_{\ell m\leqslant X} h(\ell)m = \sum_{\ell\leqslant X} h(\ell) \sum_{m\leqslant X/\ell} m. \tag{13}$$

Or, nous savons que, pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n\leqslant N} n = N(N+1)/2,$$

ce qui implique que, pour $M \geqslant 1$ que nous prenons cette fois-ci réel :

$$\sum_{m\leqslant M} m = \tfrac{1}{2}M(M+1) + \mathcal{O}(M) = \tfrac{1}{2}M^2 + \mathcal{O}(M). \tag{14}$$

Remarquons tout d'abord que cette estimée est valable dès que M est positif ou nul. Il se trouve que la méthode que nous proposons se simplifie beaucoup si nous nous contentons d'un terme d'erreur moins fort. L'estimation (14) implique en effet aussi que

$$\sum_{m\leqslant M} m = \tfrac{1}{2}M^2 + \mathcal{O}(M^\sigma) \tag{15}$$

pour tout $\sigma \in [1, 2]$ et tout $M \geqslant 0$.

Nous disposons alors de tous les outils pour conclure. Nous reprenons la preuve à l'équation (13) et constatons que la condition $\ell \leqslant X$ est superflue. Il vient alors directement

$$\sum_{n\leqslant X} f_0(n) = \frac{X^2}{2} \sum_{\ell\geqslant 1} \frac{h(\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}\Big(X^\sigma \sum_{\ell\geqslant 1} \frac{|h(\ell)|}{\ell^\sigma}\Big).$$

Comme $H(s)$ converge absolument pour $s > 3/2$, la somme $\sum_{\ell\leqslant 1} |h(\ell)|/\ell^\sigma$ est finie pour tout $\sigma > 3/2$. La preuve du théorème 1 est terminée, quitte à renommer σ.

Pour le même prix ...

Le lecteur pourra, en suivant une méthode identique à celle proposée dans la démonstration du théorème 1, trouver l'ordre moyen de la fonction φ.

6 Quelques digressions sans preuve

Les séries des Dirichlet ont été introduites dans [5] par P.G. Lejeune-Dirichlet en 1937 pour montrer de l'existence d'une infinité de nombres premiers dans les progressions arithmétiques (de type $a + nq$ avec a et q premiers entre eux). Dedekind, d'abord un élève puis un ami de Dirichlet, a établi plusieurs propriétés de ces séries enrichissant ainsi le livre [12]. L'étape de structuration suivante est due à un mémoire de Cahen [2], qui est notamment célèbre pour ... l'inexactitude de ses preuves ! L'élaboration de la théorie est allée bon train à cette période, et en 1915 parut la splendide petite monographie [9] de Hardy & Riesz qui reste à ce jour l'ouvrage de base sur la question. La lectrice pourra retrouver dans [14] une partie de ce matériel.

Nous nous intéressons ici à deux points :

1. Dans quelle mesure l'ordre moyen et l'abscisse de convergence sont-ils liés ?
2. L'écriture $D(f,s) = D(h,s)D(g,s)$ établie dans notre cas particulier en (8) nous permet-elle de conclure que l'abscisse de convergence absolue de $D(f,s)$ est la même que celle de $D(g,s)$?

En ce qui concerne le premier point, nous avons vu dans la section 5 que la connaissance de l'ordre moyen de la fonction f permettait d'en déduire l'abscisse de convergence de $D(f,s)$. La réciproque est fausse, tout simplement parce qu'il est tout à fait possible que f n'admette pas d'ordre moyen. Ces deux notions sont tout de même liées par le théorème suivant (dû à Cahen [2]) :

Théorème 4. *Si l'abscisse de convergence absolue σ_0 de $D(f,s)$ est strictement positive, elle est donnée par*

$$\sigma_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum_{1\leqslant n\leqslant N} |f(n)|}{\ln N}.$$

Il existe un théorème analogue pour déterminer l'abscisse de convergence (mais nous n'avons pas établi son existence !), et il est aussi possible de traiter le cas où σ_0 est négative ou nulle (mais la formule est différente). La lectrice remarquera que cette formule est l'exact pendant de la formule de Hadamard donnant le rayon de convergence d'une série entière, moyennant de rappeler l'identité que nous avons (presque !) démontrée en (9) :

$$D(|f|,s) = s\int_1^\infty \Big(\sum_{n\leqslant t} |f(n)|\Big) dt/t^{s+1}.$$

Tournons-nous à présent vers la seconde question. Nous supposons ici que nous disposons d'une décomposition de la forme $D(f,s) = D(h,s)D(g,s)$, où nous connaissons l'abscisse de convergence absolue, disons σ_0, de $D(g,s)$ et où celle de $D(h,s)$ est strictement plus petite. Pouvons-nous en conclure que σ_0 est encore l'abscisse de convergence absolue σ_0' de $D(f,s)$? Il est clair que $\sigma_0' \leqslant \sigma_0$, mais peut-elle être plus petite ? C'est évidemment le cas si $h = 0$, amis qu'en est-il si $h \neq 0$? Les auteurs de cet article ne savent pas répondre à cette question générale, mais il est loisible dans notre cas d'application d'ajouter une hypothèse : nous supposons que, pour tout $\delta > 0$, le module de $D(h,s)$ est minoré lorsque s décrit le demi-plan complexe $\mathrm{Re}\, s \geqslant \sigma_0 + \delta$. Cette hypothèse ne nous coûte rien en pratique puisque nous obtenons $D(h,s)$ sous la forme d'un produit eulérien, qui en tant que produit convergent, n'est ni infini, ni nul. Mais il nous faut maintenant considérer les s du domaine complexe, ce que nous avions réussi à éviter jusqu'à présent ! Voici le théorème [10] de Hewitt & Williamson qui nous intéresse :

Théorème 5. *Soit $D(h,s)$ une série de Dirichlet absolument convergente pour* $\mathrm{Re}\, s \geqslant \sigma$ *et minorée en module par une constante* > 0*, alors* $1/D(h,s)$ *est encore une série de Dirichlet absolument convergente pour* $\mathrm{Re}\, s \geqslant \sigma$*.*

Ce résultat nous permet d'écrire $D(g,s) = D(h,s)^{-1}D(f,s)$ et d'en conclure que $\sigma'_0 \geqslant \sigma_0$, ce qui nous donne bien $\sigma_0 = \sigma'_0$.

De nombreux travaux comparent les abscisses de convergence simple, absolue ou uniforme des trois constituants de l'égalité $D(f,s) = D(h,s)D(g,s)$; la lectrice en trouvera un exposé ainsi que leurs extensions au cas de plusieurs facteurs et les dernières améliorations (optimales) dans [11].

Références

[1] P.T. Bateman and H.G. Diamond. *Analytic number theory.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2004. An introductory course.

[2] E. Cahen. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues. 1894. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__75_0`.

[3] H. Delange. Généralisation du théorème de Ikehara. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)*, 71 :213–242, 1954. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_3_213_0`.

[4] H. Delange. Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 78 :1–29, 1961. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_1_1_0`.

[5] P.G.L. Dirichlet. Beweis des Satzes, das jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. *Abhandlungen der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1937. Scan de l'article original : `http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=07-abh/1837&seite:int=00000286` et traduction : `http://arxiv.org/abs/0808.1408`.

[6] F. Dress. Théorèmes d'oscillations et fonction de Möbius. *Sémin. Théor. Nombres, Univ. Bordeaux I*, Exp. No 33 :33pp, 1983/84. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002545454`.

[7] W.J. Ellison. *Les nombres premiers.* Hermann, Paris, 1975. En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

[8] G. Halász. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheorischer funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 19 :365–403, 1968.

[9] G. H. Hardy and M. Riesz. *The general theory of Dirichlet's series.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964. Première édition en 1915.

[10] E. Hewitt and J.H. Williamson. Note on absolutely convergent Dirichlet series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 :863–868, 1957.

[11] J.-P. Kahane and H. Queffélec. Ordre, convergence et sommabilité de produits de séries de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(2) :485–529, 1997. `http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_485_0`.

[12] P.G. Lejeune-Dirichlet. *Lectures on Number Theory, edited by R. Dedekind. Second edition. (Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind. Zweite Auflage.)*. Braunschweig. Vieweg , 1871. Première édition en 1863.

[13] O. Ramaré. On Snirel'man's constant. *Ann. Scu. Norm. Pisa*, 21 :645–706, 1995. `http://math.univ-lille1.fr/~ramare/Maths/Article.pdf`.

[14] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, volume 1 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, second edition, 1995.

[15] E. Wirsing. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen. *Math. Ann.*, 143 :75–102, 1961.