Une égalité du grand crible pour les entiers sans facteurs carrés*†

O. Ramaré

September 24, 2013

Abstract

`File LargeSieveForSquareFree.tex`

1 Introduction

Notre premier objectif ici est de montrer comment manipuler la suite des entiers sans facteurs carrés. Un entier est dit *sans facteurs carrés* lorsque $[p|n \implies p^2 \nmid n]$ pour tout nombre premier p. Cette suite commence par

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33 \cdots$$

Comme presque toujours en théorie analytique, nous avons accès à cette suite via sa fonction caractéristique. Un instant de réflexion convaincra le lecteur que cette fonction est identique au carré de la fonction de Moebius μ^2 et c'est ainsi que nous le dénoterons à présent. La parenté avec la fonction de Moebius s'arrête ici et, si la fonction de Moebius est l'une des fonctions les plus difficiles à traiter en théorie analytique des nombres, la fonction μ^2 est elle l'une des plus simples (hormis la fonction caractéristique d'une progression arithmétique).

Signalons ici que l'on a

$$\sum_{n \le N} \mu^2(n) = (6/\pi^2)N + \mathcal{O}(\sqrt{N})$$

c'est à dire qu'il y a *beaucoup* d'entiers sans facteurs carrés, presque 2 sur 3 puisque $6/\pi^2 = 0.607927 \cdots$. Pourtant, on ne sait pas montrer que, dès

*AMS Classification: , secondary :

†Keywords:

lors que x est assez grand, l'intervalle $[x, x + x^{1/5}]$ contient un entier sans facteurs carrés. Le meilleur résultat en date est (Filaseta & Trifonov, 1992) et affirme que l'intervalle $[x, x + cx^{1/5} \operatorname{Log} x]$ contient un entier sans facteurs carrés, pour une certaine constante c assez grande.[1] Ceci pour montrer que si la suite des entiers sans facteurs carrés est l'une des plus simples que nous ayons à manipuler, elle n'en reste pas moins encore très mystérieuse.

(Erdös, 1951) montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'intervalles de la forme

$$\Big[x, x + \Big(\frac{\pi^2}{6} - \varepsilon\Big)\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} x}\Big]$$

qui ne contienne aucun entier sans facteurs carrés et dit qu'il est parfaitement possible que cette borne soit optimale.

Nous allons ici démontrer le théorème suivant de (Ramaré, 2009, Theorem 20.5) :

Theorem 1.1 *Pour tout $Q \leq N^{7/12-2\epsilon}$ où ϵ a été choisi strictement positif et $\leq 1/6$, nous avons*

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{a \mod {}^*q} \Big| \sum_{n \leq N} \mu^2(n) e(an/q) \Big|^2 = (6/\pi^2) N^2 + \mathcal{O}(N^{2-\epsilon}).$$

Nous n'avons pas essayé d'optimiser l'exposant 7/12, mais nous sommes restreints à une argumentation assez générale. Ce théorème a deux particulirités. Il offre tout d'abord une *égalité* de grand crible, et non une inégalité ; Par ailleurs nous pouvons à autoriser Q d'être beaucoup plus grand que $\sqrt{N}$. La lectrice trouvera dans (Brüdern & Perelli, 1999) plus d'informations sur la somme d'exponentielle sur les entiers sans facteurs carrés.

2 Une représentation de la fonction caractéristique de la suite des entiers sans facteurs carrés

Voici la représentation principale de $\mu^2(n)$ que nous utiliserons :

$$\mu^2(n) = \sum_{\ell^2 | n} \mu(\ell). \tag{1}$$

[1] On conjecture que, pour tout $\varepsilon > 0$ et x assez grand en terme de ε, l'intervalle $[x, x + x^{\varepsilon}]$ contient un entier sans facteurs carrés.

Je n'ai pas réussi à retrouver l'histoire de cette représentation, mais (Estermann, 1931) l'utilise déjà. Nous allons en donner une preuve détaillée.

Une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est dite *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{si } n \text{ et } m \text{ sont premiers entre eux.} \end{cases} \tag{2}$$

De façon équivalente, nous pouvons écrire

$$f\big(\prod_p p^{\alpha_p}\big) = \prod_p f\big(p^{\alpha_p}\big) \tag{3}$$

où le produit porte sur tous les nombres premiers et où les α_p sont des entiers positifs ou nuls, dont tous sauf un nombre fini sont nuls. Cette expression montre clairement que la fonction f est complètement déterminée par sa valeur sur les entiers qui sont des puissances de nombres premiers. Réciproquement la donnée de telles valeurs détermine bien une fonction multiplicative, tout simplement en la définissant à partir de l'égalité ci-dessus.

Cette notion de multiplicativité va s'avérer fondamentale. Nous constaterons en particulier que beaucoup de fonctions arithmétiques a priori mystérieuses se comprennent beaucoup mieux lorsque l'on regarde leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers.

Commençons par détailler ce pourquoi la fonction qui à n associe son nombre de diviseurs est multiplicative. Ceci repose en fait sur la structure de l'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des diviseurs de n. Tout d'abord

$$\mathcal{D}(p^\alpha) = \big\{1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1}\big\}. \tag{4}$$

Ensuite, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, chaque diviseur du produit $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ est de la forme $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$ avec $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$ et $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$. Par ailleurs, chaque entier de cette forme est bien un diviseur de $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Ceci nous donne

$$\mathcal{D}\big(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\big) = \mathcal{D}\big(p_1^{\alpha_1}\big) \cdot \mathcal{D}\big(p_2^{\alpha_2}\big). \tag{5}$$

Nous montrons de la même façon que $\mathcal{D}(mn) = \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n)$ si m et n sont premiers entre eux. De façon explicite la fonction suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(mn) &\to \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n) \\ d &\mapsto \big((d,m),(d,n)\big). \end{aligned} \tag{6}$$

Il s'agit là d'une forme de multiplicativité au niveau des ensembles, et que nous allons exploiter sous la forme suivante : pour toute fonction F, l'identité suivante a lieu dès que m et n sont deux entiers premiers entre eux

$$\sum_{d|mn} F(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} F(d_1 d_2). \tag{7}$$

Nous définissons le produit de convolution arithmétique $f \star g$ par

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d) \tag{8}$$

où la somme porte sur les diviseurs d de n. En notant 1 la fonction qui vaut 1 sur tous les entiers, nous avons $d(n) = 1 \star 1$. Le théorème général suivant nous donne la multiplicativité de toute une kyrielle de fonctions :

Theorem 2.1 *Si f et g sont deux fonctions multiplicatives, il en est de même de $f \star g$.*

Proof: La valeur en 1 est aisée : $f \star g(1) = f(1)g(1) = 1$. Soit ensuite deux entiers m et n premiers entre eux. Nous avons

$$(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f(mn/d)g(d)$$

et appliquons (7) :

$$\begin{aligned}(f \star g)(mn) &= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f\left(\frac{m}{d_1}\right) f\left(\frac{n}{d_2}\right) g(d_1)g(d_2) = (f \star g)(m)(f \star g)(n)\end{aligned}$$

comme requis. $\diamond \diamond \diamond$

Ceci nous donne d'un seul coup la multiplicativité de beaucoup de fonctions, en partant des exemples simples que sont les fonctions 1 et plus généralement $X^a : n \mapsto n^a$ (et $X = X^1$). En particulier, le lecteur vérifiera que

$$d(n) = (1 \star 1)(n), \quad \sigma(n) = (1 \star X)(n).$$

Cette convolution nous permet aussi d'exprimer simplement certaines relations, comme

1. $d(n^2) = (1 \star 2^{\omega(X)})(n)$.

Preuve de (1)

Nous remarquons que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \\ m &\mapsto \begin{cases} \mu(\ell) & \text{si } m = \ell^2 \text{, pour un } \ell \text{ entier,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

est multiplicative. Il en est par conséquent de même de la fonction $1 \star f$. Regardons sa valeur sur la puissance d'un nombre premier disons p^a :

$$\begin{aligned}(1 \star f)(p^a) &= 1 + f(p) + f(p^2) + \cdots + f(p^a) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1, \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } a \geq 2 \end{cases}\end{aligned}$$

i.e. $(1 \star f)(p^a) = \mu^2(p^a)$. Cette égalité se prolonge à tous les entiers au vue de la multiplicativité de $1 \star f$ d'une part et de μ^2 d'autre part.

3 Le mécanisme général

Let us start with the following Lemma.

Lemma 3.1 *Let $q \geq 2$ be an integer and let N be a non-negative real numbers. For every arbitrary sequence of complex numbers $(b_m)_{m \leq M}$, we have*

$$\sum_{a \mod {}^* q} \left| \sum_{\substack{\ell \geq 1, \\ m \leq M, \\ \ell m \leq N}} b_m e(a\ell m/q) \right|^2 - \phi(q) \left| \sum_{q|m} b_m [N/m] \right|^2$$
$$\ll NBq^{1/2} \operatorname{Log} q \sum_{\substack{m \leq M, \\ q|m}} \frac{|b_m|}{m} + \|b\|_2^2 (Mq + q^2) \operatorname{Log}^2 q$$

with $\|b\|_2^2 = \sum_m |b_m|^2$ and $B = \sum_m |b_m|$.

For the use we have in mind, namely the squarefree numbers, replacing the integer part $[N/m]$ by N/m up to a $\mathcal{O}(1)$ would be too costly without any further assumptions on (b_m). We thus keep the main term in this fairly raw format.

Proof: We start from

$$\Sigma = \sum_{\substack{\ell \geq 1, \\ m \leq M, \\ \ell m \leq N}} b_m e(a\ell m/q) = \sum_{\substack{m \leq M, \\ q|m}} b_m [N/m] + \sum_{\substack{m \leq M, \\ q \nmid m}} b_m \mathcal{O}(1/\|am/q\|)$$

Summing over a ranging reduced residues classes, we first get that

$$\Sigma = \phi(q)\Big|\sum_{\substack{m\le M,\\ q|m}} b_m[N/m]\Big|^2$$
$$+\mathcal{O}\Bigg(\sum_{\substack{m\le M,\\ q|m}}|b_m|\frac{N}{m}\sum_{a \mod {}^*q}\sum_{\substack{m'\le M,\\ q\nmid m'}}|b_{m'}|/\|am'/q\|$$
$$+\sum_{\substack{m,m'\le M,\\ q\nmid m, q\nmid m'}}|b_m||b_{m'}|\sum_{a \mod {}^*q}1/\big(\|am/q\|\|am'/q\|\big)\Bigg)$$

For the first one, proceed as follows: set $(m,q)=q/d<q$. Split summation over a according to classes modulo d; there are $\phi(q)/\phi(d)\le q/d$ elements per class where the latter inequality is proven by appealing to multiplicativity. Say $a\equiv b[d]$. We have

$$\sum_{c \mod {}^*d}1/\|cm/q\|\ll d(\operatorname{Log} d+1)\ll d\operatorname{Log} q$$

which we multiply by q/d. This amounts to a contribution not more than

$$L\sum_{\substack{m'\le M,\\ q|m'}}|b_{m'}|\sum_{\substack{m\le M,\\ q\nmid m}}|b_m|\ \mathcal{O}(q\operatorname{Log} q)\ll LB\|b\|_2\sqrt{M/q}\ q\operatorname{Log} q$$

which is $\mathcal{O}(LB\|b\|_2(Mq)^{1/2}\operatorname{Log} q)$. It is a striking feature of this simple-minded proof that M/q occurs and not $M/q+1$. As for the second part of the error term, we use $2|b_mb_{m'}|\le|b_m|^2+|b_{m'}|^2$ to get it is not more – up to a multiplicative constant – than

$$\sum_{\substack{m\le M,\\ q\nmid m}}|b_m|^2\sum_{a \mod {}^*q}\sum_{\substack{m'\le M,\\ q\nmid m'}}1/\big(\|am/q\|\|am'/q\|\big).$$

We handle the remainder term as follows. For the sum over m' we split the range of summation in interval of length q and get it is $\mathcal{O}((1+M/q)q\operatorname{Log} q)$. We treat the sum over a as above and get a total contribution of

$$\mathcal{O}\big(\|b\|_2^2(M+q)q\operatorname{Log}^2 q\big)$$

as required. The error due to the replacement of L^* with L is absorbed in the already existing error term. ◇◇◇

Summing over q, we infer the following Theorem.

Theorem 3.1 *Let $\mathcal{Q}$ be a set of moduli, all $\le Q$. For every sequence of complex numbers $(b_m)_{m\le M}$, we have*

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}}\sum_{a \mod {}^*q}\Bigl|\sum_{\substack{\ell\ge1,\\ m\le M,\\ \ell m\le N}} b_m e(a\ell m/q)\Bigr|^2 = \sum_{m,m'\le M} b_m\overline{b_{m'}}\sum_{\substack{q\in\mathcal{Q},\\ q|(m,m')}}\phi(q)\Bigl[\frac{N}{m}\Bigr]\Bigl[\frac{N}{m'}\Bigr]$$
$$+\mathcal{O}\bigl(NB\|b\|_2\operatorname{Log}(MQ)+\|b\|_2^2(MQ^2+Q^3)\operatorname{Log}^2 Q\bigr)$$

with $\|b\|_2^2=\sum_m |b_m|^2$ and $B=\sum_m |b_m|$.

Proof: We note that

$$\sum_{q\le Q}\sum_{\substack{m\le M,\\ q|m}}\frac{|b_m|}{m}\sqrt{q}\le\sum_{m\le M}\frac{|b_m|}{m}\sum_{q|m}\sqrt{q}$$
$$\le\|b\|_2\Bigl(\sum_{m\le M}\frac{1}{m^2}\Bigl(\sum_{q|m}\sqrt{q}\Bigr)^2\Bigr)^{1/2}.$$

and end the proof by noticing that

$$\sum_{m\le M}\frac{1}{m^2}\Bigl(\sum_{q|m}\sqrt{q}\Bigr)^2\ll\operatorname{Log} M$$

by appealing for instance to ... ◇◇◇

When the main term in the above Theorem is of size about N^2 and $\|b\|_2^2$ is of size about M, the formula stated yields an asymptotic provided $Q, M=o(N^{2/3})$ and $QM=o(N)$.

Lemma 3.2 *For every sequence of bounded complex numbers $(c_d)_{d\le D}$, we have*

$$\sum_{q\le Q}\sum_{a \mod {}^*q}\Bigl|\sum_{\substack{\ell\ge1,\\ d>D,\\ \ell d^2\le N}} c_d e(a\ell d^2/q)\Bigr|^2\ll NQ^2D^{-2}+N^3D^{-4}\operatorname{Log} N.$$

Proof: We simply expand the range of the inner summation over a to all of $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Calling Σ the sum we want to estimate, this leads to

$$\Sigma\ll\sum_{D<d_1,d_2\le\sqrt{N}}|c_{d_1}c_{d_2}|\sum_{\substack{n_1,n_2\le N,\\ d_1^2|n_1,\\ d_2^2|n_2}}\sum_{\substack{q\le Q,\\ q|n_1-n_2}} q.$$

The diagonal terms $n_1 = n_2$ give rise to a contribution at most

$$NQ^2 \sum_{D<d_1,d_2\leq\sqrt{N}} 1/[d_1^2,d_2^2] \ll NQ^2 \sum_{D<d_1,d_2\leq\sqrt{N}} (d_1^2,d_2^2)/(d_1^2d_2^2)$$
$$\ll NQ^2 \sum_{\delta} \phi(\delta)\Bigg(\sum_{\substack{D<d\leq\sqrt{N},\\ \delta|d}} 1/d^2\Bigg)^2$$

by using yet again Selberg's diagonalization process. When $\delta \leq D$, we bound the inner sum by $\mathcal{O}(1/(D\delta))$, while we bound it by $\mathcal{O}(1/\delta^2)$ otherwise. The total contribution of the diagonal terms is thus seen to be not more than $\mathcal{O}(NQ^2D^{-2})$. Concerning the non-diagonal ones, we use

$$\sum_{q|m} q = m\prod_{p|m}(1+1/p) \leq m\cdot\exp\Big(\sum_{p\leq m} 1/p\Big) \ll m \operatorname{Log} m$$

to get a contribution of order at most:

$$\sum_{D<d_1\leq d_2\leq\sqrt{N}} \sum_{\substack{n_1,n_2\leq N,\\ d_1^2|n_1,\\ d_2^2|n_2}} \frac{N}{d_1^2}\operatorname{Log} N \ll N^3\operatorname{Log} N \sum_{D<d_1\leq d_2\leq\sqrt{N}} d_1^{-4}d_2^{-2}$$
$$\ll N^3\operatorname{Log} N \sum_{D<d_1\leq d_2\leq\sqrt{N}} d_1^{-5} \ll N^3D^{-4}\operatorname{Log} N$$

$\diamond\diamond\diamond$

4 Preuve du théorème 1.1

We denote in this proof the constant $6/\pi^2$ by C to simplify the typographical work . We start with the formula $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n}\mu(d)$ from which we infer

$$\mu^2(n) = \sum_{\substack{d\leq D,\\ d^2|n}} \mu(d) + \sum_{\substack{d>D,\\ d^2|n}} \mu(d) \tag{9}$$

for some parameter $D \leq \min(N^{1/3}, Q)$. We then apply Theorem 3.1 with $m = d^2$, $M = D^2$ and $b_m = \mu(d)$ when $m = d^2$ and $b_m = 0$ otherwise. The main term reads

$$H = \sum_{q\leq Q}\phi(q)\Bigg(\sum_{\substack{d\leq D,\\ q|d^2}} \mu(d)[N/d^2]\Bigg)^2.$$

When q is not cubefree, the inner summation vanishes, so we may write $q = q_1 q_2^2$ with q_1 and q_2 being squarefree and coprime. We set $q' = q_1 q_2$. The condition $q|d^2$ translates into $q'|d$. We have

$$\sum_{\substack{d\le D,\\ q|d^2}} \bigl|\mu(d)[N/d^2]\bigr| \ll N/q'^2 \quad , \quad \sum_{\substack{d\le D,\\ q|d^2}} \bigl|\mu(d)\bigr| \ll D/q',$$

so that

$$\begin{aligned}
H &= N^2 \sum_{q_1 q_2^2 \le D^2} \mu^2(q_1q_2)\phi(q_1)q_2\phi(q_2)\Biggl(\sum_{\substack{d\le D,\\ q_1q_2|d}} \mu(d)/d^2\Biggr)^2 + \mathcal{O}(ND\operatorname{Log} D)\\
&= C^2N^2 \sum_{q_1q_2^2\le D^2} \frac{\mu^2(q_1q_2)\phi(q_1)\phi(q_2)}{q_1^4q_2^3}\prod_{p|q_1q_2}\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\Bigr)^{-2} + \mathcal{O}(N^2D^{-1})\\
&= CN^2 + \mathcal{O}(N^2D^{-1})
\end{aligned}$$

where the last constant is a bit messy to compute: we first extend the summation to all q_1q_2 with negligible error term and then proceed by multiplicativity. We first note that

$$\begin{aligned}
&\sum_{q_1,q_2\ge 1} \frac{\mu^2(q_1q_2)\phi(q_1)\phi(q_2)}{q_1^4q_2^3}\prod_{p|q_1q_2}\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\Bigr)^{-2}\\
&\qquad = \sum_{q_1\ge 1}\mu^2(q_1)\prod_{p|q_1}\frac{p-1}{(p^2-1)^2}\sum_{\substack{q_2\ge 1,\\ (q_1,q_1)=1}}\mu^2(q_2)\prod_{p|q_1}\frac{p(p-1)}{(p^2-1)^2} = C'
\end{aligned}$$

say, and from then onward, continue routinely. We get

$$\begin{aligned}
C' &= \sum_{q_1\ge 1}\mu^2(q_1)\prod_{p|q_1}\frac{p-1}{(p^2-1)^2+p(p-1)}\prod_{p\ge 2}\Bigl(1+\frac{p(p-1)}{(p^2-1)^2}\Bigr)\\
&= \prod_{p\ge 2}\Bigl(1+\frac{p-1}{(p^2-1)^2+p(p-1)}\Bigr)\prod_{p\ge 2}\Bigl(1+\frac{p(p-1)}{(p^2-1)^2}\Bigr)\\
&= \prod_{p\ge 2}\frac{p^2}{p^2-1} = 1/C
\end{aligned}$$

as claimed. The error term in Theorem 3.1 is $\mathcal{O}\bigl((ND^{3/2}+D^3Q^2+DQ^3)\operatorname{Log}^2(MQ)\bigr)$. Let us define

$$\Sigma_1 = \sum_{q\le Q}\ \sum_{a \bmod {}^*q}\Biggl|\sum_{\substack{\ell\ge 1,\\ d\le D,\\ \ell d^2\le N}} \mu(d)e(a\ell d^2/q)\Biggr|^2$$

and Σ_2 with the size condition on d being reversed. We have just shown that $\Sigma_1 = CN^2 + \mathcal{O}(N^2D^{-1} + (ND^{3/2} + D^3Q^2 + DQ^3)\operatorname{Log}^2(MQ))$ while Lemma 3.2 yields the bound

$$\Sigma_2 \ll NQ^2D^{-2} + N^3D^{-4}\operatorname{Log} N.$$

Let us select $D = N^{1/4+\epsilon}$ and $Q = N^{7/12-2\epsilon}$. We readily get

$$\Sigma_2 \ll N^{2-2\epsilon}, \quad \Sigma_1 - CN^2 \ll N^{11/8+2\epsilon} + N^{23/12-\epsilon/2} + N^{2-4\epsilon} \ll N^{2-\epsilon}$$

since $\epsilon \leq 1/6$. We use

$$\sum_{q\leq Q}\sum_{a \bmod {}^*q}\Bigg|\sum_{\substack{\ell\geq 1,\\ d\leq D,\\ \ell d^2\leq N}}\mu(d)e(a\ell d^2/q) + \sum_{\substack{\ell\geq 1,\\ d>D,\\ \ell d^2\leq N}}\mu(d)e(a\ell d^2/q)\Bigg|^2$$
$$\leq \Sigma_1 - 2\Re\sum_{q\leq Q}\sum_{a \bmod {}^*q}\sum_{\substack{\ell\geq 1,\\ d\leq D\\ \ell d^2\leq N}}\mu(d)e(a\ell d^2/q)\sum_{\substack{\ell\geq 1,\\ d>D\\ \ell d^2\leq N}}\mu(d)e(-a\ell d^2/q) + \Sigma_2$$

and we invoke Cauchy inequality for the middle term to prove it is not more than $\sqrt{\Sigma_1\Sigma_2} \ll N^{2-\epsilon}$; the Theorem is proved.

References

Brüdern, J., & Perelli, A. 1999. Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 591–613.

Erdös, P. 1951. Some problems and results in elementary number theory. *Publ. Math. Debrecen*, **2**, 103–109.

Estermann, T. 1931. On the representations of a number as the sum of two numbers not divisible by a k-th power. *J. London Math. Soc.*, 37–40.

Filaseta, Michael, & Trifonov, Ognian. 1992. On gaps between squarefree numbers. II. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, **45**(2), 215–221.

Ramaré, O. 2009. *Arithmetical aspects of the large sieve inequality.* Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes, vol. 1. New Delhi: Hindustan Book Agency. With the collaboration of D. S. Ramana.