THÉORÈMES DE DENSITÉ

Olivier Ramaré

Abstract. L'essentiel du matériel est pris du livre de Titchmarsh.
Version préliminaire du 26 Mai 2000.

0. Introduction.

Nous savons que le nombre $\mathrm{N}(T)$ de zéros non-triviaux de ζ dont la partie imaginaire est comprise entre 0 et T est donné par

$$\mathrm{N}(T) = \frac{T}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{T}{2\pi e} + \mathcal{O}(\operatorname{Log} T).$$

Considérons alors

$$\mathrm{N}(\sigma, T) = \#\{\rho /\ \Im\rho \in [0, T],\ \Re\rho \geq \sigma\}$$

Nous nous proposons de montrer que $\mathrm{N}(\sigma, T)$ est bien inférieur à T si $\sigma > \frac{1}{2}$. Supposons en effet que

$$(\star) \qquad |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)| \ll (|t| + 1)^c \operatorname{Log}^{c'}(2|t|)$$

pour des constantes $c, c' \geq 0$. Alors la preuve qui suit montre que

$$(⧉) \qquad \mathrm{N}(\sigma, T) \ll T^{2(1+2c)(1-\sigma)} (\operatorname{Log} T)^{2c'+7}. \quad (T \geq 1).$$

I. Convexité.

Il est courant en théorie analytique d'entendre l'argument "par convexité". Voici une version intégrale précise de cet argument, version due à Hardy/Ingham & Pólya en 1936 (cf Titchmarsh 7.8).

Soit f une fonction analytique dans un demi-plan $\Re s \geq \alpha$, réelle pour s réel et régulière dans ce demi-plan sauf peut-être pour un pôle en un point s_0. Supposons en outre que $f(s) = \mathcal{O}(e^{\varepsilon|\Im s|})$ uniformément dans toute bande verticale et ceci pour $|\Im s|$ tendant vers l'infini et tout $\varepsilon > 0$.

Soit alors $\beta > 0$. Supposons que pour tout $T > 0$ on ait

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T |f(\alpha + it)|^2 dt \leq C(T^a + 1) \operatorname{Log}^m(2T), \\ \displaystyle\int_0^T |f(\beta + it)|^2 dt \leq C'(T^{a'} + 1) \operatorname{Log}^{m'}(2T), \end{cases}$$

pour $a, a', C, C', m, m' \geq 0$ et m et m' entiers. Alors, pour tout $\sigma \in [\alpha, \beta]$, nous avons

$$\int_0^T |f(\sigma+it)|^2 dt \leq K\Big(C(T^a+1)\operatorname{Log}^m(2T)\Big)^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}}\Big(C'(T^{a'}+1)\operatorname{Log}^{m'}(2T)\Big)^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}$$

où K est une fonction de α, β, m et m' qui reste bornée lorsque ces paramètres parcourent un compact.

Preuve.

$\diamond\diamond\diamond$

II. Compter les zéros.

Il nous faut à présent un argument qui nous permettent de compter les zéros, ce qui va passer par une considération du logarithme, et nous en profiterons pour fixer nos conventions en ce domaine. (cf Titchmarsh 9.9).

Soit ϕ une fonction méromorphe dans le rectangle de sommets $\alpha, \beta, \beta+iT, \alpha+iT$ où le lecteur aura deviné que α ,β et T sont réels, $\alpha<\beta$ et $T>0$. Nous appelons ce contour parcouru dans le sens trigonométrique $\mathcal{C}$. Nous supposons en outre que ϕ est régulière et non nulle au voisinage de $[\beta, \beta+iT]$, ce qui nous permet d'y définir $\operatorname{Log}\phi$. Nous définissons alors $\operatorname{Log}\phi(\sigma+it)$ en intégrant ϕ'/ϕ le long de $[\beta, \beta+it]$ puis de $[\beta+it, \sigma+it]$ si ce dernier segment ne passe pas par un pôle ou un zéro, auquel nous approchons $\sigma+it$ par le dessus.

Considérons

$$\begin{aligned}\nu(\sigma,T) =& \#\{\rho\ /\ \phi(\rho)=0, \Re\rho>\sigma,\ \Im\rho\in]0,T]\}\\ &-\#\{\rho\ /\ 1/\phi(\rho)=0, \Re\rho>\sigma,\ \Im\rho\in]0,T]\}.\end{aligned}$$

(les zéros sur l'axe réel sont exclus du fait de notre définition du logarithme de ϕ). Nous avons alors

$$\int_\alpha^\beta \nu(\sigma,T)d\sigma = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \operatorname{Log}\phi(s)\,ds.$$

Notons que nous pouvons prendre la partie réelle des deux membres.

Dans l'application que nous avons en tête, α et β vont être bornés alors que T va tendre vers l'infini. Les deux segments horizontaux doivent donc avoir une faible contribution, ce que nous établirons à l'aide du résultat suivant.

Pour nous placer dans les conditions d'application usuelles, nous prenons $\beta=2$. Nous supposons en sus des hypothèses précédentes que ϕ est réelle pour s réel, qu'elle est définie dans le demi-plan $\Re s\geq\alpha\geq 0$ et qu'elle a au plus un pôle en $s=1$. Nous avons alors le résultat suivant (cf Titchmarsh 9.4).

Supposons que

$$\begin{cases}|\Re\phi(2+it)|\geq m>0 \quad (t\geq 1),\\ \max\limits_{\substack{\sigma\geq\alpha\\ T\geq t\geq 1}} |\phi(\sigma+it)|\leq M,\end{cases}$$

alors

$$|\arg\phi(\sigma+it)| \ll \frac{\operatorname{Log}\frac{M}{m}}{\alpha'-\alpha}+1 \qquad (\sigma\geq\alpha',\ t\geq 2)$$

où $\alpha' \in]\alpha, \frac{3}{2}]$. Il s'agit évidemment d'un lemme inspiré de la méthode locale de Landau.

Sous les hypothèses restrictives précédentes, et en écrivant $\nu(\sigma, 2, T) = \nu(\sigma, T) - \nu(\sigma, T)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\alpha'}^{2} \nu(\sigma, 2, T) d\sigma &= \Re \frac{-1}{i} \int_{\mathcal{C}_1} \operatorname{Log} \phi(s)\, ds \\ &= \int_{2}^{T} \big(\operatorname{Log} |\phi(\alpha' + it)| - \operatorname{Log} |\phi(2 + it)| \big) dt \\ &\quad + \int_{\alpha'}^{2} \big(\arg \phi(\sigma + iT) - \arg \phi(\sigma + i2) \big) d\sigma \end{aligned}$$

soit encore

$$(\dagger) \qquad 2\pi \int_{\alpha'}^{2} \nu(\sigma, 2, T) d\sigma = \int_{2}^{T} \operatorname{Log} |\phi(\alpha' + it)| dt + \mathcal{O}\bigg(T \operatorname{Log} m + \frac{\operatorname{Log} \frac{M}{m}}{\alpha' - \alpha} + 1 \bigg)$$

ce qui est essentiellement le résultat que nous utiliserons. Notons que ce résultat ne nous donne pas accès à ν directement, mais uniquement à une de ses moyennes. Nous obtiendrons des renseignements sur la fonction d'origine (soit ν) en utilisant le fait que cette fonction est décroissante en σ.

III. Estimées de densité.

Nous abordons ici la preuve à proprement parler. Une utilisation directe de ($\dagger$) ne donne pas de très bons résultats, aussi utilisons nous une fonction qui amplifie l'influence des zéros. Considérons

$$f_N(s) = \zeta(s) M_N(s) - 1 \quad \text{avec} \quad M_N(s) = \sum_{n \le N} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

et

$$h_N(s) = 1 - f_N(s)^2.$$

Sous l'hypothèse de Riemann, $M_N(s)$ est une approximation de $1/\zeta(s)$ ce qui fait que $f_N(s)$ doit ressembler à la fonction constante 0. Toutefois, si ρ est un zéro de ζ, nous avons $f_N(s) = -1$. En conséquence, h_N admet au moins les mêmes zéros que ζ, mais en plus les sépare mieux.

Nous appliquons alors ($\dagger$) avec $\phi = h_N$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

Regardons tout d'abord ce qui se passe en $\Re s = 2$. Nous avons

$$f_N(2 + it) = \sum_{m > N} \frac{\sum_{n | m} \mu(n)}{m^{2+it}} = \mathcal{O}\bigg(\sum_{m > N} \frac{d(m)}{m^2} \bigg) = \mathcal{O}\bigg(\frac{\operatorname{Log} N}{N} \bigg)$$

et par conséquent

$$|\Re h_N(2 + it)| \ge 1 - \mathcal{O}\bigg(\frac{\operatorname{Log}^2 N}{N^2} \bigg).$$

Regardons ensuite ce qui se passe sur la droite $\Re s = \frac{1}{2}$. En utilisant ($\star$), nous obtenons

$$|h_N(\tfrac{1}{2}+it)| \ll t^{2c} N \operatorname{Log}^{2c'} t \quad (t \geq 1).$$

Nous prenons alors $\alpha' = \sigma_0 - 1/\operatorname{Log} T$ où $\sigma_0 > \frac{1}{2} + 1/\operatorname{Log} T$ et utilisons (†). Il vient

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\alpha'}^{1} \mathrm{N}(\sigma, T) d\sigma &= \int_2^T \operatorname{Log} |h_N(\alpha' + it)| dt + \mathcal{O}\big(TN^{-2} \operatorname{Log}^2 N + \operatorname{Log}^2 N\big) \\ &\leq \int_2^T |f_N(\alpha' + it)|^2 dt + \mathcal{O}\big(TN^{-2} \operatorname{Log}^2 N + \operatorname{Log}^2 N\big) \end{aligned}$$

et il nous faut évaluer cette dernière intégrale, ce que nous allons réaliser à l'aide du principe de convexité. Nous supposons $\alpha' \leq 1$ ce qui ne changera rien. Nous utilisons l'inégalité de la section I entre $\frac{1}{2}$ et $1+\delta$ où $\delta = 1 + 1/\operatorname{Log} T$. Rappelons tout d'abord un lemme de Montgomery & Vaughan.

Lemme. *Nous avons*

$$\int_0^T \Big| \sum_{n \geq 1} a_n n^{it} \Big|^2 dt = \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 (T + \mathcal{O}^*(3\pi(n+1))).$$

Étudions tout d'abord le moment en $\frac{1}{2}$:

$$\int_2^T |f_N(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt \ll T^{2c} (\operatorname{Log} T)^{2c'} \sum_{n \leq N} \frac{1}{n} (T + \mathcal{O}(n)) \ll T^{2c} (\operatorname{Log} T)^{2c'} (T+N) \operatorname{Log} N.$$

Étudions ensuite le moment en $1+\delta$:

$$\int_2^T |f_N(1+\delta+it)|^2 dt \ll \sum_{m > N} \frac{d(m)^2}{m^{2+2\delta}} (T + \mathcal{O}(m)) \ll TN^{-1} \operatorname{Log}^3 N \;+ \operatorname{Log}^4 N.$$

Nous prenons alors $N = T$ et concluons alors facilement que l'on a

$$2\pi \int_{\alpha'}^{1} \mathrm{N}(\sigma, T) d\sigma \ll T^{(1+2c)\frac{1-\alpha'}{1-\frac{1}{2}}} (\operatorname{Log} T)^A$$

où A est une certaine constante (facilement explicitable). Il nous faut à présent en déduire une majoration pour $\mathrm{N}(\sigma_0, T)$, ce qui se fait de la façon suivante :

$$\mathrm{N}(\sigma_0, T) \Big(\sigma_0 - \Big(\sigma_0 - \frac{1}{\operatorname{Log} T} \Big) \Big) \leq \int_{\alpha'}^{\sigma_0} \mathrm{N}(\sigma, T) d\sigma \leq \int_{\alpha'}^{1} \mathrm{N}(\sigma, T) d\sigma$$

d'où

$$\mathrm{N}(\sigma_0, T) \ll T^{2(1+2c)(1-\sigma_0)} (\operatorname{Log} T)^{A+1},$$

estimée a priori valable pour $\sigma_0 > \frac{1}{2} + 1/\operatorname{Log} T$ mais que l'on étend à $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ en usant de $\mathrm{N}(\sigma_0, T) \leq N(T)$.

References

H. Montgomery & R. C. Vaughan, *The large sieve*, Mathematika **20 no 2** (1973), 119–133.

E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford University Press (1986), 412pp.