ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET FORMES MODULAIRES : LA THÉORIE DE HECKE

Olivier Ramaré

Abstract. Version du 3 Octobre 2000

I. Introduction.

Hamburger en 1921 démontrait que, moyennant quelques conditions de régularité, l'équation fonctionnelle de ζ caractérisait cette fonction. La situation ne devait devenir vraiment claire qu'avec l'article de Hecke de 1936 dont nous donnons un aperçu ici. Cela nous permettra de montrer le lien entre fonctions L (ou ζ) et formes modulaires.

II. Un théorème de Hecke.

Commençons par quelques préliminaires; Tout d'abord de demi-plan complexe supérieur (i.e. constitué des $\tau \in \mathbb{C}$ tels que $\Im\tau > 0$) est dénoté par $\mathbb{H}$ et appelé couramment le demi-plan de Poincaré. Si τ appartient à $\mathbb{H}$ et k est un réel ≥ 0, nous définissons $(\tau/i)^k$ par $\exp(k\operatorname{Log}(\tau/i))$ où la branche du logarithme est choisie en imposant $\operatorname{Log} x \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}$.

Théorème (Hecke).

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe pour laquelle il existe un réel c avec $a_n = \mathcal{O}(n^c)$.
Soit $\lambda > 0$, $k > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ des paramètres fixés.
Considérons les trois fonctions

$$\varphi(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} \quad , \quad f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{2i\pi n\tau/\lambda} \quad , \quad \Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\varphi(s)$$

Alors, nous avons équivalence entre les propriétés suivantes :

(1) *La fonction $\Phi(s) + a_0/s + Ca_0/(k-s)$ est entière et bornée dans toute bande verticale et $\Phi(k-s) = C\Phi(s)$.*
(2) *Pour $\tau \in \mathbb{H}$, $f(-1/\tau) = C(\tau/i)^k f(\tau)$.*

Preuve. Pour $\Re s$ assez large, nous avons

$$\Phi(s) = \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^{-s} t^{s-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty (f(it) - a_0) t^{s-1} dt.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(il faudrait démontrer que cette intégrale converge en 0). Si la propriété (2) est vérifiée, alors nous écrivons

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \int_1^\infty (f(it)-a_0)t^{s-1}dt + \int_0^1 (f(it)-a_0)t^{s-1}dt \\ &= \int_1^\infty (f(it)-a_0)t^{s-1}dt - \frac{a_0}{s} + \int_1^\infty f(i/t)(1/t)^s\frac{dt}{t} \\ &= \int_1^\infty (f(it)-a_0)t^{s-1}dt - \frac{a_0}{s} - \frac{Ca_0}{k-s} + C\int_1^\infty (f(it)-a_0)t^{k-s}\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue en utilisant l'équation fonctionnelle supposée vérifiée par f. La propriété (1) est alors facilement établie.

Réciproquement, supposons la propriété (1) vérifiée. Nous utilisons alors

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Re s=c} x^{-s}\Gamma(s)ds \quad (x>0, c>0)$$

pour établir pour $c>k$

$$f(ix)-a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Re s=c} x^{-s}\Phi(s)ds.$$

En déplaçant le chemin d'intégration, nous obtenons

$$f(ix)-a_0 = Ca_0x^{-k} - a_0 + \frac{C}{2\pi}\int_{\Re s=-c} x^{-s}\Phi(s)ds.$$

L'équation fonctionnelle supposée vérifiée par Φ nous donne alors

$$f(ix)-a_0 = Ca_0x^{-k} - a_0 + Cx^{-k}(f(i/x)-a_0) = Cx^{-k}f(i/x).$$

Nous étendons cette propriété au demi-plan de Poincaré par prolongement analytique. $\diamond\diamond\diamond$

Nous dénotons par $\mathfrak{M}_0(k,C,\lambda)$ l'espace vectoriel des fonctions f vérifiant

$$\exists c>0,\ a_n = \mathcal{O}(n^c), \quad f(-1/\tau) = C(\tau/i)^k f(\tau).$$

Notons qu'une telle fonction vérifie aussi $f(\tau+\lambda) = f(\tau)$ et que si sil existe une telle fonction non identiquement nulle, alors $C=\pm 1$ car

$$C^2 f(\tau) = C(-1/(i\tau))^k C(\tau/i)^k f(\tau) = C(-1/(i\tau))f(-1/\tau) = f(\tau),$$

ce qui fait que nous pouvons nous restreindre à ce cas.

Ce théorème exhibe une relation entre des séries de Dirichlet et des formes modulaires, mais n'explique pas encore le théorème de Hamburger, ni le succès de la méthode. Ce succès tient au fait que, lorsque $\lambda \le 2$, nous pouvons assez facilement montrer que l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_0(k,C,\lambda)$ est de *dimension finie* et nous disposons d'une bonne borne pour cette dimension. Lorsque $\lambda > 2$, cet espace vectoriel est de dimension infinie.

III. Exemples.

Tournons-nous à présent vers des exemples qui vérifient les hypothèses du théorème précédent. Nous nous restreignons au cas $\lambda \leq 2$. Les fonctions ζ de corps de nombres ne vérifient les hypothèses de ce théorème que lorsque le corps est quadratique imaginaire, puisque sinon interviennent plusieurs facteurs Γ qui ne sauraient se réduire à un seul. Quant au cas quadratique imaginaire, seul deux corps ont un discriminant fondamental inférieur à 4, et il se trouve que la racine carré de ce discriminant est notre paramètre λ.

Regardons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \left(\frac{2\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\zeta(2s) &&:: \quad (\tfrac{1}{2}, 1, 2) \\
\Phi_2(s) &= \left(\frac{2\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma(s)\,(1-2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1) &&:: \quad (2, 1, 2) \\
\Phi_{3,\ell}(s) &= \left(\frac{2\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma(s)\,2^{-s}\zeta(s)\zeta(s+1-2\ell) &&:: \quad (2\ell, (-1)^{\ell}, 2) \quad (\ell \in \mathbb{N}\setminus\{0\}) \\
\Phi_4(s) &= \left(\frac{2\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma(s)\,(1+2^{4-2s})\zeta(s)\zeta(s-3) &&:: \quad (4, 1, 2) \\
\Phi_5(s) &= \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s) &&:: \quad (1, 1, \sqrt{3}) \\
\Phi_6(s) &= \left(\frac{2\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) &&:: \quad (1, 1, 2)
\end{aligned}$$

où

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s) = \sum$$

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \sum_{m\geq 1, n\geq 0} \frac{1}{m^2+n^2}$$

En utilisant l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann, celle de $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ et de $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}$, ainsi que les formules :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},\ \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z)$$

nous obtenons

$$\begin{gathered}
\Phi_1(\tfrac{1}{2}-s) = \Phi_1(s) \quad , \quad \Phi_2(2-s) = \Phi_2(s) \\
\Phi_4(4-s) = \Phi_4(s) \quad , \quad \Phi_5(1-s) = \Phi_5(s) \quad , \quad \Phi_6(1-s) = \Phi_6(s) \\
\Phi_{3,\ell}(2\ell-s) = (-1)^{\ell}\Phi_{3,\ell}(s) \quad (\ell \in \mathbb{N}\setminus\{0\})
\end{gathered}$$

IV. Domaine fondamental.

V. Multiplicité des zéros.

VI. $\mathfrak{M}_0(k, C, \lambda)$ est de dimension finie si $\lambda \leq 2$.

VII. Quelques conséquences.

En utilisant le théorème ??, nous montrons que la dimension de $\mathfrak{M}_0(2,1,2)$ est inférieure à 1. Comme cet espace contient Φ_2 (enfin, la forme modulaire associée), il est exactement de dimension 1. À partir de Φ_1, nous construisons la forme modulaire

$$2\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi n^2\tau/2} \in \mathfrak{M}_0(\tfrac{1}{2},1,2).$$

Par conséquent $(2\theta)^4 \in \mathfrak{M}_0(2,1,2)$, et correspond à la série de Dirichlet

$$\Theta_4(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{r_4(n)}{n^s}$$

où $r_4(n)$ est le nombre d'écritures de n en sommes de 4 carrés d'éléments de $\mathbb{Z}$, l'ordre important peu. Par exemple $r_4(1) = 8$. Nous obtenons alors

$$\Theta_4(s) = 8(1-2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1)$$

ce qui nous donne

$$r_4(n) = \begin{cases} 8\sigma(n) & \text{si} \quad n \not\equiv 0[4] \\ 8\sigma(n) - 32\sigma(n/4) & \text{si} \quad n \equiv 0[4] \end{cases}$$

De la même façon, nous retrouvons la formule classique donnant le nombre de représentations d'un entier en sommes de huit carrés à partir des coefficients de $\Phi_{3,2}$ et Φ_4 puisque $\dim \mathfrak{M}_0(4,1,2) \leq 2$.

References

H. Hamburger, *Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion*, Math. Zeitschrift **10** (1921), 240–254, 11 (1922), 224–245, 13 (1922), 283–311.

E. Hecke, *Über die Bestimmung der Dirichlet Reihen durch ihre Funktionalgleichung*, Math. Annalen **112** (1936), 664–699.