ÉTAT DES LIEUX

OLIVIER RAMARÉ

Abstract. Nous tentons dans cet article de faire un état des lieux de l'avancée des connaissances explicites en théorie multiplicative. Si ce champs a été structuré par plusieurs problèmes classiques, nous proposons en cours d'exposition plusieurs problèmes probablement plus simples et certainement moins connus.

1. Les problèmes typiques

La preuve du théorème des nombres premiers a dès le début posé le problème d'en obtenir une version explicite, alors que simultanément l'hypothèse de Riemann invitait beaucoup de chercheurs à calculer les premiers zéros de la fonction ζ de Riemann. Les premiers résultats entièrement explicites proviennent donc de ce champs, et hormis le calcul des zéros, il s'agit du calcul d'une région sans zéros pour ζ par de la Vallée-Poussin [15] en 1899 et d'une estimation du nombre de zéros de cette même fonction par Backlund [1] en 1914, zéros de partie imaginaire inférieure à une borne donnée. Si les nombres premiers restent un sujet de prédilection dans ce type de problématique, autour des années 1930 les techniques de la théorie analytique en général se sont rapidement complexifiées, ce qui a fait apparaître le problème de rendre complètement explicites des résultats devenus tous a priori asymptotiques. Le premier travail dans cette direction me semblent être celui de Dickson [23] en 1939 où il montre que tout entier sauf 23 et 289 peut s'écrire comme somme d'au plus 8 cubes d'entiers positifs. Cette émergence coïncide qui plus est avec celle des calculs sur ordinateurs. Ces deux discipline s'accordent encore très bien de nos jours.

Commençons par présenter quelques problèmes typiques de la branche de la théorie analytique qui nous intéresse ici.

Problème 1. *Est-il vrai que tout entier impair* ≥ 3 *est somme d'au plus 3 nombres premiers ?*

Problème 2. *Est-il vrai que tout entier pair* ≥ 2 *est somme d'au plus 4 nombres premiers ?*

Problème 3. *Est-il vrai que tout entier* ≥ 455 *est somme d'au plus 7 cubes positifs ou nuls ?*

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11N05.

Problème 4. *Est-il vrai que pour $X \geq 8$, l'intervalle $[X, X + X^{2/3}]$ contient un nombre premier ?*

Problème 5. *Est-il vrai que pour tout $q \geq 3$ et tout a premier q, le plus petit nombre premier $\equiv a[q]$ est inférieur à q^{10} ?*

Problème 6. *Est-il vrai que pour tout $q \geq 10\,000$ et tout caractère primitif χ modulo q, on a $|L(1,\chi)| \leq \frac{1}{2} \operatorname{Log} q$?*

La caractéristique de ces problèmes, outre le fait qu'ils appartiennent à la théorie multiplicative des nombres (!), vient de ce que lorsque le paramètre qui y détermine la taille est supposé assez grand, des réponses positives y ont été apportées. La première idée est alors de reprendre la démonstration asymptotique, d'y borner explicitement tous les termes d'erreurs : nous obtenons de la sorte une borne inférieure de notre paramètre de taille, borne à partir de laquelle la propriété est vérifiée. Une vérification "à la main" doit alors permettre de conclure à la véracité de la propriété dans le nombre fini de cas qu'il reste. Mais ce nombre de cas est si gigantesque qu'il faut de fait développer des approches et des méthodes nouvelles.

En effet, par exemple, pour ce qui est des problèmes précédents, Chen & Wang dans [5] montrent en suivant la preuve asymptotique que tout entier impair $\geq 10^{40\,000}$ est somme de trois nombres premiers. Borne qui est aussi la seule connue pour le problème no 2. En ce qui concerne le problème no 3, McCurley a établi dans [52] là encore en suivant la preuve asymptotique effective (qu'il établit d'ailleurs) que tout entier supérieur à $10^{468\,000}$ était effectivement somme de sept cubes d'entiers positifs ou nuls alors que l'on pense que cette propriété est vraie dès que l'on considère des entiers supérieurs à 455.

Nous constatons dès lors qu'il reste une zone extrêmement étendue, typiquement entre 10^{10} et $10^{100\,000}$ où les moyens de calcul standarts ne suffisent plus et où les méthodes analytiques asymptotiques sont encore inopérantes.

L'objet de cet article est de décrire de façon unifiée les résultats qui sont aujourd'hui accessibles dans ce champs. Nous n'empruntons pas un chemin historique (la tâche serait démesurée !) mais exposons les résultats et/ou méthodes marquants qui structurent les recherches actuelles. De cette perspective se dégagent naturellement plusieurs directions de recherche et plus simplement quelques problèmes bien délimités. Certains sont clairement dégagés du texte, d'autres lui restent mé lés. Si notre état des lieux se veut si possible exhaustif, des travaux y sont oubliés, certains par choix, d'autres par oubli, d'autres encore par ignorance et d'autres enfin parce que le plan d'exposition choisi a omis de s'en approcher. De plus ce plan est lui-même fortement influencé par mes propres travaux que l'on trouvera plus souvent cités que d'autres ... Tout en présentant mes excuses aux auteurs et aux lecteurs pour ce biais et ces oublis, j'espère que la promenade proposée s'avèrera effectivement illuminante. Finalement signalons ici que le lecteur est supposé familier avec la théorie analytique classique et ses notations

Contents

2. Vers une théorie multiplicative algorithmique

L'émergence de l'informatique met à notre disposition de nouvelles techniques et qu'il s'agit d'exploiter. La gamme des possibilités étant gigantesque, il me semble important de définir des critères, que je nommerai *de développement durable :*

(1) Facile à utiliser.
(2) Facile à prolonger.
(3) Résultat "de base".

Les deux premières exigences imposent que l'on sache stocker l'information. Ce problème est souvent résolu par la détermination d'un modèle. C'est ce que fait Dress [24] pour la fonction sommatoire de la fonction de Möbius. Il montre

Théorème 1. *Pour* $X \in [33, 10^{12}]$*, on a* $|\sum_{n\le X}\mu(n)| \le \frac{3}{5}\sqrt{X}$.

Ce qui résume le résultat de six mois de calculs en une simple phrase. Ramaré & Rumely [67] puis Bennett [2] ont suivi le même chemin pour $\psi(X; q, a)$. En l'occurence, il y a deux informations à stocker qui sont la méthode (ce que font les journaux pour les algorithmes. Mais où stocke-t-on les codes ?) et le résultat. L'utilisation d'un modèle (ici le terme d'erreur est modélisé par $C\sqrt{X}$) rend aussi les calculs utilisables.

A priori, les calculs de $\pi(X)$ de Deléglise & Rivat [16], [17] appartiennent à une autre démarche, mais je pense qu'il va y avoir des évolutions. Signalons ici l'algorithme théoriquement performant de Lagarias & Odlyzko [43] qui n'a toujours pas été mis en pratique. Comme ces auteurs se contentent de calculer la valeur de $\pi(X)$ en un point et que cette information est en elle-même inutile, ces calculs n'entrent pas à ce stade dans le cadre restrictif du développement durable. Mais le travail de Dress [24] montre que cette approche pourrait et devrait avoir un impact dans notre cadre. En effet, Dress ne se contente pas d'énumérer les entiers et de calculer leur fonction de Möbius, il vérifie la propriété requise en certains points assez rapprochés et la prolonge de façon triviale. Cette approche n'a pas encore été mise en place pour $\psi(X; q, a)$ mais j'imagine qu'elle le sera dans un avenir proche et cela constitue notre premier problème :

Problème 7. *Montrer que* $|\frac{\phi(q)}{X}\psi(X; q, a) - 1|/\sqrt{X}$ *reste inférieur à 10 si* $q \leq 100$*, la classe* a *est première à* q *et* $X \leq 10^{20}$*.*

Notons que Ramaré & Rumely dans [67] utilisent une approche bien plus primitive, puisqu'ils énumèrent tous les nombres premiers et leurs puissances.

Sous un autre aspect, les théorèmes à la Jaeschke [39] sont précieux et respectent les critères de développement durable. En voici un exemple :

Théorème 2. *L'entier impair* $p < 10^{12}$ *est un pseudo-premier fort pour les bases 2, 13, 23 et 1662803 si et seulement si* p *est premier et distinct de 13, 23 et 1662803.*

Pour ce qui est des intervalles entre les nombres premiers, là aussi les résultats sont magnifiques de simplicité. Par exemple Oliveira [60] obtient

Théorème 3. *L'intervalle entre deux nombres premiers consécutifs* $\leq 2.10^{15}$ *est au plus 1132.*

Poursuivant des travaux de Young & Potler[88] puis de Nicely [58]. Un résultat un peu plus élaboré est celui de Ramaré & Saouter [68], mais ce n'est pas vraiment un résultat qui vérifie le critère d'élémentarité ci-dessus : nous vérifions en effet que tout intervalle d'une forme donnée contient bien un nombre premier tant que ces intervalles restent inférieurs à 10^{20}, mais un tel calcul semble très difficile à réutiliser et a priori inutile à poursuivre ! Toutefois le problème qui s'y pose, et y est partiellement résolu, devrait lui connaître un avenir : il s'agit de savoir engendrer des familles denses de nombres dont la primalité est rapide à tester et dont beaucoup de membres sont premiers. Ce qui est évidemment un problème clé (qui est à la base des résultats de Deshouillers, te Riele et Saouter dans [22] et [78] par exemple) et sous cet aspect, les diverses techniques plus ou moins baroques pour déterminer des octuplets de nombres premiers, des nombres premiers très grands, de formes données, ou autre contribuent à développer le domaine bien que cela ne se conforme pas aux critères de développement durable.

Sur les sommes de deux nombres premiers, là encore, les résultats sont simples et Oliveira [61] obtient :

Théorème 4. *Tout entier pair* $\leq 2.10^{15}$ *est somme de deux nombres premiers.*

Poursuivant un travail de Richstein [69] et de Granville, van de Lune & te Riele [37]. Il s'agit bien d'un résultat "de base" car il y a un saut qualitatif entre les nombres premiers et les sommes de deux nombres premiers impairs : on conjecture que ces derniers forment l'ensemble de tous les entiers pairs ≥ 6. Par contre il n'y en a pas pour ce qui est des sommes de trois nombres premiers, où les résultats se décomposent en fait en deux : des sommes de deux nombres premiers et un résultat d'intervalle. Nous rencontrons une situation similaire pour les sommes de 5 bicarrés (voir Deshouillers, Hennecart & Landreau [20] et [21]) et un peu plus compliquée pour les sommes de 5 (et non 4) cubes, voir l'article [3] de Bertault, Ramaré & Zimmermann et [19] de Deshouillers, Hennecart & Landreau.

Citons enfin le cas de la constante de Linnik, où Wagstaff dans [84] à la fois établit un modèle et explore numériquement sa validité. En notant par $P(a,q)$ le plus petit nombre premier congru à a modulo q, il obtient :

Théorème 5. *Pour* $q \in [11, 50\,000]$*, nous avons*

$$\max_{(a,q)=1} P(q,a) \leq 2.21\phi(q)(\operatorname{Log} q)\operatorname{Log}\phi(q).$$

3. Moyenne de fonctions arithmétiques

Toutes les preuves qui donnent des resultats explicites demandent à un moment ou à un autre d'évaluer des moyennes de fonctions arithmétiques. Même lorsque ces fonctions sont multiplicatives et positives ou nulles, donner une évaluation correcte n'est pas simple. Riesel et Vaughan [70] traitent complètement par la méthode de convolution le cas des fonctions qui ressemblent à 1 ou à la fonction de diviseurs, approche qui est systématisée par l'auteur dans le lemme 3.2 de [64]. Par exemple évaluer convenablement $\sum_{n\leq X}\phi(n)$ ne pose plus aucun problème.

Dans la section 3 de [57], Moree s'intéresse à un cas plus général, où la fonction multiplicative vaut $\kappa > 0$ en moyenne sur les nombres premiers (au sens que l'on donne à cette expression dans le contexte du crible). Ses résultats qui se basent sur la méthode de Levin & Fainleib [46] sont assez satisfaisants étant donné la généralité, mais par exemple ne suffisent pas pour montrer que l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers sont $\equiv 1[3]$ admet un cardinal toujours inférieur à celui des entiers dont tous les facteurs sont $\equiv 3[4]$, alors même que ces quantités sont asymptotiquement largement différentes. Notons que la méthode réduit l'étude aux cas de moyennes sur les nombres premiers, moyennes qui seront examinées plus bas. Enfin, au niveau du théorème 11 nous verrons que El Marraki utilise une méthode qui ressemble beaucoup à celle employée ici, mais dans le cas de la fonction de Möbius …dont le lecteur aura reconnu qu'elle n'est pas positive ! Une uniformisation des méthodes et résultats me semble donc possible autant que souhaitable.

Terminons par une série de remarques.

Les quantités que Moree étudient interviennent notoirement dans le crible supérieur de Selberg. À ce propos, signalons le problème suivant :

Problème 8. *Donner une forme explicite au lemme fondamental du crible combinatoire.*

Il est souvent nécessaire de majorer de façon explicite des moyennes de types

$$\sum_{n\le x, P(n)\neq 0} d(P(n))^s$$

où P est un polynôme à coefficients entiers et s un entier positif. Le lecteur trouvera dans l'article de Landreau [44] une méthode efficace, poursuivant des travaux de van der Corput et de Wolke. Cette méthode a été utilisé et raffiné dans des cas particuliers dans l'article de Deshouillers et Dress [18]. qui concerne les sommes de 19 bicarrés.

Les moyennes de fonctions additives se ramènent directement à celles de moyennes sur les nombres premiers, et qui sont l'objet principal des sections suivantes.

4. Un monde à la Chebyshef : les hypothèses de Riemann

Les calculs précédents portent directement sur les fonctions qui nous intéressent et par conséquent ne contiennent d'informations que sur les petits entiers. La situation se modifie profondément si l'on considère la transformée de Mellin. En effet, pour parler vite, si $\mathcal{G}$ est une fonction et $M\mathcal{G}$ sa transformée de Mellin, les petites valeurs de $M\mathcal{G}$ correspondent aux oscillations à grande échelle de $\mathcal{G}$, alors que les grandes valeurs décrivent un comportement plus fin, où “grandes” signifie “de grande partie imaginaire” puisqu'entre la transformée de Fourier et celle de Mellin, le plan complexe subit une rotation d'un quart de tour.

Pour fixer un peu la discussion, décrivons ce qui se passe pour les nombres premiers. Nous avons

$$(1)\quad \sum_{n\ge 1}\Lambda(n)\mathcal{F}(n/X) = M\mathcal{F}(0)\cdot X - \sum_{\rho} M\mathcal{F}(\rho)\cdot X^{\rho} + \mathcal{O}(\|\mathcal{F}\|_1 \operatorname{Log} X)$$

pour une fonction $\mathcal{F}$ suffisamment régulière et où la somme porte sur les zéros non-triviaux de ζ. En prenant pour $\mathcal{F}$ une fonction C^2 qui ressemble à la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$, nous obtenons une approximation de $\psi(X)$ dans le membre de gauche. Pour ce qui est du membre de droite, supposons que nous ayons démontré que tous les zéros de ζ de partie imaginaire inférieure en valeur absolue à $T_0 \geq 10$ soient sur la droite $\Re s = \frac{1}{2}$. Alors l'écart entre $\sum_{n\geq 1} \Lambda(n)\mathcal{F}(n/X)$ et $M\mathcal{F}(0) \cdot X$ est majoré à constante multiplicative près par

$$(2) \qquad \big(\|\mathcal{F}\|_1 X^{1/2} T_0 + \|\mathcal{F}''\|_1 X T_0^{-1}\big) \operatorname{Log} T_0$$

et ce tout simplement en utilisant $|M\mathcal{F}(\rho)| \ll \|\mathcal{F}\|_1$ si $|\gamma|$ est inférieur à T_0 et $|M\mathcal{F}(\rho)| \ll \|\mathcal{F}''\|_1/|\gamma|^2$ sinon. À partir de ce principe, en calculant les zéros de ζ de petite hauteur, nous obtenons directement des inégalités de Chebyshef sur ψ. Ces calculs sont détaillés dans la section suivante. Ce schéma fonctionne bien sûr dans un cadre plus large, et notamment pour évaluer $\psi(X; q, a)$.

Si le principe précédent est bien connu, sa mise en pratique est plus délicate et deux questions se posent. Pour fixer les idées, restreignons-nous encore au cas de ζ et de ψ. Supposons que l'on ait vérifié l'hypothèse de Riemann pour ζ jusqu'à une hauteur T_0.

(Lissage) Quel est le meilleur ε que l'on peut obtenir dans l'inégalité $|\psi(x) - x| \leq \varepsilon x$ pour disons $x \geq T_0^3$? (Cette dernière condition fait que la région infinie sans zéros dont nous parlerons plus bas est sans effet).

(Scénario) Quel est le meilleur Δ que l'on peut obtenir dans l'inégalité $\psi(x) - \psi(x(1 - 1/\Delta)) > 0$ pour disons $x \geq T_0^3$?

À l'heure actuelle, nous avons $\varepsilon \ll (\operatorname{Log} T_0)/T_0$ (voir [67]) avec une preuve sans fioritures similaire à celle donnée ci-dessus. Une même approche donnerait $\Delta \gg T_0/(\operatorname{Log} T_0)$ mais dans [68], nous montrons que $\Delta \gg T_0/\sqrt{\operatorname{Log} T_0}$. Ce résultat n'est pas que théorique puisque nous montrons qu'il nous fait gagner numériquement un facteur 5. Nous obtenons

Théorème 6. *Si $X \geq 10^{11}$, l'intervalle $]X(1 - \Delta^{-1}), X]$ contient un nombre premier, où $\Delta = 28\ 314\ 000$.*

Ce qui améliore d'un facteur 2000 le précédent résultat de Schoenfeld [80]. Ce résultat illustre très bien le problème du lissage et celui du scénario. Nous considérons des sommes $\sum_p \Lambda(n)\mathcal{F}(n/X)$ avec $\mathcal{F}$ une fonction positive et à support au voisinage de 1. Nous cherchons dans un premier temps la fonction de plus petit support possible en traitant la somme en fonction des zéros de ζ. Il s'agit là d'un problème extêmal sur des lissages. Nous pourrions nous arrêter ici, mais il se trouve que le scénario peut être amélioré à peu de frais : comme nous avons imposé à notre fonction d'avoir un grand nombre de ses dérivées nulles aux extrémités du support, elle accuse un pic au milieu et est très petite sur les côtés. Toutefois la méthode analytique ne peut pas montrer que les nombres premiers détectés ne s'accumulent pas précisément sur les bords puisque sinon, nous prendrions une fonction de support plus petit. Le salut vient alors de l'inégalité de Brun-Titchmarsh qui est elle capable de nous donner un tel renseignement. En tout état de cause, je ne vois aucune raison pour ne pas réussir à obtenir $\Delta \gg T_0$ dans ce dernier problème.

5. Un monde à la Chebyshef : l'apport de l'algorithmique

Après nous être concentrés sur l'utilisation de la transformée de Mellin, nous parlons un peu des méthodes et résultats connus dans cette zone.

Sur ζ, si le travail de van de Lune, te Riele et Winter [83] donne le résultat de base, il faut à present citer une approche de calcul en réseau avec Wedeniwski [87]. Ces auteurs se basent sur une équation fonctionnelle approchée, et plus précisemment sur une expression explicite de la formule de Riemmann-Siegel prouvée par Gabcke [34].

Théorème 7. *Tout zéro $\beta + i\gamma$ de la fonction ζ de Riemann qui n'est pas sur le droite critique (i.e. $\beta \neq \frac{1}{2}$) vérifie $|\gamma| \geq 15\,400\,000\,000$.*

Par ailleurs Schönhage a développé un algorithme très performant qui a été mis en pratique par Odlyzko [59].

Sur les fonctions L et tant qu'il s'agit de la dépendance en T, les calculs de Rumely [77] sont les plus récents et ont été étendus pour les besoins de la cause dans Bennett [2]. Les hauteurs sont petites et seule la formule d'Euler MacLaurin est utilisée.

Sur les fonctions L mais du côté de la dépendance en le conducteur q, les résultats sont là encore disparâtes et en plein essor :

(1) Pour les zéros dans un disque du style $|\rho - 1| \leq 5/\operatorname{Log} q$, il ne semble pas qu'il y ait de calculs spécifiques de fait, et récemment Brown [4] a proposé un algorithme adapté à ce problème mais dont la complexité en l'état de la théorie et dans les cas qui nous concernent ici reste décevante. Sur des bases différentes Omar [62] dispose d'un algorithme très performant permettant d'établir que le triangle de sommets $\frac{1}{2}$, 1 et $1 + i$ ne contient aucun zéro, mais là encore personne n'a à ce jour utilisé cette technique pour effectivement vérifier à grande échelle que les fonctions L n'admettaient pas de zéros dans cette région.

(2) Concernant encore les régions sans zéros pour les fonctions L au voisinage de 1, remarquons que si une minoration en 1 de la valeur de $L(\cdot, \chi)$ semble être le point crucial, le théorème des acroissements finis ne nous permet d'en déduire qu'une région de la forme $|\rho - 1| \ll \operatorname{Log}^{-2} q$. Il me semble que l'on devrait pouvoir obtenir une zone plus grande.

(3) Pour les zéros réels des fonctions L de Dirichlet d'un caractère quadratique, Rosser [73] et [74] a montré que ces fonctions n'ont pas de zéros réels si $q \leq 986$, mais cela ne nous donne pas de régions sans zéros. Hanrot [38] et Louboutin [50] me disent tous les deux (en 2002 donc) qu'ils peuvent pousser facilement les calculs jusqu'à $q \leq 10\,000$.

(4) Pour les zéros réels des fonctions L de Dirichlet d'un caractère quadratique impair, Low [51] a montré que ces fonctions n'ont pas de zéros réels si $d \leq 593\,000$, calculs étendus par Watkins [85] jusqu'à $d \leq 300\,000\,000$.
(5) Enfin signalons qu'une approche par équation fonctionnelle approchée a été mise en place par Montgomery & Weinberger [56] pour déterminer certains zéros très proches de l'axe réel, approche reprise par Watkins [86].

Ce résumé témoigne de la cacophonie qui règne dans le domaine mais aussi de l'intérêt qu'il suscite. Il est évident qu'il faudrait uniformiser ces résultats.

Une remarque ici. Des zéros calculés, nous connaissons la partie réelle, mais la partie imaginaire est elle simplement stockée dans des fichiers gigantesques sans aucune mesure précise de déviation d'un modèle précis. Autant dire que ces parties imaginaires sont inutilisables en l'état. Par exemple, pour améliorer les résultats dans le problème des petits intervalles, il faudrait considérer $\sum_\rho X^{i\gamma}$ pour γ de l'ordre d'un T tel que $\operatorname{Log} T$ et $\operatorname{Log} X$ soient comparables. Comme à cette hauteur, les γ sont à peu près espacés de $1/\operatorname{Log} T$, on peut espérer des compensations dans la somme. En fait nous *connaissons* les parties imaginaires de ces zéros, nous avons une idée de leur distribution, mais nul n'a à ce jour déterminé une mesure exacte de la déviation des données numériques par rapport au modèle idéal, mesure que l'on puisse utiliser pour majorer des sommes comme celle décrite ci-dessus.

Problème 9. *Montrer que* $|\sum_\rho X^{i\gamma}| \leq \frac{1}{10}\sum_\rho 1$ *pour* X *de l'ordre de* 10^{20}*, où la somme porte sur tous les zéros de* ζ *de partie imaginaire* $\leq 10^8$.

6. Un monde à la Chebyshef : autres méthodes

Il y a d'autres méthodes plus ou moins ad hoc, à commencer par celle pour la fonction sommatoire de la fonction de Möbius de Costa-Pereira [13] qui élabore sur l'idée originale de Tchebyshef (comme dans [12] d'ailleurs) pour montrer que $\psi(X) \simeq X$. Cette méthode a été développée par Dress & El Marraki [25] puis par Cohen, Dress & El Marraki [11]. Ils obtiennent par exemple

Théorème 8. *Si* $X \geq 2160535$*, on a* $|\sum_{n\leq X} \mu(n)| \leq X/4345$.

Et dans [31], El Marraki obtient

Théorème 9. *Si* $X \geq 603218$*, on a* $|\sum_{n\leq X} \mu(n)/n| \leq 0.0004603$.

Ensuite, pour les majorations de $|L(1,\chi)|$, il nous faut citer Le [45], puis Louboutin [47], [48], [49] qui s'appuie sur une représentation intégrale que l'on utilise pour le calcul des fonctions L et l'auteur [65] qui lui s'appuie sur un type bien particulier d'équation fonctionnelle approchée et sur [82]. Cela donne en particulier

Théorème 10. *Pour tout caractère primitif pair de conducteur $q > 1$, nous avons $|L(1,\chi)| \le \frac{1}{2}\operatorname{Log} q$.*

Je n'ai aucune idée de la borne valable dans le cas des caractères de conducteur impair, puisque j'ai trouvé une exception modulo 4283, 4309, 5567, 5711 et enfin 5759, mais je n'ai pas poussé les calculs assez loin (jusqu'à 5800). De façon assez surprenante, à part 5711, les autres modules ne sont pas des nombres premiers.

Signalons enfin un problème où un modèle devrait être accessible à partir des travaux de Granville & Soundarajan [36] et qui concerne le module de $L(1,\chi)$ lorsque χ parcourt disons les caractères primitifs d'un module fixé. L'intérêt d'un modèle apparaît clairement dans l'exemple suivant : j'ai établi des tables du maximum de $|L(1,\chi)| - \frac{1}{2}\operatorname{Log} q$, tables qui demandent de calculer tous les modules en question. Mais de ces données n'est conservé que le maximum alors qu'un modèle pour la distribution de ces modules permettrait de stocker bien plus d'informations.

Problème 10. *Établir quelles sont les données nécessaires sur les $|L(1,\chi)|$ pour que les mêmes calculs permettent d'obtenir le maximum de $|L(1,\chi)| - \eta\operatorname{Log} q$ où le maximum est pris sur tous les caractères primitifs modulo q, et ce pour chaque η entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$. Nous demandons de connaître ce maximum à 0.001 près.*

7. Un monde à la Chebyshef : Les conversions

La théorie analytique contient beaucoup de résultats et/ou de remarques philosophique disant que tel résultat est équivalent à tel autre, ou s'en déduit. Par exemple le terme d'erreur de $\psi(X) - X$ est censé être "équivalent" au terme d'erreur de $\sum_{n\le X}\Lambda(n)/n - \operatorname{Log} X + \gamma$ et à celui de $\sum_{n\le X}\mu(n)$. Cependant personne à ce jour n'a retravaillé ces questions avec les outils modernes. Il faut noter qu'il y a un obstacle théorique. En effet, il existe deux techniques classiques : l'une consiste à utiliser une intégration par parties et perd un factor Log dans le terme d'erreur, l'autre est plus sophistiquée mais est limitée à un terme d'erreur de type $\mathcal{O}(1/\sqrt{\operatorname{Log} X})$.

Dans [66] cette limitation est levée et je prouve que si

$$\max_{X\ge X_0}\frac{\phi(q)}{X}\max_{a \bmod {}^*q}|\psi(X;q,a) - X/\phi(q)| \le \varepsilon_q \tag{3}$$

alors il s'en déduit directement

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a[q]}}\frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{1}{\phi(q)}\operatorname{Log} X + C(q,a) + \mathcal{O}\left(\varepsilon_q\frac{\sqrt{q}\operatorname{Log}^2 q}{\phi(q)}\right) \tag{4}$$

pour $X \ge q^2X_0$. Moree [57] a aussi des travaux qui vont dans cette direction.

Mais le problème d'évaluer la fonction sommatoire de Möbius de cette façon reste ouvert.

Problème 11. *Montrer que*

$$\max_{X\geq 100X_0} |\sum_{n\leq X}\mu(n)| \leq 100 \max_{X\geq X_0} |\sum_{n\leq X}\Lambda(n)-X| + X^{3/4}$$

pour tout $X_0 \geq 10^6$.

Les constantes 100 introduites dans l'énoncé sont bien sûr sans intéret. Il s'agit de "constantes de taille raisonable".

Le mieux que l'on sache faire sur ce problème est dû à El Marraki [30] améliorant un travail de Schoenfeld [79]. Ces auteurs suivent la méthode de Levin & Fainleib [46] qu'ils adaptent dans leur cas puisqu'ils ne travaillent pas avec une fonction multiplicative positive. Cette méthode limite le gain à $\mathcal{O}(1/\operatorname{Log} X)$ et des itérations permettent de poursuivre. Son énorme avantage est certainement d'exister et d'être la seule qui à l'heure actuelle donne des majorations explicites de cette fonction sommatoire tendant vers 0 à l'infini. Mais elle manque clairement d'efficacité par exemple comparée à (4). Voici un résultat typique qu'obtient El Marraki dans [30] et [31] :

Théorème 11. *Pour* $X \geq 33$, *on a* $\left|\sum_{n\leq X}\mu(n)/n\right| \leq 0.2185/\operatorname{Log} X$.

Il faut noter que le théorème 9 reste supérieur à ce résultat tant que $474 \geq \operatorname{Log} X$!

8. Plongeon vers l'infini

Nous nous tournons à présent vers des résultats qui donnent des termes d'erreur qui sont des fonctions tendant vers zéro quand le paramètre de taille tend vers l'infini. Leur preuve utilise toujours les techniques décrites dans la partie précédente et est complétée par une partie "asymptotique". Dans le genre de problème qui nous intéressent, *tous* les résultats de ce type reposent sur une région sans zéros infinie pour la transformée de Mellin et je tiens à préciser que si peu de résultats ont été publiés sur le sujet, c'est bel et bien par manque de réussite et non par manque d'intérêt ! La situation semble changer depuis peu. Voilà ce que l'on sait sur ces régions sans zéros.

Rosser [72] puis Rosser & Schoenfeld [76] établirent une région infinie qui a très longtemps resistée aux améliorations, mais récemment Kadiri en 2002 a obtenu [40]

Théorème 12. *La fonction* ζ *de Riemann n'a pas de zéros dans la zone* $\sigma \geq 1 - 1/(R\operatorname{Log} t)$ *avec* $R = 5.71$.

Un peu auparavant, en 2001, Ford [32] avait lui obtenu $R = 8.463$. Le travail de Ford est dans la continuité de celui de Heath-Brown et s'appuye sur la méthode locale de Landau (où l'on travaille dans un disque de rayon $\mathcal{O}(1/\operatorname{Log} t)$ autour du zéro éventuel) alors que le travail de Rosser & Schoenfeld s'appuye lui sur la méthode globale de de la Vallée-Poussin. Kadiri a elle une approche intermédiaire, locale en un sens, mais où le disque où l'on travaille a un rayon de l'ordre de l'unité. Signalons que Ford s'appuye aussi sur une majoration de ζ sur la droite critique, majoration due à Cheng & Graham [10]. En application directe de ce genre de région sans zéros, citons deux élégants résultats dû à Dusart dans [26], [27] et [28] :

Théorème 13. *Pour $X \geq 5393$, on a $\pi(X) \geq X/(\operatorname{Log} X - 1)$.*

Théorème 14. *Pour $X \geq 3275$, l'intervalle $[X, X + X/(2\operatorname{Log}^2 X)]$ contient un nombre premier.*

Il est possible aussi d'obtenir une région sans zéros pour les fonctions L de Dirichlet. Ceci a été fait par par McCurley [55] avec le même R que celui de Rosser, à l'éventuel zéro exceptionnel près, bien sûr. Kadiri [41] obtient quant à elle :

Théorème 15. *Les fonctions L de Dirichlet primitive modulo q n'ont aucun zéro dans la région*

$$\sigma \geq 1 - 1/(R \log \max(q, q|t|))$$

sauf peut-être une d'entre elles qui correspondrait alors à un caractère quadratique et qui aurait au plus un zéro réel dans cette zone, avec $R = 6.44$.

Résultat qu'elle complète comme McCurley le faisait déjà d'une mesure l'éloignement de deux zéros exceptionnels. La conjonction de ces deux résultats constitue ce que l'on appelle des théorèmes de "Landau-Page". Signalons ici que des résultats numériquement pleinement satisfaisants commenceraient à émerger à partir de $R = 1$.

Yuanyou Cheng [9] puis Ford [32] obtiennent des régions sans zéros de types Vinogradov, notamment en se basant sur Cheng [8] et Ford [33]. Voici un résultat de Ford

Théorème 16. *La fonction ζ de Riemann n'a pas de zéros dans la zone $\sigma \geq 1 - 1/(58(\operatorname{Log}|t|)^{2/3}(\operatorname{Log}\operatorname{Log}|t|)^{1/3})$ et $|t| \geq 3$.*

Bien qu'asymptotiquement meilleure, cette région sans zéros est en fait pire que la région prouvée par Kadiri tant que $t \leq 10^{4170}$.

9. Sommes d'exponentielles : des versions explicites ?

Nous abordons enfin la zone des termes d'erreur à proprement parler, ou encore des moyennes de fonctions arithmétiques oscillantes. Là les résultats sont d'embryonnaires à inexistants. Détaillons un corollaire d'un résultat de Granville & Ramaré [35] :

Théorème 17. *Soit X, y deux paramètres vérifiant $1 \leq Y \leq X^{3/5}/5$. Alors*

$$\left|\sum_{Y<n\leq 2Y} \Lambda(n)e(x/n)\right| \leq \tfrac{50}{3}\, Y^{1-1/2^{k+3}}(\operatorname{Log}(16Y))^{11/4}$$

où k est le plus petit entier verifiant $1+\frac{1}{2}(k+2^{-k}) \geq (\operatorname{Log} X)/\operatorname{Log} Y$.

Pour $Y=\sqrt{X}$, nous avons $k=2$ et ce que gagne notre borne sur l'estimation triviale n'est inférieur à 1 que si $10^{287} < Y$! Pourtant notre exemple n'a rien d'extrême.

Daboussi & Rivat dans [14] s'intéressent au polynôme trigonométrique $\sum_{n\leq X} \Lambda(n)e(n\alpha)$ dont les majorations pour α au voisinage d'un rationel à grand dénominateur constituent une des clés du théorème des trois nombres premiers de Vinogradov. Afin de donner au lecteur une idée de la puissance relative du résultat, signalons qu'il implique que

$$\left|\sum_{n\leq X} \Lambda(n)e(na/q)\right| \leq \tfrac{2}{5}X \quad , \quad (q=[\operatorname{Log}^3 X],\ (a,q)=1,\ X\geq 10^{200}).$$

La fonction ζ de Riemann ou les fonctions L de Dirichlet sont de même nature que des termes d'erreurs et là encore les résultats de pointe sont très insatisfaisants. Signalons ici un article méconnu de Rademacher [63] qui montre entre autres que

Théorème 18. *Si les paramètres réels t, σ et η sont choisis de sorte que $-\frac{1}{2} \leq -\eta \leq \sigma \leq 1+\eta$ et si χ est un caractère de Dirichlet primitif modulo $q>1$, alors*

$$|L(\sigma+it,\chi)| \leq \left(\frac{q|1+\sigma+it|}{2\pi}\right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}} \zeta(1+\eta).$$

En 2002, Ford [33] améliore le résultat de Y. Cheng [8] et obtient

Théorème 19. *Pour $t\geq 2$ et $\sigma \geq \frac{1}{2}$, nous avons*

$$|\zeta(\sigma+it)| \leq 76.2\, t^{4.45\max(0,1-\sigma)^{3/2}} \operatorname{Log}^{2/3} t.$$

Pour ce qui est de majorations moins ambitieuses, Cheng & Graham [10] obtiennent un joli résultat :

Théorème 20. *Pour $t\geq 3$, nous avons*

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)| \leq \min(6\,t^{1/4}+57\,,\ 3\,t^{1/6}\operatorname{Log} t).$$

En ce qui concerne les sommes de caractères, signalons ici qu'une version explicite correcte de l'inégalité de Burgess est toujours attendue ainsi que la mise en place explicite de la méthode de Stephens [81] pour majorer $|L(1,\chi)|$, ce qui pourrait s'avérer plus simple.

Problème 12. *Montrer que $|L(1,\chi)| \leq \frac{2}{5}\operatorname{Log} q+2$ pour tout caractère primitif χ modulo $q\geq 1000$.*

10. Des utilisations

Ces régions sans zéros ont des utilisations plus ou moins directes.

Bien sûr, de tels résultats nous donne des inégalités avec de bons termes d'erreur pour la distribution des nombres premiers, comme dans Rosser & Schoenfeld [75] et [76] ou Schoenfeld [80]. Le même type de résultat est valable pour la distribution des nombres premiers en progressions arithmétiques ce qui a été fait par McCurley [53], [54]. Dans [29], Dusart donne des majorations très explicites de $[\psi(X;a,q)-X/\phi(q)]/X$ qui tendent vers zero comme $\exp(-c\sqrt{\operatorname{Log} X})$ pourvu que l'on ait vérifié que les fonctions L de module q n'aient pas de zéros de partie imaginaire ≤ 1000 hors de la droite critique. Ce résultat est d'ailleurs a priori lié à la région sans zéros de McCurley et il faudrait voir ce qui advient lorsque l'on utilise une autre région, comme celle Kadiri.

La région sans zéros de type Vinogradov a elle aussi été utilisée par Cheng [6], [7]. Il montre qu'il existe un nombre premier entre deux cubes consécutifs n^3 et $(n+1)^3$, pourvu que $n \geq n_0$ où ce n_0 est numérique et vaut ... $10^{6000000000000000000}$. Cet exemple illustre assez clairement il me semble (!) qu'il reste des progrès à réaliser.

À l'heure actuelle il est tout à fait correct de dire que nous savons démontrer de façon explicite des théorèmes de Chebyshev, mais nous ne savons pas produire efficacement des termes restes de meilleure qualité. La difficulité des démonstrations est alors d'essayer de n'utiliser que de telles bornes et non des formules asymptotiques. En termes d'informations, les preuves doivent être quasiment sans aucune perte. Dans mon papier [64] sur les sommes de 6 nombres premiers est développée une “méthode du cercle majorante” qui permet d'utiliser pleinement ce genre d'informations sur des problèmes additifs, mais uniquement pour des majorations.

Les preuves de transcendance (voir l'article de Bennett [2] par exemple) utilisent couramment des résultats effectifs sur la distribution des nombres premiers en progressions arithmétiques.

En ce qui concerne les sommes de 7 cubes, dans [3], nous nous restreignons à déterminer des nombres premiers dans une progression de module 111, mais dans le cas général, il s'agit de déterminer un nombre premier inférieur à X dans une progression d'un module de taille $\operatorname{Log}^{12} X$, ce qui est évidemment bien plus difficile.

Signalons que dans un registre très proche, récemment le problème explicite des sommes de 16 bicarrés a été résolu par la conjonction des efforts de Deshouillers, Hennecart, Kawada, Landreau et Wooley [21], [20] et [42] : tout entier ≥ 13793 est somme d'au plus seize bicarrés.

Enfin, les majorations de $L(1,\chi)$ servent presque exclusivement à majorer des nombres de classes comme dans les articles de Le [45] ou de Louboutin [49].

11. Perspectives et absents

Comme nous venons de le voir, ou plutôt de l'entre-apercevoir, ce domaine est en fort regain, du double fait de l'apport de l'informatique et de résultats théoriques nouveaux. À l'heure actuelle, il y a un large déséquilibre entre les calculs qui ont été réalisés pour ζ et ceux pour les fonctions L de Dirichlet, et de manière générale, la dépendance en T est largement plus étudiée que la dépendance en q. Par exemple, nous n'avons que peu de résultats concernant les petits intervalles contenant des nombres premiers congrus à 1 modulo 3, et presque aucun concernant la constante de Linnik. Dans une zone intermédiaire, nous ne disposons aussi d'aucune estimée de densité des zéros qui soit numériquement palpable.

Les moyens informatiques ayant explosés en capacité ces dernières années, les approches en réseau semblent les plus prometteuses. D'un côté, le code et plus généralement l'information est centralisée et de l'autre, les tâches sont réparties. C'est l'approche adoptée par le groupe de Wedeniwski ou par celui d'Oliviera e Silva et qui est depuis assez longtemps utilisée pour les tests de primalité de grands nombres. La centralisation des codes est vitale puisque cela permet de les vérifier plutôt que d'avoir des morceaux ad hoc éparpillés, de les documenter et ensuite de les améliorer.

Il me semble qu'il est temps de conclure ce tour d'horizon !

References

[1] R.J. Backlund. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *C. R. Acad. Sci.*, 158:1979–1981, 1914.

[2] M. Bennett. Rational approximation to algebraic numbers of small height: the Diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *J. reine angew. Math.*, 535:1–49, 2001.

[3] F. Bertault, O. Ramaré, and P. Zimmermann. On Sums of Seven Cubes. *Math. Comp.*, 68:1303–1310, 1999.

[4] F. Brown. Li's criterion and zero-free regions of L functions. *preprint*, 2002.

[5] Jingrun Chen and Tianze Wang. On the odd Goldbach problem. *Acta Math. Sin.*, 32(5):702–718, 1989.

[6] Y. Cheng. Explicit estimates on prime numbers. *preprint.*

[7] Y. Cheng. On primes between consecutive cubes. *preprint.*

[8] Y. Cheng. An explicit upper bound for the Riemann zeta-function near the line $\omega = 1$. *Rocky Mountain J. Math.*, 29:115–140, 1999.

[9] Y. Cheng. An explicit zero-free region for the Riemann zeta-function. *Rocky Mountain J. Math.*, 30(1):135–148, 2000.

[10] Y. Cheng and S.W. Graham. Explicit estimates for the Riemann zeta function. *preprint.*

[11] H. Cohen, F. Dress, and M. El Marraki. Explicit estimates for summatory functions linked to the Möbius μ-function. *Univ. Bordeaux 1*, Pré-publication(96-7), 1996.

[12] N. Costa Pereira. Estimates for the Chebyshev Function $\psi(x) - \theta(x)$. *Math. Comp.*, 44:211–221, 1985.

[13] N. Costa Pereira. Elementary estimates for the Chebyshev function $\psi(x)$ and for the Möbius function $m(x)$. *Acta Arith.*, 52:307–337, 1989.

[14] H. Daboussi and J. Rivat. Explicit upper bounds for exponential sums over primes. *Math. Comp.*, 79(233):431–447, 2001.

[15] Ch. de la Vallée-Poussin. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Belg. Mém. cour. in* 8°, LIX:74pp, 1899.

[16] M. Deléglise and J. Rivat. Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method. *Math. Comp.*, 65(213):235–245, 1996.

[17] M. Deléglise and J. Rivat. Computing $\psi(x)$. *Math. Comp.*, 67(224):1691–1696, 1998.

[18] J.-M Deshouillers and F. Dress. Sommes de diviseurs et structure multiplicative des entiers. *Acta Arith.*, 49(4):341–375, 1988.

[19] J.-M. Deshouillers, F. Hennecart, and B. Landreau. 7373170279850 (with an appendix by I. Gusti Putu Purnaba). *Math. Comp.*, 69(229):421–439, 2000.

[20] J.-M. Deshouillers, F. Hennecart, and B. Landreau. Waring's problem for sixteen biquadrates – numerical results. *Math. Comp.*, 69(229):421–439, 2000.

[21] J.-M. Deshouillers, F. Hennecart, and B. Landreau. Waring's problem for sixteen biquadrates – numerical results. *J. Théor. Nombres Bordx.*, 12(2):411–422, 2000.

[22] J.-M. Deshouillers, H.J.J. te Riele, and Y. Saouter. New experimental results concerning the Goldbach conjecture. In J.P. Buhler, editor, *Algorithmic number theory*, number 1423 in Lect. Notes Comput. Sci., 3rd international symposium, ANTS-III, Portland, OR, USA, June 21-25, 1998.

[23] L.E. Dickson. All integers except 23 and 239 are sums of 8 cubes. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45:588–591, 1939.

[24] F. Dress. Fonction sommatoire de la fonction de Möbius 1. Majorations expérimentales. *Exp. Math.*, 2(2), 1993.

[25] F. Dress and M. El Marraki. Fonction sommatoire de la fonction de Möbius 2. Majorations asymptotiques élémentaires. *Exp. Math.*, 2(2), 1993.

[26] P. Dusart. Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers. *http://www.unilim.fr/laco/theses/1998/T1998_01.pdf*, page 173 pp, 1998.

[27] P. Dusart. Inégalités explicites pour $\psi(x)$, $\theta(x)$, $\pi(x)$ et les nombres premiers. *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 21(2):53–59, 1999.

[28] P. Dusart. The kth prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Math. Comp.*, 68(225):411–415, 1999.

[29] P. Dusart. Estimates for $\theta(x; k, \ell)$ for large values of x. *Math. Comp.*, 71(239):1137–1168, 2001.

[30] M. El Marraki. Fonction sommatoire de la fonction μ de Möbius, majorations asymptotiques effectives fortes. *J. Théor. Nombres Bordx.*, 7(2), 1995.

[31] M. El Marraki. Majorations de la fonction sommatoire de la fonction $\frac{\mu(n)}{n}$. *Univ. Bordeaux 1*, Pré-publication(96-8), 1996.

[32] K. Ford. Zero-free regions for the Riemann zeta function. *Proceedings of the Millenial Conference on Number Theory*, Urbana, IL, 2000.

[33] K. Ford. Vinogradov's integral and bounds for the Riemannn zeta function. *Proc. London Math. Soc.*, 85:565–633, 2002.

[34] W. Gabcke. *Neue Herleitung und explizite Restabschaetzung der Riemann-Siegel-Formel.* PhD thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Georg-August-Universitt zu Göttingen, 1979.

[35] A. Granville and O. Ramaré. Explicit bounds on exponential sums and the scarcity of squarefree binomial coefficients. *Mathematika*, 43(1):73–107, 1996.

[36] A. Granville and K. Soundarajan. The distribution of values of $L(1,\chi)$. *http://www.math.uga.edu/ andrew/Postscript/L1chi.ps*, 2002.

[37] A. Granville, J. van de Lune, and H.J.J. te Riele. Checking the Goldbach conjecture on a vector computer. *Number Theory and Applications (Nato) Ed. Mollin*, 265:423–433, 1989.

[38] G. Hanrot. Communication privée. 2002.

[39] G. Jaeschke. On strong pseudoprimes to several bases. *Math. Comp.*, 61(204):915–926, 1993.

[40] H. Kadiri. Une région explicite sans zéros pour la fonction ζ de Riemann. *À paraître dans Acta Arith.*, 2002.

[41] H. Kadiri. Zero-free regions for Dirichlet l-functions. *soumis à J. Number Theory*, 2002.

[42] K. Kawada and T. Wooley. On the Waring-Goldbach problem for fourth and fifth powers. *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.*, 83(1):1–50, 2001.

[43] J.C. Lagarias and A.M. Odlyzko. Computing $\pi(x)$: An analytic method. *J. Algorithms*, 8:173–191, 1987.

[44] B. Landreau. A new proof of a theorem of van der Corput. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 21(4):366–368, 1989.

[45] M. Le. Upper bounds for class numbers of real quadratic fields. *Acta Arith.*, 68:141–145, 1994.

[46] B.V. Levin and A.S. Fainleib. Application of some integral equations to problems of number theory. *Russian Math. Surveys*, 22:119–204, 1967.

[47] S. Louboutin. Majorations explicites de $|L(1,\chi)|$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316:11–14, 1993.

[48] S. Louboutin. Majorations explicites de $|L(1,\chi)|$ (suite). *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323:443–446, 1996.

[49] S. Louboutin. Majorations explicites du résidu au point 1 des fonctions zêta. *J. Math. Soc. Japan*, 50:57–69, 1998.

[50] S. Louboutin. Communication privée. 2002.

[51] M. Low. Real zeros of the Dedekind zeta function of an imaginary quadratic field. *Acta Arith.*, 14:117–140, 1968.

[52] K.S. McCurley. An effective seven cube theorem. *J. Number Theory*, 19(2):176–183, 1984.

[53] K.S. McCurley. Explicit estimates for the error term in the prime number theorem for arithmetic progressions. *Math. Comp.*, 42:265–285, 1984.

[54] K.S. McCurley. Explicit estimates for $\theta(x;3,\ell)$ and $\psi(x;3,\ell)$. *Math. Comp.*, 42:287–296, 1984.

[55] K.S. McCurley. Explicit zero-free regions for Dirichlet l-functions. *J. Number Theory*, 19:7–32, 1984.

[56] H. Montgomery and P. Weinberger. Notes on small class numbers. *Acta Arith.*, 24:529–542, 1973.

[57] P. Moree. Chebyshev's bias for composite numbers with restricted prime divisors. *??*, 2002.

[58] T.R. Nicely. New maximal primes gaps and first occurences. *Math. Comp.*, 68(227):1311–1315, 1999.

[59] A. Odlyzko. The 10^{22}-nd zero of the Riemann zeta function. *Contemporary Math. series, Proc. Conference on Dynamical, Spectral and Arithmetic Zeta-Functions*, 290:139–144, 2001.
[60] T. Oliveira e Silva. Gaps between consecutive primes. *http://www.ieeta.pt/˜tos/gaps.html*, 2002.
[61] T. Oliveira e Silva. Goldbach conjecture verification. *http://www.ieeta.pt/˜tos/goldbach.html*, 2002.
[62] S. Omar. Localization of the first zero of the Dedekind zeta function. *Math. Comp.*, 70(236):1607–1616, 2001.
[63] H. Rademacher. On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications. *Math. Z.*, 72:192–204, 1959.
[64] O. Ramaré. On Snirel'man's constant. *Ann. Scu. Norm. Pisa*, 21:645–706, 1995.
[65] O. Ramaré. Approximate Formulae for $L(1,\chi)$. *Acta Arith.*, 100:245–266, 2001.
[66] O. Ramaré. Sur un théorème de Mertens. *Manuscripta Math.*, 2002.
[67] O. Ramaré and R. Rumely. Primes in arithmetic progressions. *Math. Comp.*, 65:397–425, 1996.
[68] O. Ramaré and Y. Saouter. Short effective intervals containing primes. *J. Number Theory*, 2002.
[69] J. Richstein. Conference talk. *Winnipeg*, 1999.
[70] H. Riesel and R.C. Vaughan. On sums of primes. *Arkiv för mathematik*, 21:45–74, 1983.
[71] J.B. Rosser. The n-th prime is greater than $n \log n$. *Poc. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 45:21–44, 1938.
[72] J.B. Rosser. Explicit bounds for some functions of prime numbers. *American Journal of Math.*, 63:211–232, 1941.
[73] J.B. Rosser. Real roots of Dirichlet l-series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:906–913, 1949.
[74] J.B. Rosser. Real roots of Dirichlet l-series. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, pages 505–514, 1950.
[75] J.B. Rosser and L. Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, 6:64–94, 1962.
[76] J.B. Rosser and L. Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev Functions $\vartheta(x)$ and $\psi(x)$. *Math. Comp.*, 29(129):243–269, 1975.
[77] R. Rumely. Numerical Computations Concerning the ERH. *Math. Comp.*, 61:415–440, 1993.
[78] Y. Saouter. Checking the odd Goldbach conjecture up to 10^{20}. *Math. Comp.*, 67(222):863–866, 1998.
[79] L. Schoenfeld. An improved estimate for the summatory function of the Möbius function. *Acta Arith.*, 15:105–123, 1960.
[80] L. Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev Functions $\vartheta(x)$ and $\psi(x)$ ii. *Math. Comp.*, 30(134):337–360, 1976.
[81] P.J. Stephens. Optimizing the size of $L(1,\chi)$. *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.*, 24:1–14, 1972.
[82] J.D. Vaaler. Some Extremal Functions in Fourier Analysis. *Bull. A. M. S.*, 12:183–216, 1985.
[83] J. Van de Lune, H.J.J. te Riele, and D.T.Winter. On the zeros of the Riemann zeta-function in the critical strip. IV. *Math. Comp.*, 46(174):667–681, 1986.
[84] S. Wagstaff. Greatest of the Least Primes in Arithmetic Progressions Having a Given Modulus. *Math. Comp.*, 33(147):1073–1080, 1979.
[85] M. Watkins. Real zeros of real odd Dirichlet L-functions. *http://www.math.psu.edu/watkins/papers.html*, 2000.

[86] M. Watkins. Resolution of class number 100 for imaginary quadratic fields. *http://www.math.psu.edu/watkins/papers.html*, 2000.
[87] S. Wedeniwski. On the Riemann hypothesis. *http://www.hipilib.de/zeta/index.html*.
[88] A. Young and J. Potler. First occurence prime gaps. *Math. Comp.*, 52(185):221–224, 1989.

UMR 8524, Université Lille I, 59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex
E-mail address: ramare@agat.univ-lille1.fr