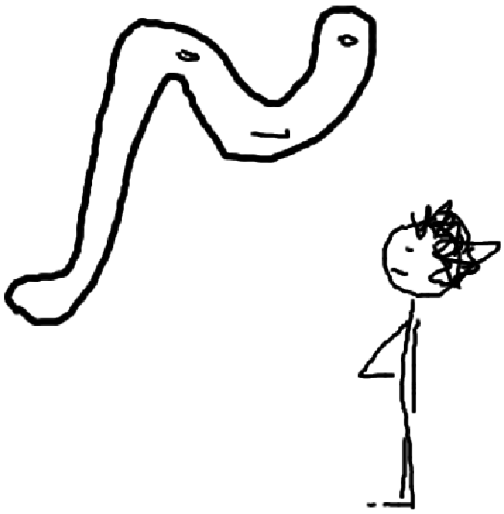
Moebius et Caractères Additifs

Un théorème de Davenport



Olivier Ramaré

Moebius et caractères additifs

Voici une preuve moderne d'une propriété notée par Davenport en 1937. Cette propriété est revenue sur le devant de la scène, notamment depuis [Green & Tao, 2008], [Green & Tao, 2012], [Bourgain et al.*, 2012] et [Green* et al.*, 2012]. Fichier* `Davenport-4.tex`*.*

1. Introduction

Davenport s'est très vite aperçu que le travail fondamental de [*Vinogradov*, 1937] sur les nombres premiers s'adaptait à la fonction de Moebius, ce qui a été publié dans [*Davenport*, 1937a] [*Davenport*, 1937b]. Voici le résultat obtenu.

Théorème. *Pour tout $A \geq 1$ et tout $X \geq 2$, nous avons*

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \Big| \sum_{n \leq X} \mu(n) e(n\alpha) \Big| \ll_A X/(\log X)^A.$$

Il y un regain d'intérêt pour ce problème et nous donnons ici une preuve moderne, qui trouve son origine dans [*Gallagher*, 1968], lequel a largement inspiré [*Vaughan*, 1975]*. Cela complète d'ailleurs [*Ramaré*, 2009, Lemme 10.2]. L'identité (13) utilisée ici est une simplification de la décomposition utilisée dans [*Ramaré*, 2013].

Nous fixons dorénavant $A \geq 1$. Nous définissons dès maintenant deux paramètres auxiliaires :

$$z = (\log X)^{2A+6}, \quad Q = \frac{X}{(\log X)^{5A+12}}.$$

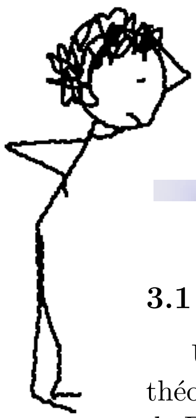
Nous supposons en outre X suffisamment grand pour avoir $2 \leq z \leq z^2 \leq Q$.

2. Approximation rationnelle

Nous découpons le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en voisinages de points rationnels, en utilisant le théorème de Dirichlet.

Nous prenons

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \quad q \leq Q, \ (a,q) = 1, \ |\beta| \leq \frac{1}{qQ}.$$



3. Traitement des petits dénominateurs ($q \leq z$)

3.1 Version multiplicative

Une analyse impliquant les séries de Dirichlet montre classiquement le théorème suivant. Soit C_1 et C_2 deux constantes > 0. Pour tout caractère de Dirichlet χ (non nécessairement primitif) de module $q \leq (\log X)^{C_1}$, nous

*. Voir aussi d'un côté [*Vinogradov*, 1937] voir aussi [*Vinogradov*, 2004], et, d'un autre côté [*Bohr & Landau*, 1914]

avons

$$\sum_{n \leq X} \mu(n)\chi(n) \ll_{C_1,C_2} X/(\log X)^{C_2}. \tag{3}$$

À partir de cela, il est facile de démontrer le résultat suivant.

Étape 1

Pour toute toutes constantes positives C_1 et C_3, et pour tout b et tout $q \leq (\log X)^{C_1}$, nous avons

$$\sum_{\substack{n \leq X,\\ (n,q)=1}} \mu(n)e(nb/q) \ll_{C_1,C_3} X/(\log X)^{C_3}. \tag{4}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $(b, q) = 1$ quitte à ôter le facteur commun. En effet, la fonction

$$f_{b/q} : n \mapsto \begin{cases} e(na/q) & \text{si } (n,q) = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5}$$

est périodique de période q et de support le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Elle s'écrit donc comme une combinaison linéaire de caractères de Dirichlet modulo q, et cette combinaison est facile à déterminer grâce à la structure hermitienne. Il vient

$$\begin{aligned} f_{b/q} &= \sum_{\chi \mod q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \mod q,\\ (n,q)=1}} e(nb/q)\overline{\chi(n)}\chi \\ &= \sum_{\chi \mod q} \frac{1}{\varphi(q)} \chi(b) \sum_{\substack{n \mod q,\\ (n,q)=1}} e(n/q)\overline{\chi(n)}\chi \end{aligned}$$

ce qui montre que les coefficients qui interviennent sont de norme moindre que $\sqrt{q}/\phi(q)$. Il est facile de conclure en prenant $C_2 = C_3 + \frac{1}{2}C_1$ dans (3). □

3.2 Version additive, au point a/q

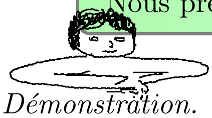
Il s'agit à présent de s'affranchir de la condition $(n, q) = 1$ dans (4). Énonçons le résultat final.

Étape 2

Nous avons, pour tout $A, C \geq 1$ et tout $q \leq (\log X)^{2A+6}$,

$$\sum_{n \leq X} \mu(n) e(na/q) \ll X/(\log X)^C. \tag{6}$$

Nous prendrons $C = 6A + 12$.



Démonstration. Nous écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq X} \mu(n)e(na/q) &= \sum_{\delta|q} \sum_{\substack{n\leq X,\\ (n,q)=\delta}} \mu(n)e(na/q) \\ &= \sum_{\delta|q} \mu(\delta) \sum_{\substack{m\leq X/\delta,\\ (m,q)=1}} \mu(m)e(m\delta a/q)\end{aligned}$$

et nous pouvons utiliser (4) puisque nous n'y supposons pas que $(a, q) = 1$, avec comme paramètres $C_1 = 2A + 6$ et $C_3 = C + 1$. Il vient

$$\sum_{n\leq X} \mu(n)e(na/q) \ll \sum_{\delta|q} \frac{X}{\delta(\log X)^{C+1}} \ll \frac{X}{(\log X)^C}$$

dès lors que $q \leq (\log X)^{C_1}$. □

3.3 Version additive, au voisinage du point a/q

Nous utilisons le raccourci $h(n) = \mu(n)e(na/q)$. De plus nous posons $C = 6A + 12$ et employons l'inégalité $|\beta| \leq 1/Q$. Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq X} h(n)e(n\beta) &= \sum_{n\leq X} h(n)\Big(e(X\beta) - 2i\pi\beta \int_n^X e(t\beta)dt\Big) \\ &= e(X\beta)\sum_{n\leq X} h(n) - 2i\pi\beta \int_1^X e(t\beta) \sum_{n\leq t} h(n)dt \\ &\ll \frac{X}{(\log X)^A} + \frac{1}{Q}\int_1^{X/(\log X)^C} tdt + \frac{X^2}{Q(\log X)^C} \ll \frac{X}{(\log X)^A}.\end{aligned}$$

Cette façon de faire est classique de la méthode du cercle, et dont il convient de retenir la philosophie : si nous connaissons $\sum_{n\leq Y} h(n)$ non pas en $Y = X$ uniquement, mais pour des valeurs de Y variant (ici entre $X/(\log X)^C$ et X), alors nous pouvons en déduire $\sum_{n\leq Y} h(n)e(\beta n)$ pour des β assez petits.

Notons formellement le résultat obtenu.

Étape 3

Nous avons, pour tout $A, C \ge 1$ et tout $q \le (\log X)^{2A+6}$,

$$\sum_{n \le X} \mu(n) e\Big(n\Big(\frac{a}{q} + \beta\Big)\Big) \ll X/(\log X)^C. \tag{7}$$

pourvu que $|\beta| \le 1/Q$. Nous prendrons $C = 6A + 12$.

4. Traitement des grands dénominateurs ($z < q \le Q$)

Nous utilisons dans cette partie la notation suivante :

$$\mu_z(d) = \begin{cases} \mu(d) & \text{si } d \le z, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{8}$$

et nous prenons aussi une notation pour sa série de Dirichlet

$$M(s) = \sum_{d \le z} \frac{\mu(d)}{d^s}. \tag{9}$$

4.1 Une identité

La preuve la plus conceptuelle part de la série de Dirichlet :

$$V(s) = \sum_{n \ge 2} \Big(\sum_{d|n} \mu_z(d)\Big)/n^s = \sum_{n \ge 2} v(n)/n^s. \tag{10}$$

Il faut remarquer que la sommation porte sur les entiers $n > z$. Cette série a la bonne idée de (presque) se factoriser :

$$1 + V(s) = \zeta(s) M(s) \tag{11}$$

Voici la décomposition formelle de 1 que nous utilisons :

$$1 = -V + (1 + V).$$

Nous en déduisons une décomposition de $1/\zeta$:

$$\frac{1}{\zeta} = -\frac{1}{\zeta} V + M.$$

Le travail est ici presque fini mais il faut raffiner un peu et considérer $(1/\zeta - M)$ dans le premier terme au lieu de $1/\zeta$, ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\zeta} = -\Big(\frac{1}{\zeta} - M\Big) V - MV + M$$

et donc enfin, en utilisant à nouveau $V = M\zeta - 1$,

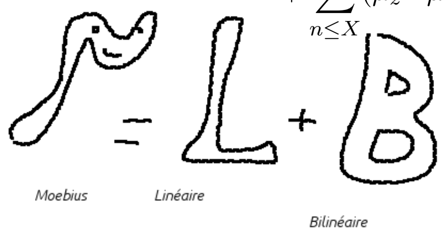
$$\frac{1}{\zeta} = -\Big(\frac{1}{\zeta} - M\Big)V - M^2\zeta + 2M.$$

Cette identité se traduit de façon ponctuelle par [*] :

$$\mu = -(\mu - \mu_z)\star v + \mu_z \star \mu_z \star \mathbb{1} + 2\mu_z.$$

Cette décomposition nous permet d'écrire

$$\sum_{n\le X}\mu(n)e(n\alpha) = -\sum_{n\le X}\big((\mu-\mu_z)\star v\big)(n)e(n\alpha) + \sum_{n\le X}(\mu_z\star\mu_z\star\mathbb{1})(n)e(n\alpha) + 2\sum_{n\le z}\mu(n)e(n\alpha). \quad (14)$$



La première somme est dite *bilinéaire*, appellation due à son traitement, ou *de type II* chez Vinogradov, la seconde est dite *linéaire* par opposition, ou *de type I* chez Vinogradov, et la troisième est simplement un terme reste, ici borné par $2z$. La fonction $n \mapsto (\mu - \mu_z) * v(n)$ est assez incompréhensible, mais nous n'allons utiliser finalement que sa forme en tant que produit de convolution et des informations en moyenne facile à glaner.

4.2 Traitement de la forme linéaire

Nous commençons par

$$\sum_{n\le X}(\mu_z\star\mu_z\star\mathbb{1})(n)e(n\alpha) = \sum_{d\le z^2}(\mu_z\star\mu_z)(d)\sum_{m\le X/d}e(dm\alpha).$$

Comme $z^2 \le Q/2$, nous avons $|d\alpha - \frac{da}{q}| \le \frac{1}{2q}$. Lorsque $q \nmid d$, nous sommons simplement la somme interne (il s'agit simplement d'une série géométrique) :

$$\Big|\sum_{m\le X/d}e(dm\alpha)\Big| \le 1/|\sin(\pi d\alpha)| \le 1/\|da/q\| \le q \quad (15)$$

où $\|\alpha\|$ est la distance au plus proche entier et où nous avons utilisé l'inégalité classique

$$\frac{1}{\sin(\pi x)} \le \frac{1}{2x} \quad (0 < x \le 1/2).$$

*. Le lecteur pourrait aussi simplement développer $(\mathbb{1} * \mu_z - e)\star(\mu - \mu_z)$ où e est l'élément neutre du produit de convolution arithmétique, et vaut 1 en $n = 1$ et 0 partout ailleurs (et dont la série de Dirichlet est simplement la fonction constante égale à 1).

ce qui nous donne la contribution :

$$\Bigg|\sum_{\substack{d\leq z^2,\\ q\nmid d}}(\mu_z\star\mu_z)(d)\sum_{m\leq X/d}e(dm\alpha)\Bigg| \leq z^2q \leq z^2Q = \frac{X}{(\log X)^A}.$$

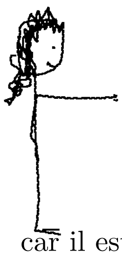
Lorsque $q|d$, nous nous contentons de la majoration triviale de $|e(dm\alpha)|$ par 1, c'est à dire

$$\Bigg|\sum_{m\leq X/d}e(dm\alpha)\Bigg| \leq X/d.$$

Par conséquent,

$$\Bigg|\sum_{\substack{d\leq z^2,\\ q|d}}(\mu_z\star\mu_z)(d)\sum_{m\leq X/d}e(dm\alpha)\Bigg| \leq X\sum_{\substack{d\leq z^2,\\ q|d}}\frac{\tau(d)}{d}.$$

Nous utilisons alors les inégalités simples $d(q\ell) \leq d(q)d(\ell)$ et $d(q) \leq 2\sqrt{q}$:



$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\leq z^2,\\ q|d}}\frac{\tau(d)}{d} &\leq \frac{\tau(q)}{q}\sum_{\ell\leq z^2/q}\frac{\tau(\ell)}{\ell} \leq \frac{\tau(q)}{q}(1+2\log z)^2\\ &\leq \frac{2}{\sqrt{q}}(1+2\log z)^2\end{aligned}$$

car il est facile de vérifier que

$$\sum_{\ell\leq L}\frac{\tau(\ell)}{\ell} \leq \Bigg(\sum_{m\leq L}\frac{1}{m}\Bigg)^2 \leq (1+\log L)^2. \tag{17}$$

Il faut noter que nous pouvons bien sûr avoir $z^2/q < 1$ ci-dessus, mais la majoration $\sum_{\ell\leq z^2/q}\frac{\tau(\ell)}{\ell} \leq (1+2\log z)^2$ n'en reste pas moins valable. Cela nous donne bien ce que nous attendions, soit

$$\Bigg|\sum_{\substack{d\leq z^2,\\ q|d}}(\mu_z\star\mu_z)(d)\sum_{m\leq X/d}e(dm\alpha)\Bigg| \ll \frac{X}{(\log X)^A}.$$

Nous combinons (16) et (18) pour obtenir finalement

Étape 4

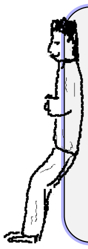
$$\Bigg|\sum_{d\leq z^2}(\mu_z\star\mu_z)(d)\sum_{m\leq X/d}e(dm\alpha)\Bigg| \ll \frac{X}{(\log X)^A}. \tag{19}$$

4.3 Traitement de la forme bilinéaire

La partie précédente ne nécessite pas de matériel particulier, et aurait pu être faite bien avant Vinogradov. L'apport de ce dernier vient de la reconnaissance de la partie bilinéaire et de son traitement possible. Vinogradov explique très bien cela dans l'introduction de son livre [*Vinogradov,* 2004]. Il emploiera la même technique pour étudier les sommes d'exponentielles. D'une façon simpliste, il s'agit d'employer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui a pour effet de créer une variable lisse pour laquelle nous nous retrouvons à sommer une série géométrique. Pour pouvoir employer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sans trop de pertes, il faut d'abord avoir des sommes de longueur à peu près égales, et comme cette longueur est réglée par X/m dans le membre de gauche de (20), il faut que m soit de taille à peu près fixe.

Préparation : décomposition en sommes diadiques

Nous montrons facilement que



$$\sum_{dm \le X} \mu(d)v(m)e(dm\alpha) \ll (\log X) \max_{\substack{z \le M \le X/z,\\ M \le M' \le 2M}} \Bigg| \sum_{\substack{dm \le X,\\ M \le m \le M'}} \mu(d)v(m)e(dm\alpha) \Bigg|.$$

Dit de façon plus rapide : moyennant la perte d'un facteur $\log X$, nous pouvons localiser la variable m. Nous pourrions aussi localiser la variable d, en partant au départ de la somme $\sum_{X/2<n\le X} \mu(n)e(n\alpha)$. Ceci est inutile dans le traitement simpliste que nous proposons ci-dessous.

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Nous sommons sur la variable m est premier et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, i.e. nous écrivons

$$\Bigg| \sum_{\substack{dm \le X,\\ M \le m \le M'}} \mu(d)v(m)e(dm\alpha) \Bigg|^2 \le \sum_{M \le m \le M'} |v(m)|^2 \times \sum_{d_1, d_2 \le \frac{X}{M}} \mu(d_1)\mu(d_2) \sum_{M \le m \le X/\max(d_1,d_2)} e((d_1 - d_2)m\alpha).$$

Le phénomène annoncé a lieu : dans la seconde somme, la variable m est *lisse*, ce par quoi nous entendons qu'elle n'est affectée d'aucun poids arithmétique. Il nous reste à sommer une série géométrique.

Voici une parenthèse concernant $\sum_{M \leq m \leq M'} |v(m)|^2$. Nous avons (en partie de façon similaire à (17) car $|v(m)| \leq \tau(m)$)

$$\begin{aligned}\sum_{M \leq m \leq M'} |v(m)|^2 &\leq M' \sum_{m \leq M'} \frac{|v(m)|^2}{m} \leq M' \sum_{m \leq M'} \frac{\tau(m)^2}{m} \\ &\leq M' \sum_{d_1, d_2 \leq M'} \frac{\tau(d_1 d_2)}{d_1 d_2} \leq M' \sum_{d_1, d_2 \leq M'} \frac{\tau(d_1)\tau(d_2)}{d_1 d_2} \\ &\leq M' \Bigg(\sum_{d_1 \leq M'} \frac{\tau(d_1)}{d_1} \Bigg)^2\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{M \leq m \leq M'} |v(m)|^2 \leq M' \bigg(\sum_{m \leq M'} \frac{1}{m} \bigg)^4 \leq M'(1 + \log M')^4 \ll M(\log X)^4.$$

Un traitement un peu plus soigneux montrerait que cette somme est en fait $\ll M(\log X)^3$, mais la perte du $\log X$ n'est pas importante.

Nous utilisons encore (voir (15)), lorsque $q \nmid d_1 - d_2$ et $X/z \leq Q/4$:

$$\Big| \sum_{M \leq m \leq X/\max(d_1, d_2)} e((d_1 - d_2) m\alpha) \Big| \leq 1/|\sin(\pi(d_1 - d_2)\alpha)| \leq 1/\|(d_1 - d_2)a/q\|.$$

Nous introduisons la variable $r = d_1 - d_2$, et donc

$$\begin{aligned}\Bigg| \sum_{\substack{dm \leq X, \\ M \leq m \leq M'}} \mu(d) v(m) e(dm\alpha) \Bigg|^2 &\ll M(\log X)^4 \\ &\times \Bigg(\sum_{\substack{d_1, d_2 \leq \frac{X}{M}, \\ d_1 \equiv d_2 [q]}} M + \frac{X}{M} \sum_{\substack{-X/M \leq r \leq X/M, \\ r \not\equiv 0 [q]}} 1/\|ra/q\| \Bigg).\end{aligned}$$

La première somme est au plus

$$M \sum_{d_1 \leq \frac{X}{M}} \sum_{\substack{d_2 \leq \frac{X}{M}, \\ d_1 \equiv d_2 [q]}} 1 \leq M \sum_{d_1 \leq \frac{X}{M}} \left(\frac{X}{Mq} + 1 \right) \leq X \left(\frac{X}{Mq} + 1 \right).$$

Quant à la seconde somme, nous découpons l'intervalle $[1, X/M]$ en intervalles de longueur $\leq q$. Sur chacun de ces intervalles, disons I, nous avons*

$$\sum_{\substack{r\in I,\\ r\not\equiv 0[q]}} \frac{1}{\|ra/q\|} \leq 2q(1+\log(q/2)) \ll q\log q.$$

Par ailleurs, il y a au plus $\frac{X}{qM}+1$ tels intervalles I, ce qui nous donne finalement

$$\begin{aligned}\Bigg|\sum_{\substack{dm\leq X,\\ M\leq m\leq M'}} \mu(d)v(m)e(dm\alpha)\Bigg|^2 &\ll M(\log X)^4\left(\frac{X^2}{Mq}+X+\left(\frac{X}{Mq}+1\right)q\log q\right)\\ &\ll \left(\frac{X^2}{q}+XM+q\log q\right)(\log X)^4 \ll \frac{X^2}{(\log X)^{2A+2}}. \quad (21)\end{aligned}$$

Si nous portons (21) dans (20) et ajoutons (19), nous avons montré que

Étape 5

$$\sum_{n\leq X}\mu(n)e(n\alpha) \ll \frac{X}{(\log X)^A} \quad (22)$$

lorsque $z < q \leq Q$.

References

Bohr, H., & Landau, E. 1914. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann*. *C. R.*, **158**, 106–110.

Bourgain, J., Sarnak, P., & Ziegler, T. 2012. Distjointness of Moebius from horocycle flows. 17pp. arXiv :1110.0992.

Davenport, H. 1937a. On some infinite series involving arithmetical functions. *Quart. J. Math., Oxf. Ser.*, **8**, 8–13.

Davenport, H. 1937b. On some infinite series involving arithmetical functions. II. *Quart. J. Math., Oxf. Ser.*, **8**, 313–320.

*. En effet, comme a est premier à q, la fonction $r \mapsto (ar+q\mathbb{Z})$ couvre au plus tout $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, chaque point au plus une fois, à l'exception du point 0 qui n'est pas atteint. Lorsque $ar+q\mathbb{Z}$ est égal à un $s+q\mathbb{Z}$ avec $1\leq s\leq q/2$, nous utilisons $\|ar/q\| = s/q$. Sinon, $ar+q\mathbb{Z}$ est égal à un $q-s+q\mathbb{Z}$ avec encore $1\leq s\leq q/2$ et $\|ar/q\| = s/q$. La somme des $1/\|ar/q\|$ pour r dans I mais non divisible par q vaut donc au plus $2\sum_{1\leq s\leq q/2} q/s$, d'où la majoration employée.

Gallagher, P.X. 1968. Bombieri's mean value theorem. *Mathematatika*, **15**, 1–6.

Green, B., & Tao, T. 2008. Quadratic uniformity of the Möbius function. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **58**(6), 1863–1935.

Green, B., & Tao, T. 2012. The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences. *Ann. of Math. (2)*, **175**(2), 541–566.

Green, B., Tao, T., & Ziegler, T. 2012. An inverse theorem for the Gowers $U^{s+1}[N]$-norm. *Ann. of Math. (2)*, **176**(2), 1231–1372.

Ramaré, O. 2009. *Arithmetical aspects of the large sieve inequality*. Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes, vol. 1. New Delhi : Hindustan Book Agency. With the collaboration of D. S. Ramana.

Ramaré, O. 2013. A sharp bilinear form decomposition for primes and Moebius function. *Submitted to Acta Mathematica Sinica*, 45pp.

Vaughan, R.C. 1975. Mean value theorems in prime number theory. *J. London Math Soc. (2)*, **10**, 153–162.

Vinogradov, I.M. 1937. Representation of an odd number as a sum of three primes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **15**, 291–294.

Vinogradov, I.M. 2004. *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*. Mineola, NY : Dover Publications Inc. Translated from the Russian, revised and annotated by K. F. Roth and Anne Davenport, Reprint of the 1954 translation.