CENT ET UN ANS APRÈS HADAMARD ET DE LA VALLÉE POUSSIN

Olivier Ramaré

Abstract. L'ensemble des entiers naturels muni de l'addition et de la multiplication permet de construire toute l'arithmétique actuelle. Comprendre l'addition est relativement simple : tout entier naturel s'obtient en ajoutant 1 un certain nombre de fois à 0, ce qui fait de 1 le bloc constructeur de l'addition. La multiplication s'avère un peu plus compliquée : tout entier naturel non nul s'obtient en multipliant 1 par des nombres "premiers", c'est à dire des nombres distincts de 1 et qui ne sont divisibles en nombres entiers que par eux-mêmes. L'étape suivante consiste à comparer ces deux structures, et pour ce faire, la communauté mathématique essaye de répondre aux questions du genre : "si l'on prend tous les entiers inférieurs à une borne fixée (disons X), entiers que l'on obtient donc en ajoutant au plus X fois 1 à 0, quels sont ceux qui ont une structure multiplicative fixée ?", et par exemple, quels sont ceux qui sont premiers ? Quels sont ceux qui ne sont pas divibles par un carré ? Ou combien y en a-t'il et comment sont-ils répartis ? Nous donnons ici un aperçu des méthodes et résultats dans ce vaste domaine.

Tout au long de cet exposé, nous dénotons par $\pi(X)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à X et la lettre p désignera systématiquement un nombre premier.

I. Heuristique[1] .

Après Euclide qui démontra qu'il existait une infinité de nombres premiers, l'avancée majeure dans l'étude de $\pi(X)$ est due à Euler aux alentours de 1748. Voici, en langage moderne, la façon dont il établit l'infinitude des nombres premiers, et ensuite celle qui a amené Gauss à conjecturer que $\pi(X) \sim X/\operatorname{Log} X$. Euler considère d'abord

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

pour $s = 2, 3, \dots$ et remarque que l'on peut réarranger les termes et obtenir

$$\begin{aligned}\zeta(s) = 1 &+ \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \\ &+ \frac{1}{2^s}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right).\end{aligned}$$

[1]Un auditeur m'a demandé à la fin de mon exposé ce que signifiait "heuristique". J'avoue ici ne pas voir su décider si je devais répondre à la déclaration "votre exposé était incompéhensible, je n'en ai même pas compris le premier mot", ou bien à la question à proprement parler, tant et si bien que je n'ai finalement rien répondu... Ce que je répare aujourd'hui : on peut librement remplacer "heuristique" par "approche conjecturale".

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

On reconnaît que le facteur de $1/2^s$ est $\zeta(s)$ et donc

$$(1-\frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots$$

la somme portant cette fois-ci sur les impairs. Il redécoupe la somme selon qu'un entier est multiple de 3 ou non et obtient

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 &+ \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots \\ &+ \frac{1}{3^s}\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots\right)\end{aligned}$$

et la série facteur de $1/3^s$ est celle de départ, d'où

$$(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots$$

où il ne reste plus que les entiers qui ne sont multiples ni de 2, ni de 3. Il continue ainsi et obtient

$$\left[(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{7^s})(1-\frac{1}{11^s})\dots\right]\zeta(s) = 1$$

où cette fois-ci le produit est pris sur tous les nombres premiers. De façon moderne, cela s'écrit

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\geq 2}\left(\frac{1}{1-1/p^s}\right) \qquad (s>1)$$

identité qui reste valable pour tout $s > 1$. Cette identité repose essentiellement sur l'unicité de la décomposition en facteurs premiers. Euler veut l'utiliser pour $s = 1$, ce qui est impossible puisque la série $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge, aussi restreint-il cette sommation aux entiers $\leq X$. Le problème n'en est que repoussé, puisqu'il s'agit alors de savoir comment on doit tronquer le produit sur les nombres premiers[2]. Euler décide (mais ne prouve pas) qu'il suffit de restreindre ce produit aux nombres premiers $\leq X$, ce qui lui fait affirmer que

$$\mathrm{Log}(\sum_{1\leq n\leq X}\frac{1}{n}) \sim \sum_{1\leq p\leq X}\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-1/p}\right) \qquad (X\to\infty).$$

Cela donne alors

$$\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,X \sim \sum_{p\leq X}\frac{1}{p} \qquad (X\to\infty). \tag{1}$$

Le talent de Euler réside certainement en ce que ce résultat est juste (et porte le nom de théorème de Mertens, bien qu'il y ait plusieurs résultats qui portent ce

[2]Il est possible de prouver qu'il y a une infinité de nombres premiers à partir de la divergence de $\sum_{n\geq 1} 1/n$: si le nombre de nombres premiers était fini, l'identité précédente montre que cette série serait bornée lorsque s tend vers 1 par valeur supérieure, ce qui n'est pas. En raffinant légèrement cet argument, on obtient que la série $\sum_{p\geq 2} 1/p$ est aussi divergente. L'argumentation de Euler raffine encore ce résultat.

nom). Puisque $\operatorname{Log}\operatorname{Log} X$ tend vers l'infini, il en déduit qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Au début du XIXème siècle, Gauss analyse (1) de la façon suivante. La probabilité qu'un nombre $\leq X$ soit premier est[3] $\pi(X)/X$. Par conséquent, entre X et $X+\delta$ (avec δ petit), il y a à peu près $\delta\pi(X)/X$ nombres premiers, ce qui nous donne

$$\sum_{X<p\leq X+\delta} \frac{1}{p} \simeq \frac{\delta\pi(X)/X}{X}.$$

Mais par ailleurs l'argument d'Euler donne[4]

$$\sum_{X<p\leq X+\delta} \frac{1}{p} = \sum_{1\leq p\leq X+\delta} \frac{1}{p} - \sum_{1\leq p\leq X} \frac{1}{p} \simeq \operatorname{Log}\operatorname{Log}(X+\delta) - \operatorname{Log}\operatorname{Log} X \simeq \frac{\delta}{X \operatorname{Log} X}.$$

En comparant les deux évaluations, nous obtenons

$$\pi(X) \simeq \frac{X}{\operatorname{Log} X}.$$

La version de Gauss est un peu plus fine et affirme qu'une bonne approximation de $\pi(X)$ est donnée par la fonction $\int_2^X dt/\operatorname{Log} t$, qui est elle-même équivalente à $X/\operatorname{Log} X$. Cette assertion de Gauss est vraie : il s'agit du théorème des nombres premiers que devaient démontrer indépendamment Hadamard et de la Vallée-Poussin en 1896/97.

[3] Tout simplement en utilisant la formule "cas favorables/cas possibles".
[4] puisque la dérivée de $\operatorname{Log}\operatorname{Log} t$ est $1/(t \operatorname{Log} t)$

II. L'approche de Riemann.

En 1859, Riemann publie un mémoire qui récapitulent ses recherches sur les nombres premiers. Il se contentera de décrire ses résultats, sans entrer dans les détails et il faudra 50 ans à la communauté mathématique pour reconstituer les démonstrations manquantes, sauf une après laquelle on court encore.

Riemann reprend l'approche de Euler, mais garde $s \neq 1$. Toutefois, et c'est l'une de ses plus grandes contributions, il considère des paramètres s complexes. Riemann considère

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \qquad (\Re s > 1)$$

et montre que cette fonction de la variable complexe peut être étendue en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en 1. Nous pouvons donc faire bien mieux que prendre $s = 1$, nous pouvons prendre $s < 1$!! Ensuite il en prend la dérivée logarithmique et découvre alors que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p\geq 2} \frac{\operatorname{Log} p}{p^s}\frac{1}{1-1/p^s} = -\sum_{p\geq 2}\left(\frac{\operatorname{Log} p}{p^s} + \frac{\operatorname{Log} p}{p^{2s}} + \dots\right).$$

Dans le membre de droite, nous n'avons que des nombres premiers et leurs puissances, et dans celui de gauche, nous avons le quotient de deux fonctions qui se définissent en termes de tous les entiers : il s'agit donc d'un moyen de déduire des propriétés des nombres premiers à partir de celles des entiers !

Dans cette approche, il y a deux difficultés mineures et une majeure : nous ne considérons pas la fonction qui vaut 1 sur les nombres premiers et 0 ailleurs, mais celle qui vaut $\operatorname{Log} p$ en p et 0 ailleurs. Comme la fonction Log est à variations très lentes, cela n'est pas important. L'autre épine vient de ce qu'il nous faut aussi considérer les puissances des nombres premiers. Là encore, il ne s'agit pas un vrai problème parce qu'il y a beaucoup moins de puissances de nombres premiers que de nombres premiers. Par exemple

$$\sum_{p\leq X}\sum_{2\leq k/p^k\leq X} 1 \leq \sum_{p\leq\sqrt{X}} \frac{\operatorname{Log} X}{\operatorname{Log} p} \leq \sqrt{X}\frac{\operatorname{Log} X}{\operatorname{Log} 2}$$

alors qu'il y a presque X nombres premiers jusqu'à X.

Nous passons maintenant à la difficulté majeure de cette méthode. Pour que l'approche de Riemann fonctionne, il faut pouvoir diviser par $\zeta(s)$, et c'est là tout le problème.

Il faut ici introduire une parenthèse sur l'influence de ce paramètre s. La fonction $\pi(X)$ correspond (voir la "preuve" de Euler-Gauss) à $s = 0$. Toutefois, nous disposons des valeurs $1+it$ avec $t \neq 0$ ce qui est suffisant pour reconstruire $\pi(X)$! C'est bien là l'avantage des méthodes complexes. Pour résumer, l'assertion $\zeta(1+it) \neq 0$ pour $t \neq 0$ équivaut au théorème des nombres premiers, et si l'on sait que $\zeta(\sigma+it) \neq 0$ avec $\sigma_0 < \sigma < 1$, la preuve donne alors un meilleur terme d'erreur. Plus σ_0 est petit, meilleur est ce terme d'erreur.

Regardons ce que vaut $1/\zeta(s)$:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\geq 2}\big(1-\frac{1}{p^s}\big) = \sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

où μ est la fonction de Moebius et vaut

$$\mu(\prod_{1\le i\le k} p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si tous les } \alpha_i \text{ valent } 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et bien sûr $\mu(1) = 1$. De façon plus concentrée, μ vaut 0 si un nombre est divisible par un carré (> 1 !) et sinon vaut 1 lorsque n admet un nombre pair de facteurs premiers et -1 dans le cas contraire. On sait qu'un entier sur $\pi^2/6 \simeq 1.64$ à peu près est sans facteurs carrés[5]. En ce qui concerne ces entiers, rien ne laisse présumer qu'il y ait une quelconque prédominance de ceux ayant un nombre pair de facteurs premiers sur ceux qui en ont un nombre impair, et en fait la distribution de cette parité semble “au hasard”[6]. Or, si l'on choisit des signes ± 1 pour tous les entiers sans facteurs carrés, ceci de façon indépendante et avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ pour le signe $+1$ et pour le signe -1, alors pour presque tout choix ξ_n on a

$$\Bigg| \sum_{\substack{n\le X \\ n \text{ sans facteurs carrés}}} \xi_n \Bigg| \le (1+o(1))\sqrt{\frac{6}{\pi^2}\, X \operatorname{Log}\operatorname{Log} X}.$$

Il n'y a aucune raison pour que μ soit une fonction spéciale, d'où l'on tire la conjecture

$$\exists \varepsilon(X) \xrightarrow{X\to\infty} 0 \quad \text{telle que} \quad \Bigg|\sum_{n\le X} \mu(n)\Bigg| \le \sqrt{X}\cdot X^{\varepsilon(X)} \qquad (\textit{Hypothèse de Riemann}).$$

Pour en revenir à $\zeta(s)$, cette estimation implique que ζ ne s'annulle pas pour $\Re s \in]\frac{1}{2}, 1[$, permettant ainsi de faire fonctionner le programme de Riemann à la perfection[7] et prouvant notamment l'encadrement

$$(HR) \qquad \int_2^X \frac{dt}{\operatorname{Log} t} - \frac{1}{7\pi}\sqrt{X}\operatorname{Log} X \le \pi(X) \le \int_2^X \frac{dt}{\operatorname{Log} t} + \frac{1}{7\pi}\sqrt{X}\operatorname{Log} X$$

pour $X \ge 2\,700$. Cet encadrement dit que $\int_2^X dt/\operatorname{Log} t$ est une excellente approximation de $\pi(X)$. À titre d'exemple, il nous garantit que $\pi(10^{10})$ est entre 491 200 000 et 491 500 000.

Riemann déclare savoir montrer que “presque” tous les zéros de $\zeta(s)$ sont sur la droite $\Re s = \frac{1}{2}$ en s'appuyant sur un nouveau développement de $\zeta(s)$, fait qu'il réaffirme dans une lettre postérieure à son mémoire, mais que les démonstrations sont encore trop compliquées pour qu'il puisse les publier. En 1896, indépendamment l'un de l'autre, Hadamard et de La Vallée Poussin réussissent à montrer que $\zeta(s)$ ne s'annulle pas dans une minuscule région autour de l'axe $\Re s = 1$, et cela leur donne immédiatement $\pi(X) \sim X/\operatorname{Log} X$. Hadamard est cependant très deçu puisqu'il a eu vent d'une lettre de Stieljes à Hermite, lettre datée du 11 Juillet

[5] Il y a plus d'entiers sans facteurs carrés que d'entiers pairs et pourtant nul ne sait répondre à la question simple suivante : soit m un entier sans facteur carrés et n l'entier sans facteurs carrés qui le suit immédiatement. Est-il vrai que $n - m \le m^{1/5}$ si m est assez grand ?

[6] Il suffit pour s'en convaincre d'examiner la liste des cinquante premiers entiers.

[7] D'un autre côté, on sait aussi que ζ admet une infinité de zéros sur la droite $\Re s = \frac{1}{2}$, le premier milliard d'entre eux a été calculé.

1895, dans laquelle Stieljes annonce qu'il sait démontrer l'hypothèse de Riemann (et même mieux). Hadamard ne publie donc sa preuve que parce qu'il pense qu'elle est plus simple que celle de Stieljes, bien que bien moins puissante ... et tant mieux pour lui, et pour de la Vallée-Poussin, puisque Stieljes s'était avancé un peu trop vite. Disons qu'il avait au moins 100 ans d'avance puisque l'hypothèse de Riemann n'est toujours pas établie.

III. L'idée de Dirichlet.

Jusqu'à présent, nous n'avons considérer que $\pi(X)$ et ne disposons donc que du paramètre X. Certes un nombre N est premier ou non selon que $\pi(N) - \pi(N-1)$ vaut 1 ou 0, mais il est connu que la méthode analytique présentée plus haut ne permettra d'accéder au mieux qu'à $\pi(N) - \pi(N - \sqrt{N})$ et qu'elle laissera toujours un "flou" de taille $\sqrt{N}$ autour de N. Un problème célèbre à ce niveau consiste à montrer que la suite $n^2 + 1$ contient une infinité de nombres premiers[8]

De nombreux mathématiciens (comme V.A.Lebesgue, Kronecker, Lucas, Sylvester, Hensel, Carmichael, Landau, van der Corput ...) se sont penchés sur une autre façon de détecter les nombres premiers, nommément en regardant leur distribution dans des progressions arithmétiques. Considérons le module 4 par exemple. Un entier est congru à 1, 2, 3 ou 4 modulo 4. Si cet entier est un nombre premier, il ne peut être congru[9] qu'à 1, 2 ou 3, et seul 2 est premier et congru à 2 modulo 4. Les nombres premiers restants tombent dans les classes 1 et 3 modulo 4. Comme il n'y aucune raison pour qu'une des deux classes soit privilegiée, il est logique de conjecturer que le nombre de nombres premiers congrus à 1 modulo 4 et inférieurs à X est $\sim \frac{1}{2}\pi(X)$.

En général, si q est un entier ≥ 1 et a un entier entre 1 et q, il ne peut exister de nombre premier $\equiv a[q]$, qui ne soit pas un diviseur de q, que si a est premier à q. Comme précédemment, une fois cet argument élémentaire utilisé, nous ne découvrons plus de raison pour qu'une classe soit privilégiée : les nombres premiers doivent par conséquent se répartir uniformément parmis les classes a qui restent. Il s'agit là d'un problème qui a fasciné beaucoup de mathématiciens durant tous les XVIIIème, XIXème et XXème siècle, et la littérature est riche de résultats partiels et de lemmes combinatoires des plus habiles. Legendre en 1785 et 1788 pensait même avoir résolu ce problème à partir de ce genre de méthodes (il l'indique à nouveau dans un livre de 1808), mais la véritable avancée est due à Dirichlet entre 1837 et 1839.

Dénotons par $\phi(q)$ le nombre de a entre 1 et q qui sont premiers à q et par $\pi(X; q, a)$ le nombre de nombre premiers $\leq X$ et $\equiv a[q]$. Le résultat de Dirichlet est un peu inférieur à

$$\pi(X; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)}\pi(X).$$

Il faut remarquer que ce théorème est de 20 ans antérieur au mémoire de Riemann ! Il est même antérieur aux résultats de Chebyshev, tant et si bien que l'on n'avait alors que de vagues résultats sur $\pi(X)$.

La distribution en progressions arithmétiques s'introduit dans les problèmes concernant les nombres premiers à l'aide des techniques dites "de crible" qui sont d'essence combinatoire et dont l'idée remonte à Eratosthène. Il s'agit de dire qu'un entier dans $]\sqrt{X}, X]$ est premier si et seulement si il n'a pas de diviseurs inférieurs

[8] Le mieux que l'on sache faire à l'heure actuelle consiste à montrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $n^2 + 1$ admet au plus deux facteurs premiers. Et par conséquent, soit $n^2 + 1$ prend une infinité de valeurs premières, soit (non exclusif) cette suite prend une infinité de valeurs qui ont exactement 2 facteurs premiers... Où l'on retrouve le problème de décider de la parité du nombre de facteurs premiers d'un entier, mais ici, même l'hypothèse de Riemann ne suffirait pas pour conclure. Nous reparlerons du phénomène de parité dans la section suivante.

[9] Rappelons qu'un entier n est dit congru à un autre entier m modulo q si q divise $n - m$. Il s'agit d'une relation d'équivalence et l'ensemble des entiers m congrus à n (fixé) modulo q est dit la classe de n modulo q.

à $\sqrt{X}$ qui soient distincts de 1. Par exemple, nous pouvons écrire

$$\sum_{\substack{X/2\le p\le X\\ p+2\text{ premier}}} 1 = \sum_{X/2\le p\le X} 1 - \sum_{\substack{X/2\le p\le X\\ \exists d\le\sqrt{X}, p+2\equiv 0[d]}} 1$$

et l'on voit s'introduire des problèmes de nombres premiers en progressions arithmétiques modulo d. Noter que d peut être très grand par rapport à X. Les techniques de crible ont été très raffinées entre 1915 et 1980. A l'heure actuelle, les résultats les plus impressionnants en théorie analytique viennent d'une combinaison de la méthode analytique avec celle du crible.

IV. Le théorème de Brun-Titchmarsh.

Nous abordons ici la théorie moderne des nombres premiers, c'est à dire telle qu'elle s'est développée après 1910, et que je vais illustrer à l'aide de l'un de ses résultat les plus élegants : le théorème de Brun-Titchmarsh ($\simeq$1930) dans la version de Montgomery et Vaughan (1974). Donnons-nous un intervalle $[M+1, M+N]$ où M et N sont des entiers, puis un module $q\ge 1$ et $q<N$ et regardons le nombre de nombres premiers dans cet intervalle qui sont de plus congrus à a modulo q. Alors

$$\pi(M+N;q,a)-\pi(M;q,a)\le 2\frac{N}{\phi(q)\operatorname{Log}(N/q)} \qquad ((a,q)=1).$$

Ce résultat est remarquablement uniforme en M, N et q. Même pour $q=1$, il est hautement non trivial. La contante 2 qui apparaît ici est capitale, et on peut facilement dire qu'il s'agit de l'épine majeure dans le talon de la théorie des nombres premiers. Obtenir n'importe quelle constante <2 (même à q fixé, même pour $q=1$) aurait l'effet d'une secousse sysmique de grande magnitude. Par exemple c'est en essayant de comprendre cette constante dans le simple cas $q=1$ que Selberg a obtenu une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers.

Les avis sont partagés quant à savoir si cette constante est optimale ou non et ce pourquoi elle le serait. Il n'existe pas à l'heure actuelle d'étude expérimentale correcte bien que la puissance de calcul devrait tout juste le permettre. Il serait intéressant de trouver des exemples où le quotient

$$\frac{\pi(M+1000)-\pi(M)}{1000/\operatorname{Log}1000} \tag{2}$$

soit plus grand que 1, voire proche de 2, avec M assez grand pour "gommer" les irrégularités dues aux petits entiers[10] . On attribue d'habitude ce facteur 2 au "phénomène de parité" qui est lié aux méthodes que l'on utilise pour établir cette inégalité, ce qui mène à penser que cette constante devrait être 1 dans ce cas particulier. Dans une autre direction, on peut formaliser une remarque de Bombieri et Davenport à la fin des années 60 en disant qu'il est possible que l'on ait

$$\limsup_{N\to\infty}\limsup_{M\to\infty}\frac{\pi(M+N)-\pi(M)}{N/\operatorname{Log}N} \overset{?}{=} 2.$$

À l'heure actuelle, la seule chose connue sur la quantité de gauche est que cette grandeur se situe entre 2 et ... 0 !

[10]Le lendemain de cet exposé, un auditeur, Etienne Kurowski, avait déjà vérifié que le quotient indiqué en (2) restait inférieur à 1 si $M\le 10^6$. Comme il était légitime de s'y attendre, ce quotient tend à décroître doucement.

Un petit détour en théorie comparative.

Si le résultat de Dirichlet indique bien en première approximation qu'il y a, par exemple, autant de nombres premiers congrus à 1 que congrus à 3 modulo 4, il laisse tout de même un champs assez large. L'exploration des entiers jusqu'à 100 000 permet de découvrir que le nombre de nombres premiers congrus à 1 modulo 4 reste inférieur (bien que très proche) au nombre d'entiers congrus à 3 modulo 4 sauf en 26 861, où les nombres respectifs sont 1 473 et 1, 472 (ceci a été découvert par Leech en 1957. Les ordinateurs de l'époque n'avaient pas grand chose a voir avec ceux d'aujourd'hui !). On sait à présent assez bien expliquer ce phénomène moyennant des hypothèses fortes (très semblables à l'hypothèse de Riemann, mais pour des fonctions adaptées à la distribution en progressions arithmétiques) et même montrer (sous ces mêmes hypothèses) depuis 1992 que $\pi(X;4,1)$ est très souvent supérieur à $\pi(X;4,3)$ (contrairement à ce qu'indique l'expérience numérique), mais lui reste tout de même plus souvent inférieur[11]. En poussant l'investigation numérique jusqu'à un million, on découvre que le seul autre endroit où $\pi(X;4,1)$ s'avère strictement supérieur à $\pi(X;4,3)$ est l'intervalle $[616\,841, 633\,797]$. D'un point de vue théorique, et ce même en s'autorisant ces hypothèses très fortes, on ne sait pas si l'ensemble $\mathcal{A}$ des entiers n tels que $\pi(n;4,1) > \pi(n;4,3)$ admet ou non une densité logarithmique, i.e. si

$$\frac{1}{\operatorname{Log} X} \sum_{\substack{n \in \mathcal{A} \\ n \leq X}} \frac{1}{n}$$

admet ou non une limite lorsque X tend vers l'infini. Si cette limite existe, il est toutefois à peu près sûr que sa valeur doit être $0.0040\ldots$. Des remarques similaires s'appliquent aux classes 1 et 2 modulo 3.

[11]L'argument intuitif est le suivant : nous avons vu que la bonne fonction à considérer était $\Lambda(n)$ et non la fonction caractéristique des nombres premiers. Par conséquent, les entiers pour lesquels $\Lambda(n) \neq 0$ doivent être équi-répartis dans les classes 1 et 3 modulo 4. Toutefois, tous les carrés de nombres premiers (sauf 4 bien sûr) sont congrus à 1 modulo 4, contribuant ainsi à augmenter le nombre des n considérés qui sont congrus à 1 modulo 4. Lorsque l'on enlève cette contribution pour comparer les nombres premiers et non leurs puissances, on obtient par conséquent qu'il doit y avoir moins de nombres premiers congrus à 1 modulo 4 qu'à 3 modulo 4. Nous avons dit plus haut que de considérer les nombres premiers et leurs puissances n'occasionnait pas une grosse perte, mais ceci n'est plus vrai lorsque l'on travaille sous l'hypothèse de Riemann.