ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2021, т. 314, с. 211–247

УДК 511.33

Модулярные тернарные аддитивные задачи с иррегулярными или простыми числами[*,**]

О. Рамаре[a], Г. К. Вишванадхам[б]

Поступило 15.04.2020; после доработки 20.02.2021; принято к публикации 17.06.2021

Посвящается И.М. Виноградову
и его пионерским работам о простых числах

Исходная задача, решаемая в работе, — представить классы вычетов по модулю q в виде суммы трех слагаемых, два из которых принадлежат достаточно малым множествам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а третье имеет нечетное число простых делителей (так называемые *иррегулярные числа* С. Рамануджана) и лежит в промежутке вида $[q^{20r}, q^{20r}+q^{16r}]$ при некотором заданном $r \geq 1$. Доказано, что такое представление всегда возможно при условии, что $|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \geq q(\log q)^2$. Доказательство этого факта приводит к изучению тригонометрических полиномов, члены которых отвечают иррегулярным числам из короткого промежутка, и к отысканию достаточно точных оценок для таких полиномов. В частности, получена равномерная по r оценка $\sum_{q^{20r}\leq s\leq q^{20r}+q^{16r}} e(sa/q) \ll q^{16r}(\log q)/\sqrt{\varphi(q)}$, в которой s пробегает иррегулярные числа. Для этого развита специальная техника, основы которой были заложены Сельбергом и Мотохаши. Говоря кратко, характеристическая функция множества иррегулярных чисел выражается через семейство билинейных сумм подобно тому, как это делается в методе усиления, разработанном Иванцом и использующем псевдохарактеры (локальные модели). Техника, развитая в настоящей работе, также применима к суммам с функцией Мёбиуса, функцией Лиувилля и функцией Мангольдта (в последнем случае она немного усложняется). Тем не менее она позволяет получить явные оценки; например, в работе доказано, что $\left|\sum_{X<\ell\leq 2X} \Lambda(\ell)\, e(\ell a/q)\right| \leq 1300\sqrt{q}\, X/\varphi(q)$ при $250 \leq q \leq X^{1/24}$ и любых a, взаимно простых с q. Получен также ряд других результатов.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4191

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуются аддитивные свойства *иррегулярных чисел* в $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ при больших q. Понятие *иррегулярных чисел* возникло в работе Рамануджана [25]: так в ней именуются целые числа с нечетным количеством простых делителей (см. последовательность A028260 в [20]). Роль таких чисел значительно возросла после того, как Сельберг около 1949 г. сформулировал *принцип четности* (см., например, [37]), согласно которому такие числа с точки зрения решета ведут себя подобно обычным целым числам. Их характеристическая функция легко выражается через стандартные функции и имеет вид $(1-\lambda(n))/2$,

[*] Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Ramaré O., Viswanadham G.K.* Modular ternary additive problems with irregular or prime numbers // Proc. Steklov Inst. Math. 2021. V. 314.

[**] Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора Индо-французским центром содействия передовым исследованиям (CEFIPRA, проект 5401-A), а также при финансовой поддержке второго автора Советом по научным и инженерным исследованиям Индии (проект SERB/ECR/2018/000850).

[a] CNRS / Institut de Mathématiques de Marseille, Aix Marseille Université, UMR 7373, Site Sud, Campus de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France.

[б] Indian Institute of Science Education and Research Berhampur, Odisha, India.

E-mail: olivier.ramare@univ-amu.fr (О. Рамаре), viswanadh@iiserbpr.ac.in (Г.К. Вишванадхам).

где $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ — функция Лиувилля, а через $\Omega(n)$, как это обычно принято в подобном контексте, обозначено количество простых делителей числа n, взятых с учетом кратности.

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть $q \geq 3$ — простое число, $r \geq 1$ — целое, и пусть $\mathcal{S}$ — множество иррегулярных чисел промежутка $[q^{20r}, q^{20r} + q^{16r}]$. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два произвольных подмножества в $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ с условием $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \geq q(\log q)^2$. Тогда при неограниченном возрастании q для любого $m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ равномерно по r имеем*

$$\sum_{\substack{a+b+s\equiv m[q] \\ a\in\mathcal{A},\ b\in\mathcal{B},\ s\in\mathcal{S}}} 1 \sim \frac{|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{S}|}{q}.$$

Основную трудность в доказательстве вызывает работа с тригонометрической суммой по иррегулярным числам или, что то же, с тригонометрической суммой $\sum_n \lambda(n)e(na/q)$, где q может иметь порядок степени X, а n пробегает короткий промежуток $[X, X + X^\theta]$. Эта тригонометрическая сумма очень похожа на сумму $\sum_n \mu(n)e(na/q)$ (и может быть сведена к ней с помощью тождества $\lambda = \mu \star \mathbb{1}_{X^2}$, где $\star$ обозначает операцию арифметической свертки $(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$).

Сумму $\sum_n \mu(n)e(na/q)$ часто сравнивают с суммой $\sum_p e(pa/q)$, где p пробегает простые числа, однако наличие короткого промежутка суммирования порождает трудности. Тем не менее развиваемый нами метод можно с успехом применить как к $\lambda(n)$, $\mu(n)$, так и к характеристической функции множества простых чисел. При этом доказательства в случае $\lambda(n)$ и $\mu(n)$ оказываются даже проще.

Исторически первым, кто сразу оценил силу выдающегося метода Виноградова [38], был Дэвенпорт [6], применивший его к тригонометрической сумме с весами в виде значений функции Мёбиуса. Его метод не был прямым и опирался на оценку Виноградова суммы с простыми числами. Изначальный подход Виноградова, прекрасное изложение которого дано в книге [39], был достаточно трудоемким. С тех пор теория билинейных разложений для сумм по простым числам была существенно развита, в том числе с использованием комбинаторных тождеств, хотя применялась в основном к суммам с простыми числами. Известно, что подобные методы с необходимыми изменениями применимы и к суммам с функцией Мёбиуса, однако этот факт носит скорее фольклорный характер и указать точные ссылки не так просто. Мы смогли найти следующие: [4, Theorem 3; 11, Theorem 2.1; 13, Theorem 13.9; 40, гл. II, § 6]. Недавно интерес к этой задаче возобновился; отметим, в частности, работы [3, 10].

Теорема 1 вытекает из следующей оценки.

Теорема 2. *Пусть $q \leq X^\eta$ для некоторого $\eta < 1/8$, $T \leq (X^\eta/q)^{16/13}$, и пусть a взаимно просто с q. Тогда*

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{\ell \leq X} \frac{\mu(\ell)}{\ell^{it}}\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big) \right| dt \ll \frac{X \log \min(q, 2+T)}{\sqrt{\varphi(q)}}.$$

Справедливы также следующие версии этой теоремы:

(V2) можно заменить $\mu(\ell)$ на $\lambda(\ell)$, при этом правая часть не меняется;

(V3) можно добавить условие взаимной простоты $(\ell, q) = 1$ и заменить $1/\sqrt{\varphi(q)}$ на $1/\sqrt{q}$;

(V4) можно заменить функцию Мёбиуса $\mu(\ell)$ функцией Мангольдта $\Lambda(\ell)$, при этом в правой части вместо $1/\sqrt{\varphi(q)}$ возникнет $\sqrt{q}/\varphi(q)$.

Под версией (V1) мы понимаем сформулированное выше утверждение. Все приводимые ниже теоремы допускают подобные версии. Указанная L^1-оценка сразу приводит к оценке тригонометрического полинома, отвечающего короткому промежутку.

Теорема 3. *Пусть $\eta < 1/8$, $q \le X^\eta$, a взаимно просто с q и θ_0 определяется равенством $X^{1-\theta_0}\sqrt{q} = (X^\eta/q)^{16/13}$. Тогда*

$$\sum_{X<\ell\le X+X^\theta} \mu(\ell)\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big) \ll \frac{X^\theta \log q}{\sqrt{\varphi(q)}} \qquad \text{для любого} \quad \theta \in (\theta_0, 1].$$

Уместно сравнить нашу оценку с оценкой, полученной Чжанем в [41, Theorem 2]. При этом можно увидеть, что результат Чжаня справедлив и для более коротких промежутков, однако наша оценка не содержит степени множителя $\log X$. Сопоставление этих двух результатов может вызвать некоторые трудности, но при внимательном рассмотрении становится понятно, что постоянная B в [41, Theorem 2] меньше, чем $c_2/2 - 1$.[1]

Приведенные выше оценки имеют место для фиксированной точки a/q и не сохраняются при удалении от нее (за исключением некоторых тривиальных случаев). Однако при $\theta = 1$ это условие допускает некоторое ослабление, которое может представлять интерес для кругового метода (частное суммирование позволяет распространить этот результат на промежуток $|\alpha - a/q| \ll 1/X$; дальнейшее продвижение встречает значительные трудности). Соответствующий результат выглядит следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $q \le X^\eta$ для некоторого $\eta < 2/13$, a взаимно просто с q, и пусть $|\beta|X + |t| \le (X^\eta/q)^{13/2}$ и $|\beta|X \le X^{(2-13\eta)/44}$. Тогда имеем*

$$\sum_{\ell\le X} \frac{\mu(\ell)}{\ell^{it}}\, e(\ell\beta)\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big) \ll \frac{X}{\sqrt{\varphi(q)}}.$$

Здесь и далее мы не стремились к получению наиболее точных показателей степеней; наша цель состоит в обстоятельном изложении метода. Найденные нами верхние оценки имеют следующие особенности: после деления на X^θ (тривиальную оценку) они стремятся к нулю с ростом q (при этом не возникает множителя в виде степени $\log X$, ухудшающего оценку); при этом они справедливы для всех q, не превышающих некоторой степени X. Выражаясь современным языком, наша техника основана на представлении функции Мёбиуса в виде *семейства* линейных комбинаций линейных и билинейных сумм (или сумм I и II типов в терминологии Виноградова). Подчеркнем, что все полученные здесь результаты являются эффективными (т.е. все константы в неравенствах можно указать в явном виде); возможное существование зигелевского нуля ограничивает наши надежды на то, каких результатов можно было бы достичь (однако его не следует называть препятствием!).

Подобный вопрос для суммы с простыми числами также рассматривался в литературе. Первый ответ на него дает теорема 2b из [39, гл. IX] (где следует взять $\varepsilon = 2(\log q)/\log\log X$). Его упрощенный вид таков:

$$\sum_{n\le X} \Lambda(n)\, e\Big(\frac{na}{q}\Big) \ll \frac{X(\log q)^{10}}{\sqrt{q}}, \qquad q \le \exp\bigg(\sqrt{\frac{\log\log X}{10}}\bigg). \tag{1.1}$$

В [5] была получена оценка, подобная (1.1), но более точная в случае, когда количество делителей числа q не слишком велико. Все перечисленные результаты опираются на билинейные разложения и потому могут быть перенесены на случай функции Мёбиуса. Первый в некотором смысле неулучшаемый результат для суммы по простым числам был получен в [29]: зависящий от q понижающий множитель имел вид $\sqrt{q}/\varphi(q)$. Параметр q здесь также подчинен ограничению — он не превосходит $\exp((\log X)^{1/3}/50)$; сам же метод, будучи достаточно

[1] Речь идет, грубо говоря, об оценке вида $\sum_{N-A<n\le N} \Lambda(n)e(n\alpha) \ll A(\log N)^{-B}$, $\alpha \approx a/q$, которая справедлива при $q \ge (\log N)^{c_2}$. — *Прим. пер.*

гибким, опирается на положительность коэффициентов суммы и потому не может быть распространен на случай функции Мёбиуса. А.А. Карацуба получил в [14, гл. 10, § 4, лемма 7] аналогичную оценку с тем же множителем $\sqrt{q}/\varphi(q)$ для всех q вплоть до $\exp(c(\log X)^{1/2})$ с некоторой постоянной $c > 0$, однако он использовал аналитические методы, которые не переносятся на другие ситуации (подробнее об этом будет сказано далее). На самом же деле, опираясь на теорему Галлахера о простых числах [8, Eq. (5)], можно получить сходный по силе результат для коэффициентов того же вида и для q, достигающих некоторой степени X. Наш метод приводит к подобному утверждению без использования плотностной оценки, свободной от логарифмического множителя, и вообще без упоминания нулей, и в этом смысле настоящая работа является продолжением работ Мотохаши (см. [17, 18]).

Как известно, Мотохаши [18] предложил доказательство теоремы Галлахера о простых числах без обращения к нулям соответствующих рядов Дирихле. Это доказательство можно перенести на случай функции Мёбиуса с применением развитой ниже техники. Приведем наш результат.

Теорема 5. *Существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что неравенство*

$$\sum_{q\le Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod^* q}\Bigl|\sum_{n\le X}\mu(n)\chi(n)\Bigr| \ll X\exp\Bigl(-c_1\frac{\log X}{\log Q}\Bigr)$$

выполнено при всех $\exp(\sqrt{\log X}) \le Q \le X^{c_2}$. При этом постоянная c_1 выбирается так, чтобы не более чем одна из L-функций Дирихле имела нуль в области $\sigma \ge 1 - c_1/\log(Q(2+|t|))$. Если такой нуль существует, то он является простым и отвечает вещественному характеру. Символ $\sum^*$ означает, что если β — такой исключительный нуль, отвечающий, скажем, характеру χ^*, то сумма $\sum_{n\le X}\mu(n)\chi^*(n)$ заменяется на

$$\sum_{n\le X}\mu(n)\chi^*(n) - \frac{X^\beta}{\beta L'(\beta,\chi^*)}. \tag{1.2}$$

При малом значении $L'(\beta,\chi^*)$ получается противоречие с теоремой 4. Действительно, беря в качестве X большую степень числа $q = Q$, из теоремы 5 заключаем, что

$$\sum_{\ell\le X,\ (\ell,q)=1}\mu(\ell)\, e(\ell\beta)\, e\Bigl(\frac{\ell a}{q}\Bigr) \asymp \frac{X\sqrt{q}}{\varphi(q)\, L'(\beta,\chi^*)}.$$

Запишем точную формулировку этого утверждения.

Следствие 6. *Существует постоянная $c > 0$ такая, что если у функции $L(s,\chi^*)$ имеется вещественный нуль $\beta > 1 - c/\log q$, то $L'(\beta,\chi^*) \gg q/\varphi(q)$.*

Следствие 6 дополняет результат Пинца [21], согласно которому при сделанных выше предположениях выполнено неравенство $L'(1,\chi^*) \gg q/\varphi(q)$. При $1-\beta = o((\log q)^{-2})$ эти результаты можно вывести друг из друга несложными рассуждениями.

Используемый нами метод опирается исключительно на явные вычисления и позволяет получать численные оценки. Поскольку наиболее сложным является случай суммы по простым числам, мы рассмотрим именно его и докажем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $250 \le q \le X^{1/24}$, и пусть a взаимно просто с q. Тогда*

$$\Bigl|\sum_{X<\ell\le 2X}\Lambda(\ell)\ e\Bigl(\frac{\ell a}{q}\Bigr)\Bigr| \le 1300\frac{\sqrt{q}\,X}{\varphi(q)}.$$

Следует заметить, что постоянная 1300 хотя и является большой, но указана явно, в то время как работа [29] опирается на просеивающую процедуру в стиле решета Бруна, которая делает подобные вычисления очень трудоемкими (и, вероятно, приводит к гораздо большему значению постоянной). Мы приложили определенные усилия для явного нахождения константы, однако в работе имеется ряд мест, в которых вычисления могут быть уточнены. Также отметим, что Платт в [22] провел вычисление нулей всех L-рядов Дирихле, отвечающих модулям $q \leq 4 \cdot 10^5$, мнимая часть которых не превышает $10^8/q$, так что распределение простых чисел в соответствующих прогрессиях лучше изучать, опираясь на эти данные.

Что касается метода, то, как уже было отмечено, мы улавливаем простые числа с помощью билинейных разложений — инструмента, подобного методу усиления, принадлежащего Иванцу. Предлагаемая нами реализация метода восходит к технике, разработанной Сельбергом около 1973 г. (как указано Бомбьери в [2] и Мотохаши в [18]), которая впоследствии продемонстрировала свою исключительную мощь.

Такие билинейные разложения оказываются в некотором смысле “ортогональными”; этот факт устанавливается с помощью распространения классического большого решета, отвечающего дробям Фарея, на случай *обобщенных характеров*, следуя терминологии Сельберга и Мотохаши, также именуемых (с точностью до некоторой нормировки) *локальными моделями* в [28] . Отметим, что в теореме 10 ниже значение постоянной в неравенстве оказывается точнее, чем в классическом случае.

В нашей конструкции разложений используются веса Барбана–Вехова (см. [1]). Занимаясь решением одной оптимизационной задачи, близкой к тем, что возникают в классическом решете Сельберга для простых чисел, Барбан и Вехов ввели веса вида

$$\lambda_d^{(1)} = \begin{cases} \mu(d) & \text{при} \quad d \leq z, \\ \mu(d)\dfrac{\log(z^2/d)}{\log z} & \text{при} \quad z < d \leq z^2, \\ 0 & \text{при} \quad z^2 < d. \end{cases} \tag{1.3}$$

На самом деле они рассматривали веса более общего вида — с параметром y вместо z^2 (см. работы Мотохаши [19, Sect. 1.3] и Грэма [9]). Их особенность состоит в том, что неравенство

$$\sum_{n \leq B} \biggl(\sum_{d|n} \lambda_d^{(1)}\biggr)^2 \ll \frac{B}{\log z}$$

имеет место независимо от того, выполнено условие $B \geq z^4$ или нет. Мы следуем идее Мотохаши, согласно которой часто (как и в нашем случае) достаточно применить трюк Ранкина (см. [34]) к более слабому неравенству

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \biggl(\sum_{d|n} \lambda_d^{(1)}\biggr)^2 \ll \frac{z^\varepsilon}{(\varepsilon \log z)^2}, \qquad \varepsilon \in (0,1],$$

доказательство которого существенно проще. Соответствующее утверждение содержится в лемме 27, заимствованной из [12]. С точки зрения явных оценок это приводит к определенным трудностям, поскольку приходится иметь дело с суммами вида $\sum_{d \leq D} \mu(d)/d^{1+\varepsilon}$ или $\sum_{d \leq D} \mu(d) \log(D/d)/d^{1+\varepsilon}$ (с некоторыми дополнительными условиями взаимной простоты), работать с которыми труднее, чем с аналогичными суммами с $\varepsilon = 0$. Для последних существуют удобные тождества, не имеющие (насколько нам известно) аналогов при $\varepsilon > 0$.

Обозначения. Используемые нами обозначения общеприняты, за исключением, быть может, записи $f(x) = O^*(g(x))$, которая означает, что $|f(x)| \leq g(x)$. Кроме того, через $\star$ мы обозначаем арифметическую свертку, которая при выполнении очевидных условий определяется равенством $(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$.

Чтобы сделать изложение более ясным, мы также вводим много частных обозначений. Для удобства читателя мы поместили наиболее важные из них в этом разделе. Буквы θ и H могут использоваться в различных целях.

Напомним определение суммы Рамануджана и ее выражение через функцию Мёбиуса:

$$c_r(m) = \sum_{a \bmod^* r} e\Big(\frac{am}{r}\Big) = \sum_{u|r,\, u|m} u\mu\Big(\frac{r}{u}\Big). \tag{1.4}$$

Суммам Рамануджана c_r отвечают функции v_r, определяемые равенством

$$v_r(m) = c_r(m) \sum_{d|m} \lambda_d^{(1)}. \tag{1.5}$$

Запись $\ell \sim L$ означает, что $L < \ell \le 2L$. Основным нашим объектом будет сумма

$$S\Big(\frac{a}{q}, t, \beta\Big) = \sum_{\ell\sim X,\ (\ell,q)=1} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell^{it}}\, e(\beta\ell)\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big), \tag{1.6}$$

которую мы в дальнейшем представим в виде линейной комбинации линейных сумм $L_r^{(1)}(a,t,\beta)$ и $L_r^{(2)}(a,t,\beta)$, определенных в (2.11) и (2.12) соответственно, а также билинейных сумм

$$S_r\Big(\frac{a}{q}, t, \beta, M, N\Big) = \sum_{\substack{mn\sim X,\ (mn,q)=1\\ m\sim M,\ n\sim N}} \frac{\Lambda(m)v_r(n)}{(mn)^{it}}\, e(\beta mn)\, e\Big(\frac{mna}{q}\Big). \tag{1.7}$$

2. ОБЩАЯ ПОДГОТОВКА И НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Рассмотрим следующий ряд Дирихле:

$$V_r(s) = \sum_{n\ge2} \frac{c_r(n)}{n^s} \sum_{d|n} \lambda_d^{(1)} = \sum_{n\ge2} \frac{v_r(n)}{n^s}. \tag{2.1}$$

Он замечателен тем, что (почти) раскладывается на множители. Заметим, что суммирование можно вести лишь по $n > z$.

Теорема 8. *Справедливо тождество*

$$1 + V_r(s) = \zeta(s) M_r\big(s, \lambda_d^{(1)}\big), \tag{2.2}$$

в котором

$$M_r\big(s, \lambda_d^{(1)}\big) = \sum_{u|r,\ d\le z^2} \frac{u\,\mu(r/u)\lambda_d^{(1)}}{[u,d]^s} = \sum_{1\le n\le rz^2} \frac{h_r(n)}{n^s}, \tag{2.3}$$

где

$$h_r(n) = \sum_{\substack{u|r,\ d\le z^2\\ [u,d]=n}} u\,\mu\Big(\frac{r}{u}\Big)\lambda_d^{(1)}. \tag{2.4}$$

Подобное разложение имеется в [18, Lemma 4], где следует положить $f(n) = 1$. Тогда для величин, определяемых между соотношениями (9) и (10) в [18], будем иметь $\Psi_r(n) = c_r(n)$ и $g(r) = \mu^2(r)/\varphi(r)$. Множитель $\mu^2(r)$ в определении Мотохаши отсутствует, однако функция g рассматривается лишь для бесквадратных значений аргументов. Тогда неравенство большого решета, приведенное в [18, Lemma 2], сводится к теореме 7А из [2], которую Бомбьери приписывает А. Сельбергу.

Следующее формальное тождество дает разложение единицы:

$$1 = -V_r + (1 + V_r).$$

Из него получается разложение для $-\zeta'/\zeta$, которое с помощью (2.2) можно преобразовать к виду

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}=\frac{\zeta'}{\zeta}V_r-\zeta' M_r. \tag{2.5}$$

В свою очередь, это влечет за собой поточечное тождество

$$\Lambda=-\Lambda\star v_r+\log\star h_r. \tag{2.6}$$

Соответствующее тождество для функции Мёбиуса оказывается даже более эффектным:

$$\mu=-\mu\star v_r+h_r. \tag{2.7}$$

Наконец, для функции Лиувилля тождество имеет вид

$$\lambda=-\lambda\star v_r+\mathbb{1}_{X^2}\star h_r. \tag{2.8}$$

Тождества (2.6), (2.7) и (2.8) лежат в основе нашего подхода. Разумеется, они нуждаются в небольшом видоизменении, поскольку аргумент функций Λ, μ и λ в свертках $\Lambda\star v_r$, $\mu\star v_r$ и $\lambda\star v_r$ соответственно может быть малым. Для этого мы используем простое усечение (см. (2.10)). Отметим, наконец, что мы будем применять усреднение по этому семейству разложений.

Приступим к доказательству и вначале договоримся об обозначениях.

Важную роль будет играть взаимная простота наших переменных с модулем q, и мы начнем настоящий раздел с этого вопроса. В случае (V3) этот вопрос не возникает. В случае (V4) имеем

$$\biggl|\sum_{\ell\sim X,\,(\ell,q)\neq 1}\frac{\Lambda(\ell)}{\ell^{it}}\,e(\beta\ell)\,e\Bigl(\frac{\ell a}{q}\Bigr)\biggr|\le\sum_{p|q}\frac{\log(2X)}{\log p}\log p=\omega(q)\log(2X).$$

Это приводит к погрешности, которая в силу неравенства $\omega(q)\le(\log q)/\log 2$ поглощается всеми последующими остаточными членами. О том, как обходится условие взаимной простоты в случаях (V1) и (V2), будет сказано в разд. 11.

Зафиксируем бесквадратное целое число $R\ge r$. Будем считать, что

$$z^2R\le X. \tag{2.9}$$

Далее выберем (большой) параметр M_0 и запишем (см. (1.6))

$$S\Bigl(\frac{a}{q},t,\beta\Bigr)=L_r^{(1)}(a,t,\beta)-L_r^{(2)}(a,t,\beta)-\sum_{\substack{mn\sim X,\,(mn,q)=1\\ m>M_0}}e(\beta mn)\frac{\Lambda(m)v_r(n)}{(mn)^{it}}\,e\Bigl(\frac{mna}{q}\Bigr), \tag{2.10}$$

где первая линейная сумма определяется равенством

$$L_r^{(1)}(a,t,\beta)=\sum_{mn\sim X,\,(mn,q)=1}e(\beta nm)\frac{h_r(m)\log n}{(nm)^{it}}\,e\Bigl(\frac{nma}{q}\Bigr), \tag{2.11}$$

а вторая — равенством

$$L_r^{(2)}(a,t,\beta)=\sum_{\substack{mn\sim X,\,(mn,q)=1\\ m\le M_0}}e(\beta mn)\frac{\Lambda(m)v_r(n)}{(nm)^{it}}\,e\Bigl(\frac{mna}{q}\Bigr). \tag{2.12}$$

Рассмотрим последнюю сумму и локализуем интервалы изменения переменных m и n. Заметим, что $n>z$. Поэтому будем двигаться от $N=z$ до $2z$ и далее повторять аналогичные шаги до тех пор, пока не доберемся до $2^kz\le 2X/M_0<2^{k+1}z$, т.е. $0\le k\le\log(X/(M_0z))/\log 2$.

Что касается M, имеем $N < n \le N' \le 2N$, так что $X/(2N) \le X/n < m \le 2X/N$. Таким образом, для каждого N имеем два значения M, а именно $M_1 = X/(2N)$ и $M_2 = X/N$. Приходим к следующим неравенствам, в которых $A(m,n) = e(\beta mn)\Lambda(m)v_r(n)(nm)^{-it}e(mna/q)\,\mathbb{1}_{(mn,q)=1}$:

$$\Bigl|\sum_{mn\sim X} A(m,n)\Bigr|^2 = \Bigl|\sum_{M,N}\sum_{\substack{mn\sim X,\\ m\sim M,\ n\sim N}} A(m,n)\Bigr|^2 \le \sum_{M,N} 1 \sum_{M,N}\Bigl|\sum_{\substack{mn\sim X,\\ m\sim M,\ n\sim N}} A(m,n)\Bigr|^2 \le$$

$$\le \frac{2\log(2X/(M_0 z))}{\log 2}\sum_{M,N}\Bigl|\sum_{\substack{mn\sim X,\\ m\sim M,\ n\sim N}} A(m,n)\Bigr|^2. \tag{2.13}$$

Отметим, что последняя сумма по m, n была обозначена в (1.7) через $S_r(a/q,t,\beta,M,N)$. Мы снимем условие $mn \sim X$ и избавимся от множителя $e(\beta mn)$ в этой сумме с помощью леммы 45 (см. приложение) с $b = 2$, $R = X$ и некоторым $\delta = \delta(M,N) \in (0,1)$. В результате получим

$$S_r\Bigl(\frac{a}{q},t,\beta,M,N\Bigr) = \int_{-\Delta}^{\Delta}\sum_{\substack{(mn,q)=1\\ m\sim M,\ n\sim N}} \frac{\Lambda(m)}{m^{i(v+t)}}\,\frac{v_r(n)}{n^{i(v+t)}}\,e\Bigl(\frac{mna}{q}\Bigr)X^{iv}\mathscr{H}(v)\,dv +$$

$$+ \mathcal{O}^*\bigl(E_1(\delta,r) + E_2(\delta,r) + 2\delta E_3(r)\bigr), \tag{2.14}$$

где $\mathscr{H}(v)$ — функция, определяемая в лемме 45,

$$E_1(\delta,r) = \sum_{\substack{X<mn\le 2^\delta X\\ (mn,q)=1\\ m\sim M,\ n\sim N}} \Lambda(m)|v_r(n)|, \qquad E_2(\delta,r) = \sum_{\substack{2X/2^\delta<mn\le 2X\\ (mn,q)=1\\ m\sim M,\ n\sim N}} \Lambda(m)|v_r(n)| \tag{2.15}$$

и

$$E_3(r) = \sum_{\substack{(mn,q)=1\\ m\sim M,\ n\sim N}} \Lambda(m)|v_r(n)|. \tag{2.16}$$

Параметр Δ определяется равенством (A.6) (с $b = 2$).

Доказательство будет продолжено в разд. 7.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

3.1. Гибридное неравенство большого решета. Излагаемый здесь материал является нашим основным инструментом в работе с билинейными суммами, которые возникают в используемом разложении Λ-функции.

Следующая теорема принадлежит Сельбергу и заимствована нами из [2, théorème 7A].

Теорема 9. *Пусть N_0 — заданное вещественное число, и пусть $(u_n)_{N_0<n\le N_0+N}$ — последовательность комплексных чисел. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\mathfrak{f}r\le R,\ (\mathfrak{f},r)=1}\frac{\mathfrak{f}}{\phi(\mathfrak{f}r)}\sum_{\chi \bmod^* \mathfrak{f}}\Bigl|\sum_{N_0<n\le N_0+N} u_n\chi(n)c_r(n)\Bigr|^2 \le \sum_{N_0<n\le N_0+N}|u_n|^2(N+R^2),$$

где $c_r(m)$ — сумма Рамануджана по модулю r.

Суммирование здесь ведется по взаимно простым переменным $\mathfrak{f}$ и r с условием $\mathfrak{f}r \le R$. Параметр N_0 необходим по той причине, что левая часть (априори) не является инвариантной относительно сдвига. Далее мы сформулируем гибридный аналог этого утверждения. Подобный результат содержится также в [2, théorème 10] и восходит к работе [8]; нашим вкладом здесь является уточненное значение постоянной 7. Тщательно проследив доказательство следствия 6.4 из [32], можно увидеть, что в действительности имеет место

Теорема 10. *Пусть* (u_n) — *последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию* $\sum_n(|u_n|+n|u_n|^2)<\infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{d\le D}\ \sum_{a \bmod^* d}\ \int_{-T}^{T}\Big|\sum_n u_n n^{it}\, e\Big(\frac{na}{d}\Big)\Big|^2 dt \le 7\sum_n |u_n|^2\big(n+D^2\max(T,10)\big).$$

Теорема 11. *Пусть* q — *фиксированный модуль,* N_0 — *некоторое вещественное число. Пусть* (u_n) — *последовательность комплексных чисел такая, что* $\sum_n(|u_n|+n|u_n|^2)<\infty$. *Тогда для любого* $T\ge 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{r\le R/q,\ (q,r)=1}\frac{1}{\varphi(r)}\sum_{a \bmod q}\ \int_{-T}^{T}\Big|\sum_n u_n c_r(n+N_0) n^{it}\, e\Big(\frac{na}{q}\Big)\Big|^2 dt \le 7\sum_n |u_n|^2\big(n+R^2\max(T,10)\big).$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$c_r(n+N_0)=\sum_{a' \bmod^* r} e\bigg(\frac{(n+N_0)a'}{r}\bigg).$$

Применяя неравенство Коши, мы можем далее воспользоваться теоремой 10, так как множество $\{(a/q)+(a'/r)\}$ является подмножеством множества дробей $\{b/d\}$ с условием $d\le D$. $\square$

Следствие 12. *Пусть* q — *фиксированный модуль, и пусть* (u_n) — *последовательность комплексных чисел такая, что* $\sum_n(|u_n|+n|u_n|^2)<\infty$. *Тогда для любого* $T\ge 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{r\le R/q,\ (q,r)=1}\frac{1}{\varphi(r)}\sum_{a \bmod q}\ \int_{-T}^{T}\Big|\sum_n u_n c_r(n) n^{it}\, e\Big(\frac{na}{q}\Big)\Big|^2 \frac{dt}{1+|t|} \ll \sum_n |u_n|^2\big(n+R^2\log(T+2)\big).$$

Доказательство получается из теоремы 11 интегрированием по частям. $\square$

3.2. Оценки некоторых сумм с простыми числами. Напомним ряд классических результатов из работы [36].

Лемма 13. *При всех* $M\ge 101$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{m\sim M}\Lambda(m)\le \frac{5}{4}M.$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме 12 из [36]

$$\psi(x)\le 1.04x,\qquad x\ge 0, \tag{3.1}$$

при этом теорема 10 из [36] влечет за собой неравенство

$$\vartheta(x)=\sum_{p\le x}\log p\ge 0.84x,\qquad x\ge 101. \tag{3.2}$$

Отсюда сразу следует искомое соотношение. $\square$

Кроме того, из следствия к теореме 1.1 в [23] выводится оценка

$$\sum_{m\le M_0}\frac{\Lambda(m)}{m}\le \log M_0,\qquad M_0\ge 1. \tag{3.3}$$

Далее нам потребуется следующее обобщение знаменитого варианта неравенства Бруна–Титчмарша, принадлежащего Х.Л. Монтгомери и Р.Ч. Вону (см. [16, Theorem 2]).

Лемма 14. *Пусть d — некоторое целое число, a — вычет из приведенной системы по модулю d. Тогда для всех $A\ge B>d\ge 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\substack{A<m\le A+B\\ m\equiv a[d]}}\frac{\Lambda(m)}{\log m}\le\frac{2B}{\varphi(d)\log(B/d)}.$$

Нам потребуются частные случаи $d=1$ и $d=q$. Условие $A\ge B$ отсутствует в [16, Theorem 2], где ведется подсчет лишь простых чисел. Но это условие необходимо нам для дальнейшего.

Доказательство. Если степень p^k простого числа попадает в промежуток $(A,A+B]$, то в силу условия $A\ge B$ в этом промежутке нет других степеней того же простого числа p. Поэтому исходная сумма не превосходит количества целых чисел промежутка $(A,A+B]$, все простые делители которых не меньше некоторого z, плюс количество всех простых чисел, меньших z. Эта верхняя граница используется в начале доказательства теоремы 2 в [16] (в формуле (3.3) из [16] при больших B и в лемме 10 из [16] при малых B). В каждом из случаев слагаемое $\pi(z)$ отвечает за подсчет дополнительных простых чисел (или их степеней), попадающих в рассматриваемый интервал. Поэтому доказательство теоремы 2 из [16] сохраняет силу. $\square$

Лемма 15. *Для произвольного модуля $q\ge 1$ и любого вещественного $M\ge\max(121,q^3)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{m\sim M,\, m\equiv a[q]}\Lambda(m)\le\frac{9}{2}\,\frac{M}{\varphi(q)}.$$

Доказательство. Согласно лемме 14 имеем

$$\sum_{m\sim M,\, m\equiv a[q]}\Lambda(m)\le 2\frac{M\log(2M)}{\varphi(q)\log(M/q)}.$$

Оценка коэффициента завершает доказательство. $\square$

Лемма 16. *Для произвольного модуля $q\ge 1$ и любого вещественного $M\ge\max(121,q^3)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{m\equiv b[q],\, m\sim M}\Lambda(m)\Biggr|^2\le\frac{45}{8}\,\frac{M^2}{\varphi(q)}.$$

Доказательство. В силу лемм 13 и 15 левая часть не превосходит

$$\frac{9}{2}\,\frac{M}{\varphi(q)}\,\frac{5}{4}M\le\frac{45}{8}\,\frac{M^2}{\varphi(q)}.\qquad\square$$

Лемма 17. *Для произвольного модуля $q\ge 1$ при любых $\varepsilon>0$ и $M\ge q^{1+\varepsilon}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{m\equiv b[q],\, m\sim M}\Lambda(m)\Biggr|^2\ll\frac{M^2}{\varphi(q)}.$$

Доказательство. В силу леммы 14 при $M \geq q^{1+\varepsilon}$ имеем

$$\sum_{m\sim M,\, m\equiv b[q]} \Lambda(m) \ll_\varepsilon \frac{M}{\varphi(q)}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\sum_{b \bmod^* q} \sum_{m\equiv b[q],\, m\sim M} \Lambda(m) \ll M. \qquad \square$$

3.3. Оценки, связанные с функцией Мёбиуса. Следующая лемма заимствована нами из [30].

Лемма 18. *При любых $r \geq 1$ и $1.38 \geq \varepsilon \geq 0$ справедливы неравенства*

$$-(1.44 + 5\varepsilon + 3.6\varepsilon^2) \leq \sum_{d\leq x,\, (d,r)=1} \frac{\mu(d)}{d^{1+\varepsilon}} \log\frac{x}{d} \leq 1.4 + 4.7\varepsilon + 3.3\varepsilon^2 + (1+\varepsilon)\frac{r^{1+\varepsilon}}{\varphi_{1+\varepsilon}(r)}\, x^\varepsilon,$$

где

$$\frac{r^{1+\varepsilon}}{\varphi_{1+\varepsilon}(r)} = \prod_{p|r} \frac{p^{1+\varepsilon}}{p^{1+\varepsilon}-1}. \tag{3.4}$$

Для случая $\varepsilon = 0$ в [31, Corollaries 1.10, 1.11] имеются более точные и простые неравенства.

Лемма 19. *Для любого вещественного $x \geq 1$ и любого целого $r \geq 1$ справедливы оценки*

$$0 \leq \sum_{n\leq x,\, (n,r)=1} \mu(n)\frac{\log(x/n)}{n} \leq 1.00303\frac{r}{\varphi(r)}$$

и

$$0 \leq \sum_{n\leq x,\, (n,r)=1} \mu(n)\frac{\log^2(x/n)}{n} \leq 2\log x \cdot \frac{r}{\varphi(r)}.$$

3.4. Явные оценки средних для некоторых неотрицательных мультипликативных функций. Приведем сначала некоторые оценки для G-функций. Напомним определение:

$$G_q(D) = \sum_{d\leq D,\, (d,q)=1} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}, \qquad G(D) = G_1(D). \tag{3.5}$$

Согласно [15] для любых взаимно простых чисел r и s имеем

$$G_r(D) \leq \frac{s}{\varphi(s)} G_{rs}(D) \leq G_r(sD). \tag{3.6}$$

В частности, для $r = 1$ и $s = q$ получаем

$$G(D) \leq \frac{q}{\varphi(q)} G_q(D) \leq G(qD). \tag{3.7}$$

Как показано в [26, Lemma 3.5] (см. также [35]),

$$G(D) \leq \log D + 1.4709, \qquad D \geq 1, \tag{3.8}$$

а с другой стороны,

$$\log D + 1.06 \leq G(D), \qquad D \geq 6. \tag{3.9}$$

Обратимся теперь к менее изученным функциям. Мы будем использовать лемму 3.2 из [26], которую частично напомним по ходу доказательства.

Лемма 20. *При* $X \geq 6$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{n\leq X,\,(n,6)=1}\frac{\mu^2(n)}{n}\prod_{p|n}\biggl(1-\frac{4}{p}+\frac{8}{3p^2}\biggr)\leq 0.225(\log X+3.1).$$

Для наших целей достаточно получить эту оценку при $X \geq 15$.

Доказательство. Определим мультипликативную функцию g равенствами

$$g(2)=\frac{-1}{2},\qquad g(3)=\frac{-1}{3},\qquad g(2^k)=g(3^k)=0\quad\forall k\geq 2,$$

$$g(p)=-\frac{4}{p^2}+\frac{8}{3p^3},\qquad g(p^2)=-\biggl(1-\frac{4}{p}+\frac{8}{3p^2}\biggr)\frac{1}{p^2},\qquad g(p^k)=0\quad\forall k\geq 3.$$

Сравнивая соответствующие ряды Дирихле, можно увидеть, что

$$\mathbb{1}_{(n,6)=1}\frac{\mu^2(n)}{n}\prod_{p|n}\biggl(1-\frac{4}{p}+\frac{8}{3p^2}\biggr)=\sum_{\ell m=n}g(\ell)\frac{1}{m}.$$

Следовательно, искомая сумма S представима в виде

$$S=\sum_{n\leq X}\sum_{\ell m=n}g(\ell)\frac{1}{m}=\sum_{\ell\geq 1}g(\ell)\sum_{m\leq X/\ell}\frac{1}{m}.$$

Согласно первой части леммы 3.3 из [26] при любом $t>0$ справедливо равенство

$$\sum_{m\leq t}\frac{1}{m}=\log t+\gamma+\mathcal{O}^*\bigl(0.9105\,t^{-1/3}\bigr).$$

Это объясняет, почему мы смогли обойтись без условия $\ell \leq X$ выше. Таким образом, получаем

$$S=\sum_{\ell\geq 1}g(\ell)\biggl(\log\frac{X}{\ell}+\gamma\biggr)+\mathcal{O}^*\biggl(0.9105\,X^{-1/3}\sum_{\ell\geq 1}|g(\ell)|\ell^{1/3}\biggr).$$

Несложной проверкой убеждаемся, что

$$\sum_{\ell\geq 1}|g(\ell)|\ell^{1/3}=\biggl(1+\frac{1}{2^{2/3}}\biggr)\biggl(1+\frac{1}{3^{2/3}}\biggr)\prod_{p\geq 5}\biggl(1+\frac{4}{p^{5/3}}-\frac{8}{3p^{8/3}}+\frac{1}{p^{4/3}}-\frac{4}{p^{7/3}}+\frac{8}{p^{10/3}}\biggr)\leq 11.$$

Далее, с помощью равенства

$$G(s)=\prod_{p\geq 2}\biggl(1+\sum_{k\geq 1}\frac{g(p^k)}{p^{ks}}\biggr)$$

перепишем исходную сумму в виде

$$S=G(0)\biggl(\log X+\gamma+\frac{G'(0)}{G(0)}\biggr)+\mathcal{O}^*\biggl(\frac{10}{X^{1/3}}\biggr).$$

Легко проверить, что

$$G(0)=\frac{1}{3}\prod_{p\geq 5}\biggl(1-\frac{4}{p^2}+\frac{8}{3p^3}-\frac{1}{p^2}+\frac{4}{p^3}-\frac{8}{3p^4}\biggr)\leq 0.225.$$

С другой стороны,

$$\frac{G'(0)}{G(0)} = \log 2 + \frac{\log 3}{2} - \sum_{p\geq 5} \frac{(g(p)+2g(p^2))\log p}{1+g(p)+g(p^2)} \leq 2.42.$$

В итоге получаем $S \leq 0.225(\log X + 3 + 45/X^{1/3})$. Компьютерные вычисления позволяют убедиться в том, что

$$S \leq 0.225(\log X + 3) \qquad \forall X \in [8, 10^9]. \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$S \leq 0.225(\log X + 3.1) \qquad \forall X \geq 8, \tag{3.11}$$

причем непосредственной проверкой диапазон переменной X можно расширить до $X \geq 6$. $\square$

Лемма 21. *При $X \geq 15$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\ell\leq X,\ (\ell,2)=1} \mu^2(\ell) \prod_{p|\ell} \frac{4p^2-12p+8}{p^2} \leq 0.0114\, X(\log X + 3.1)^3.$$

Условия $X \geq 15$ достаточно для наших целей. Постоянные в лемме не являются оптимальными, и их можно уточнить за счет более кропотливых вычислений.

Доказательство. Обозначим рассматриваемую сумму через S. Определим мультипликативные функции f_1 и f_2 на простых числах $p \geq 5$ равенствами $f_1(p) = 4 - 12p^{-1} + 8p^{-2} = f_2(p) + 1$ и положим $f_1(p^k) = f_2(p^k) = 0$ для всех $k \geq 2$. При $p = 3$ такое определение даст отрицательное значение $f_2(3)$, поэтому увеличим значение $f_1(3)$ до 1, чтобы сохранить неотрицательность функции f_2. При этом получим $f_2(3^k) = 0$ для всех $k \geq 1$. Имеем $f_1(n) \leq (f_2 \star \mathbb{1})(n)$. Кроме того, можно проверить, что $f_2(m) \leq (f_3 \star f_3 \star f_3)(m)$, где

$$f_3(m) = \mu^2(m)\, \mathbb{1}_{(m,6)=1} \prod_{p|m} \biggl(1 - \frac{4}{p} + \frac{8}{3p^2}\biggr). \tag{3.12}$$

Точнее, для бесквадратного m имеем равенство $f_2(m) = (f_3 \star f_3 \star f_3)(m)$; если же m делится на квадрат простого числа, то $f_2(m) = 0$, в то время как $(f_3 \star f_3 \star f_3)(m) \geq 0$. Следовательно,

$$S \leq \sum_{m\leq X,\ (m,2)=1} f_2(m) \sum_{\ell\leq X/m} 1 \leq X \Biggl(\sum_{m\leq X,\ (m,3)=1} \frac{f_3(m)}{m} \Biggr)^3 \leq 0.0114\, X(\log X + 3.1)^3,$$

где для доказательства последнего неравенства была использована лемма 20. $\square$

Положим $\varphi_+(r) = \prod_{p|r}(1+p)$.

Лемма 22. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{r\leq X} \frac{\mu^2(r)\varphi_+(r)}{\varphi(r)} \leq 3.28\, X.$$

Неравенство леммы также не является оптимальным и может быть усилено с использованием более сложных выкладок.

Доказательство проводится прямым вычислением:

$$\sum_{r\leq X} \frac{\mu^2(r)\varphi_+(r)}{\varphi(r)} \leq \sum_{\ell\leq X} \mu^2(\ell) \prod_{p|\ell} \frac{2}{p-1} \sum_{\ell|r\leq X} 1 \leq X \prod_{p\geq 2} \biggl(1 + \frac{2}{p(p-1)}\biggr) \leq 3.28\, X. \qquad \square$$

3.5. Оценки, связанные с весами Барбана–Вехова. Сначала установим грубую предварительную оценку.

Лемма 23. *Справедливо неравенство* $\sum_{d\le z^2}\bigl|\lambda_d^{(1)}\bigr| \le z^2/\log z$.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\bigl|\lambda_d^{(1)}\bigr|\log z = \mu^2(d)\biggl(\log^+\frac{z^2}{d} - \log^+\frac{z}{d}\biggr), \tag{3.13}$$

где $\log^+ x = \max(0,\log x)$. В справедливости этого тождества можно убедиться, проверив его для $d\le z$, для $d\in[z,z^2]$ и для бо́льших d. Замечая, что $\sum_{d\le y}\log(y/d)\le y$, сразу приходим к утверждению леммы. $\square$

Далее напомним лемму 5.4 из [32], согласно которой при вещественных $s>1$ имеем

$$\zeta(s)\le\frac{e^{\gamma(s-1)}}{s-1}. \tag{3.14}$$

Лемма 24. *Пусть R и Q — взаимно простые натуральные числа. Тогда для $\varepsilon \in$ $\in [0,0.168]$ выполнено неравенство*

$$\biggl|\sum_{R|d\le z^2,\,(d,Q)=1}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d^{1+\varepsilon}}\biggr| \le \frac{5(1+\varepsilon)}{\log z}\,\frac{Q^{1+\varepsilon}z^{2\varepsilon}}{R^{\varepsilon}\varphi_{1+\varepsilon}(QR)}.$$

Кроме того, верна оценка

$$\biggl|\sum_{R|d\le z^2,\,(d,Q)=1}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}\biggr| \le \frac{1.004}{\log z}\,\frac{Q}{\varphi(RQ)}.$$

Доказательство. Сначала заметим (ср. (3.13)), что

$$\lambda_d^{(1)}\log z = \mu(d)\log^+\frac{z^2}{d} - \mu(d)\log^+\frac{z}{d}. \tag{3.15}$$

Это тождество снова проверяется отдельно для $d\le z$, для $d\in[z,z^2]$ и для бо́льших d. Пользуясь разложением (3.15), находим

$$\sum_{R|d\le z^2,\,(d,Q)=1}\frac{\lambda_d^{(1)}\log z}{d^{1+\varepsilon}} = \sum_{R|d\le z^2,\,(d,Q)=1}\frac{\mu(d)\log(z^2/d)}{d^{1+\varepsilon}} - \sum_{R|d\le z,\,(d,Q)=1}\frac{\mu(d)\log(z/d)}{d^{1+\varepsilon}} =$$
$$= \frac{\mu(R)}{R^{1+\varepsilon}}\sum_{\substack{\ell\le z^2/R\\(\ell,QR)=1}}\frac{\mu(\ell)\log((z^2/R)/\ell)}{\ell^{1+\varepsilon}} - \frac{\mu(R)}{R^{1+\varepsilon}}\sum_{\substack{\ell\le z/R\\(\ell,QR)=1}}\frac{\mu(\ell)\log((z/R)/\ell)}{\ell^{1+\varepsilon}}.$$

В силу леммы 18 заключаем, что абсолютное значение левой части не превосходит

$$\frac{\mu^2(R)}{R^{1+\varepsilon}}\biggl(1.4+4.7\varepsilon+3.3\varepsilon^2+(1+\varepsilon)\frac{(RQ)^{1+\varepsilon}}{\varphi_{1+\varepsilon}(RQ)}\,\frac{z^{2\varepsilon}}{R^{\varepsilon}}+1.44+5\varepsilon+3.6\varepsilon^2\biggr).$$

Поскольку $(2.84+9.7\varepsilon+6.9\varepsilon^2)/(1+\varepsilon)\le 4$ при $\varepsilon\in[0,0.168]$, сразу получаем первое неравенство леммы. Второе неравенство вытекает из разложения (3.15) и леммы 19. $\square$

Лемма 25. *Для заданного целого δ и $\varepsilon\in(0,0.16]$ справедлива оценка*

$$\biggl|\sum_{d_1,d_2\le z^2,\,\delta|[d_1,d_2]}\frac{\lambda_{d_1}^{(1)}\lambda_{d_2}^{(1)}}{[d_1,d_2]^{1+\varepsilon}}\biggr| \le \frac{25(1+\varepsilon)^2z^{4\varepsilon}\zeta(1+\varepsilon)}{\delta^{\varepsilon}\log^2 z}\prod_{p|\delta}\frac{3}{p-1}.$$

Доказательство. Обозначим рассматриваемую сумму через S. Тогда имеем равенство

$$S=\sum_{\delta_1\delta_2\delta_3=\delta}\ \sum_{\substack{\delta_1\delta_3|d_1\le z^2\\ \delta_2\delta_3|d_2\le z^2\\ (d_1,\delta_2)=(d_2,\delta_1)=1}}\frac{\lambda^{(1)}_{d_1}\lambda^{(1)}_{d_2}}{[d_1,d_2]^{1+\epsilon}}=\sum_{\delta_1\delta_2\delta_3=\delta}\delta_3^{1+\epsilon}\sum_{\substack{\ell\le z^2\\ (\ell,\delta)=1}}\varphi_{1+\epsilon}(\ell)\sum_{\substack{\ell\delta_1\delta_3|d_1\le z^2\\ \ell\delta_2\delta_3|d_2\le z^2\\ (d_1,\delta_2)=(d_2,\delta_1)=1}}\frac{\lambda^{(1)}_{d_1}\lambda^{(1)}_{d_2}}{(d_1d_2)^{1+\epsilon}},$$

которое получается из тождества

$$\frac{1}{[d_1,d_2]^{1+\epsilon}}=\frac{(d_1,d_2)^{1+\epsilon}}{(d_1d_2)^{1+\epsilon}}=\frac{\delta_3^{1+\varepsilon}}{(d_1d_2)^{1+\epsilon}}\sum_{\ell|d_1/\delta_3,\ \ell|d_2/\delta_3}\varphi_{1+\epsilon}(\ell)$$

и того факта, что ℓ взаимно просто с δ, откуда следует, что $\ell\mid d_1/(\delta_1\delta_3)$ и $\ell\mid d_2/(\delta_2\delta_3)$. Дважды применяя лемму 24 (первый раз к сумме по d_1, второй — к сумме по d_2), находим

$$|S|\le\frac{25(1+\epsilon)^2z^{4\epsilon}\delta^{1+\epsilon}}{(\log z)^2\,\delta^{\epsilon}\varphi^2_{1+\epsilon}(\delta)}\sum_{\delta_1\delta_2\delta_3=\delta}\frac{1}{\delta_3^{\epsilon}}\sum_{\ell\le z^2,\ (\ell,\delta)=1}\frac{\mu^2(\ell)}{\ell^{2\epsilon}\varphi_{1+\epsilon}(\ell)}.$$

Однако

$$\sum_{\ell\ge1,\ (\ell,\delta)=1}\frac{\mu^2(\ell)}{\varphi_{1+\epsilon}(\ell)}=\prod_{(p,\delta)=1}\biggl(1+\frac{1}{p^{1+\epsilon}-1}\biggr)=\frac{\varphi_{1+\epsilon}(\delta)}{\delta^{1+\epsilon}}\,\zeta(1+\epsilon).$$

Отсюда получаем

$$|S|\le\frac{25(1+\epsilon)^2\,z^{4\epsilon}\zeta(1+\epsilon)}{(\log z)^2\,\delta^{\epsilon}\,\varphi_{1+\epsilon}(\delta)}\sum_{\delta_1\delta_2\delta_3=\delta}\frac{1}{\delta_3^{\epsilon}}.$$

Наконец, имеем

$$\frac{1}{\varphi_{1+\epsilon}(\delta)}\sum_{\delta_1\delta_2\delta_3=\delta}\frac{1}{\delta_3^{\epsilon}}=\frac{1}{\varphi_{1+\epsilon}(\delta)}\sum_{\delta_3|\delta}\frac{2^{\omega(\delta/\delta_3)}}{\delta_3^{\epsilon}}=\frac{1}{\varphi_{1+\epsilon}(\delta)}\prod_{p|\delta}2\biggl(1+\frac{1}{2p^{\epsilon}}\biggr)\le\prod_{p|\delta}\frac{3}{p-1},$$

откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 26. *Для заданного целого δ и $\varepsilon\in(0,0.16]$ выполнено неравенство*

$$\biggl|\sum_{d_1,d_2\le z^2}\frac{\lambda^{(1)}_{d_1}\lambda^{(1)}_{d_2}}{[\delta,d_1,d_2]^{1+\varepsilon}}\biggr|\le\frac{25(1+\varepsilon)^2\,z^{4\varepsilon}\zeta(1+\varepsilon)}{\log^2 z}\prod_{p|\delta}\frac{4}{p}.$$

Доказательство. Применяя способ приведения квадратичной формы к диагональному виду из решета Сельберга и пользуясь оценкой леммы 25, получим

$$\sum_{d_1,d_2\le z^2}\frac{\lambda^{(1)}_{d_1}\lambda^{(1)}_{d_2}}{[\delta,d_1,d_2]^{1+\epsilon}}\le\sum_{t|\delta}\frac{\varphi_{1+\epsilon}(t)}{\delta^{1+\epsilon}}\sum_{\substack{d_1,d_2\le z^2\\ t|[d_1,d_2]}}\frac{\lambda^{(1)}_{d_1}\lambda^{(1)}_{d_2}}{[d_1,d_2]^{1+\epsilon}}\le\frac{25(1+\epsilon)^2z^{4\epsilon}\zeta(1+\epsilon)}{\delta^{1+\epsilon}\log^2 z}\sum_{t|\delta}\frac{\varphi_{1+\epsilon}(t)}{t^{\epsilon}}\prod_{p|t}\frac{3}{p-1}.$$

Имеем, однако,

$$\frac{1}{\delta^{1+\epsilon}}\sum_{t|\delta}\frac{\varphi_{1+\epsilon}(t)}{t^{\epsilon}}\prod_{p|t}\frac{3}{p-1}\le\frac{1}{\delta}\sum_{t|\delta}\frac{\varphi_{1+\epsilon}(t)}{t^{2\epsilon}}\prod_{p|t}\frac{3}{p-1}\le\prod_{p|\delta}\frac{4}{p},$$

где для получения второго неравенства мы воспользовались оценкой

$$\frac{\varphi_{1+\epsilon}(t)}{t^{2\epsilon}}\le\varphi(t).\qquad\square$$

Следующая лемма содержится в основной теореме работы [12].

Лемма 27. *Для $B \geq z \geq 100$ справедливо неравенство*

$$\sum_{n \leq B} \frac{\left(\sum_{d|n} \lambda_d^{(1)}\right)^2}{n} \leq 166 \frac{\log B}{\log z}.$$

Для двух следующих лемм определим величины

$$A'_r = \sum_{\substack{u|r,\, d \leq z^2 \\ (ud,q)=1}} \frac{u\mu(r/u)\lambda_d^{(1)}}{[u,d]} \qquad \text{и} \qquad A''_r = \sum_{\substack{u|r,\, d \leq z^2 \\ (ud,q)=1}} \frac{u\mu(r/u)\log([u,d])\lambda_d^{(1)}}{[u,d]}. \tag{3.16}$$

Сначала мы выведем более простые выражения для них. Параметр r всюду далее предполагается бесквадратным числом, взаимно простым с q, однако при необходимости мы будем напоминать об этом.

Лемма 28. *Пусть r — бесквадратное число, взаимно простое с q. Тогда*

$$\frac{A'_r}{\varphi(r)} = \sum_{r|d \leq z^2,\, (d,q)=1} \frac{\lambda_d^{(1)}}{d},$$

$$\frac{A''_r}{\varphi(r)} = \sum_{r|d \leq z^2,\, (d,q)=1} \log(rd) \frac{\lambda_d^{(1)}}{d} + \sum_{\ell | r} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell - 1} \left(\sum_{(r/\ell)/d \leq z^2,\, (d,q)=1} \frac{\lambda_d^{(1)}}{d} - \ell \sum_{r|d \leq z^2,\, (d,q)=1} \frac{\lambda_d^{(1)}}{d} \right).$$

Доказательство. Для удобства изложения настоящего доказательства определим f_d как $\lambda_d^{(1)}/d$, если d взаимно просто с q, и положим f_d равным нулю в противном случае. Для величины A'_r преобразования не составляют труда:

$$A'_r = \sum_{u|r,\, d \leq z^2} \frac{u\mu(r/u) d f_d}{[u,d]} = \sum_{\delta | r} \varphi(\delta) \sum_{\delta | u | r,\, \delta | d \leq z^2} \mu\Big(\frac{r}{u}\Big) f_d = \varphi(r) \sum_{r | d \leq z^2} f_d,$$

что и завершает доказательство. Для A''_r, воспользовавшись равенством $[u,d] = ud/(u,d)$, получим

$$A''_r = \sum_{\substack{u|r,\, d \leq z^2 \\ (ud,q)=1}} \frac{u\,\mu(r/u)\log([u,d]) d f_d}{[u,d]} = \sum_{\substack{u|r,\, d \leq z^2 \\ (ud,q)=1}} \mu\Big(\frac{r}{u}\Big)(u,d) f_d \big(\log(ud) - \log((u,d))\big) = B - C.$$

Величины B и C исследуем по отдельности; имеем

$$\begin{aligned} B &= \sum_{\delta|u|r,\, \delta|d \leq z^2} \varphi(\delta)\mu\Big(\frac{r}{u}\Big) f_d \Big(\log d + \log\frac{u}{\delta} + \log \delta\Big) = \\ &= \varphi(r) \sum_{r|d \leq z^2} \log d \cdot f_d + \sum_{\delta|r,\, \delta|d \leq z^2} \varphi(\delta)\Lambda\Big(\frac{r}{\delta}\Big) f_d + \varphi(r) \log r \sum_{r|d \leq z^2} f_d, \end{aligned}$$

поскольку $\mu \star \log = \Lambda$. Однако r бесквадратное, так что $\varphi(\delta) = \varphi(r)/\varphi(r/\delta)$. Полагая $\ell = r/\delta$, получим

$$B = \varphi(r) \sum_{r|d \leq z^2} \log d \cdot f_d + \varphi(r) \sum_{\ell|r,\, (r/\ell)|d \leq z^2} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell - 1} f_d + \varphi(r) \log r \sum_{r|d \leq z^2} f_d.$$

Величину C преобразуем (с помощью равенства $\log((u,d)) = \sum_{\ell|u,\, \ell|d} \Lambda(\ell)$ следующим образом):

$$C = \sum_{u|r,\, d\le z^2} \mu\Big(\frac{r}{u}\Big) \log((u,d))(u,d) f_d = \sum_{\ell|u|r,\, \ell|d\le z^2} \Lambda(\ell)\mu\Big(\frac{r}{u}\Big)(u,d) f_d = \varphi(r)\sum_{\ell|r} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell-1} \sum_{r|d\le z^2} f_d.$$

Последнее равенство требует некоторых пояснений: пусть фиксированное ℓ делит r и d; тогда

$$\sum_{\ell|u|r} \mu\Big(\frac{r}{u}\Big)(u,d) = \ell \sum_{v|r'} \mu\Big(\frac{r'}{v}\Big)(v,d'),$$

где $r' = r/\ell$ и $d' = d/\ell$. Последняя сумма обращается в нуль, если $r' \nmid d'$; в противном случае ее значение равно $\varphi(r') = \varphi(r)/\varphi(\ell)$. Следовательно,

$$\frac{A_r''}{\varphi(r)} = \frac{B}{\varphi(r)} - \frac{C}{\varphi(r)} = \sum_{r|d\le z^2,\, (d,q)=1} \log(rd)\, f_d - \sum_{\ell|r} \frac{\Lambda(\ell)}{\ell-1}\Bigg(\sum_{(r/\ell)|d\le z^2} f_d - \ell \sum_{r|d\le z^2} f_d\Bigg).$$

Отсюда сразу получаем утверждение леммы. □

Лемма 29. *Пусть r бесквадратное и взаимно простое с q. Тогда*

$$\Bigg|\sum_{r|d\le z^2,\, (d,q)=1} \log\frac{4X}{erd}\, \frac{\lambda_d^{(1)}}{d}\Bigg| \le \bigg(1.004\frac{\log(4X/(er))}{\log z} + 2\bigg)\frac{q}{\varphi(rq)}.$$

Доказательство. Пользуясь разложением (3.15), находим

$$\begin{aligned}\sum_{r|d\le z^2,\, (d,q)=1} \log\frac{4X}{erd}\,\frac{\lambda_d^{(1)}}{d} &= \sum_{r|d\le z^2,\, (d,q)=1} \log\frac{4X}{erd}\,\frac{\mu(d)\log(z^2/d)}{d\log z} - \sum_{r|d\le z,\, (d,q)=1} \log\frac{4X}{erd}\,\frac{\mu(d)\log(z/d)}{d\log z} = \\ &= \sum_{r|d\le z^2,\, (d,q)=1} \log\frac{4X}{erz^2}\,\frac{\mu(d)\log(z^2/d)}{d\log z} + \sum_{r|d\le z^2,\, (d,q)=1} \frac{\mu(d)\log^2(z^2/d)}{d\log z} - \\ &\quad - \sum_{r|d\le z,\, (d,q)=1} \log\frac{4X}{erz}\,\frac{\mu(d)\log(z/d)}{d\log z} - \sum_{r|d\le z,\, (d,q)=1} \frac{\mu(d)\log^2(z/d)}{d\log z}.\end{aligned}$$

Согласно лемме 19 каждая из сумм имеет вполне определенный знак и ограничена. Так, в случае $\mu(r) = 1$ первые два слагаемых неотрицательны, а следующие два неположительны; в случае $\mu(r) = -1$ картина аналогична. Поэтому достаточно оценить каждое из слагаемых в отдельности. Положив $\alpha = 1.003003$, заметим далее, что

$$\alpha\log\frac{4X}{erz^2} + 2\log\frac{z^2}{r} \le \alpha\log\frac{4X}{erz^2} + 4\log z = \alpha\log\frac{4X}{er} + (4-2\alpha)\log z.$$

Отсюда и следует утверждение леммы. □

3.6. Работа со сглаженными суммами. Исследование линейных слагаемых[2] опирается на явные оценки сглаженных сумм; соответствующие утверждения помещены в настоящем пункте.

Лемма 30. *Пусть M и $N > 0$ — вещественные числа такие, что $M + N \ge 1$, и пусть целое a взаимно просто с q. Тогда*

$$\sum_{\substack{M<n\le M+N \\ (n,q)=1}} e\Big(\frac{na}{q}\Big) = \frac{\mu(q)N}{q} + \mathcal{O}^*(\varphi(q)).$$

[2]Имеются в виду величины, определенные равенствами (2.11) и (2.12). — *Прим. пер.*

Доказательство. Разобьем промежуток $(M, M+N]$ на $N/q + \mathcal{O}^*(1)$ промежутков, содержащих q последовательных целых чисел, и один (последний) промежуток, содержащий, скажем, h взаимно простых с q чисел. Поскольку $h \le \varphi(q) - 1$, отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Интегрированием по частям находим

$$\sum_{n\le N,\ (n,q)=1} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\log n = \sum_{n\le N,\ (n,q)=1} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\log N - \int_1^N \sum_{n\le t,\ (n,q)=1} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\frac{dt}{t}.$$

Применяя эту формулу для значений N и $2N$, получим

$$\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (n,q)=1}} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\log n = \sum_{\substack{n\le N\\ (n,q)=1}} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\log 2 + \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (n,q)=1}} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\log(2N) - \int_N^{2N} \sum_{\substack{n\le t\\ (n,q)=1}} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\frac{dt}{t}.$$

Так приходим к следующему утверждению.

Лемма 31. *Для вещественного N и целого a, взаимно простого с q, имеем*

$$\sum_{N<n\le 2N,\ (n,q)=1} e\Big(\frac{na}{q}\Big)\log n = \frac{\mu(q)N\log(4N/e)}{q} + \mathcal{O}^*\big(\varphi(q)\log(8N)\big).$$

Лемма 32. *При вещественных M, $N>0$ и целом b справедливы равенства*

$$\sum_{\substack{M<n\le M+N\\ n\equiv b[q]}} \frac{e(\beta n)}{n^{it}} = \frac{1}{q}\int_M^{M+N} \frac{e(\beta v)\,dv}{v^{it}} + \mathcal{O}\big((|t| + |\beta|(M+N)+1)\log(2(M+N))\big),$$

$$\sum_{\substack{M<n\le M+N\\ n\equiv b[q]}} \frac{e(\beta n)\log n}{n^{it}} = \frac{1}{q}\int_M^{M+N} \frac{e(\beta v)\log v}{v^{it}}\,dv + \mathcal{O}\big((|t| + |\beta|(M+N)+1)\log^2(2(M+N))\big).$$

Доказательство. Определим функции $f_1(\alpha,\ell) = e(\beta q\ell)/(\alpha+\ell)^{it}$ и $f_2(\alpha,\ell) = \log(\alpha+\ell)\times$ $\times f_1(\alpha,\ell)$ при $\alpha = b/q$, где $1\le b\le q-1$, и рассмотрим для $f = f_1$ и $f = f_2$ сумму

$$S(L; f) = \sum_{1\le \ell\le L} f(\ell). \tag{3.17}$$

Имеем

$$S(L;f) = -\int_1^L [u]f'(u)\,du + [L]f(L) = f(1) + \int_1^L f(u)\,du + \mathcal{O}\left(\int_1^L |f'(u)|\,du + |f(L)|\right) =$$
$$= \int_1^L f(u)\,du + \mathcal{O}\big((|t| + \beta qL)\log^2(2L)\big).$$

Рассматривая величину

$$\left(S\Big(\frac{M+N-b}{q}; f_1\Big) - S\Big(\frac{M-b}{q}; f_1\Big)\right)\frac{\log q}{q^{it}} + \left(S\Big(\frac{M+N-b}{q}; f_2\Big) - S\Big(\frac{M-b}{q}; f_2\Big)\right)\frac{1}{q^{it}},$$

находим

$$\mathrm{MT}\Biggl(\sum_{\substack{M<n\le M+N\\ n\equiv b[q]}}\frac{e(\beta n)\log n}{n^{it}}\Biggr)=\int\limits_{(M-b)/q}^{(M+N-b)/q}\frac{e(\beta(b+uq))\log(b+uq)}{(b+uq)^{it}}\,du=\frac{1}{q}\int\limits_{M}^{M+N}\frac{e(\beta v)\log v}{v^{it}}\,dv,$$

где $\mathrm{MT}(\cdot)$ обозначает главный член заключенного в скобки выражения. Отсюда уже легко выводится искомое утверждение. $\square$

Лемма 33. *При вещественных M, $N>0$ и целом a, взаимно простом с q, справедливы равенства*

$$\sum_{\substack{M<n\le M+N\\ (n,q)=1}}e(\beta n)\frac{e(an/q)}{n^{it}}=\frac{\mu(q)}{q}\int\limits_{M}^{M+N}\frac{e(\beta v)\,dv}{v^{it}}+\mathcal{O}\bigl(q(|t|+|\beta|(M+N)+1)\log(2(M+N))\bigr),$$

$$\sum_{\substack{M<n\le M+N\\ (n,q)=1}}e(\beta n)\frac{\log n}{n^{it}}\,e\Bigl(\frac{an}{q}\Bigr)=\frac{\mu(q)}{q}\int\limits_{M}^{M+N}\frac{e(\beta v)\log v}{v^{it}}\,dv+$$
$$+\mathcal{O}\bigl(q(|t|+|\beta|(M+N)+1)\log^2(2(M+N))\bigr).$$

Доказательство. Вывод этих соотношений из предыдущей леммы представляет собой несложное упражнение. $\square$

4. ПЕРВАЯ ЛИНЕЙНАЯ СУММА

В этом разделе мы рассмотрим первую линейную сумму, определенную равенством (2.11), и докажем леммы 34 и 35.

4.1. Случай $t=\beta=0$.

Лемма 34. *Пусть $Rz^2/q\le X$ и $(a,q)=1$. Тогда*

$$\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)\bigl|L_r^{(1)}(a,0,0)\bigr|}{\varphi(r)}\le\frac{X}{q}G(R)\Bigl(3.012\frac{\log(4X/e)}{\log z}+2\Bigr)+3.3\varphi(q)\frac{R}{q}\frac{z^2}{\log z}\log(8X).$$

Доказательство. Сначала произведем в (2.11) суммирование по n с использованием леммы 31; получим

$$L_r^{(1)}(a,0,0)=\frac{\mu(q)}{q}X\sum_{\substack{m\le 2X\\ (m,q)=1}}\frac{h_r(m)\log(4X/(me))}{m}+\mathcal{O}^*\Biggl(\varphi(q)\log(8X)\sum_{\substack{m\le 2X\\ (m,q)=1}}|h_r(m)|\Biggr).\qquad(4.1)$$

Условие $m\le 2X$ в обеих суммах можно заменить неравенством $m\le rz^2$, поскольку в противном случае величина $h_r(m)$ обращается в нуль. Также отметим, что $rz^2\le 2X$. Положим

$$A_r=\sum_{m\le rz^2,\ (m,q)=1}\frac{h_r(m)\log(4X/(me))}{m}=A_r'\log\frac{4X}{e}-A_r''\qquad(4.2)$$

(см. обозначения (3.16)).

Оценка первого слагаемого в (4.1). В качестве следствия получаем следующее. Пользуясь выражениями (3.16) наряду с леммой 28, находим

$$\frac{A_r}{\varphi(r)}=\log\frac{4X}{e}\sum_{\substack{r|d\le z^2\\(d,q)=1}}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}-\sum_{\substack{r|d\le z^2\\(d,q)=1}}\log(rd)\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}-\sum_{\ell|r}\frac{\Lambda(\ell)}{\ell-1}\Biggl(\sum_{\substack{(r/\ell)|d\le z^2\\(d,q)=1}}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}-\ell\sum_{\substack{r|d\le z^2\\(d,q)=1}}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}\Biggr)=$$
$$=\sum_{\substack{r|d\le z^2\\(d,q)=1}}\log\frac{4X}{erd}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}-\sum_{\ell|r}\frac{\Lambda(\ell)}{\ell-1}\Biggl(\sum_{\substack{(r/\ell)|d\le z^2\\(d,q)=1}}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}-\ell\sum_{\substack{r|d\le z^2\\(d,q)=1}}\frac{\lambda_d^{(1)}}{d}\Biggr).$$

Из этого выражения с помощью леммы 29 и второй части леммы 24 (с параметрами $R=r/\ell$, $Q=\ell q$) сразу получаем оценку

$$\frac{|A_r|}{\varphi(r)}\le\biggl(1.004\frac{\log(4X/(er))}{\log z}+2\biggr)\frac{q}{\varphi(rq)}+\sum_{\ell|r}\frac{\Lambda(\ell)}{\ell-1}\frac{1.004}{\log z}\frac{q}{\varphi(rq/\ell)}+\sum_{\ell|r}\frac{\Lambda(\ell)\ell}{\ell-1}\frac{1.004}{\log z}\frac{q}{\varphi(qr)}.$$

Заметим, что $\sum_{\ell|r}(\varphi(\ell)\Lambda(\ell)/(\ell-1))\le\log r$ и $\sum_{\ell|r}(\ell\Lambda(\ell)/(\ell-1))\le2\log r$. Поэтому

$$\frac{|A_r|}{\varphi(r)}\le\biggl(1.004\frac{\log(4X/(er))}{\log z}+2\biggr)\frac{q}{\varphi(rq)}+\log r\,\frac{1.004}{\log z}\frac{q}{\varphi(rq)}+2\log r\,\frac{1.004}{\log z}\frac{q}{\varphi(qr)}.$$

Упрощая, получим

$$\frac{|A_r|}{\varphi(r)}\le\biggl(1.004\frac{\log(4Xr^2/e)}{\log z}+2\biggr)\frac{q}{\varphi(rq)}.$$

Замечая сначала, что $r\le4X/e$, просуммируем неравенство по r. Вспоминая, что из неравенств (3.7) следует оценка $(q/\varphi(q))G_q(R/q)\le G(R)$, в итоге будем иметь

$$\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)|A_r|}{\varphi(r)}\le G(R)\biggl(3.012\frac{\log(4X/e)}{\log z}+2\biggr). \tag{4.3}$$

Оценка остатка в (4.1). Переходя к остаточному члену, заметим сначала, что в силу леммы 23

$$\sum_{m\le2X,\ (m,q)=1}|h_r(m)|=\sum_{u|r,\ d\le z^2}\Bigl|u\mu\Bigl(\frac{r}{u}\Bigr)\lambda_d^{(1)}\Bigr|\le\frac{z^2}{\log z}\prod_{p|r}(p+1).$$

Следовательно,

$$\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\sum_{m\le2X,\ (m,q)=1}|h_r(m)|\le\frac{z^2}{\log z}\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\mu^2(r)\sum_{\delta|r}\frac{2^{\omega(\delta)}}{\varphi(\delta)}\le$$
$$\le\frac{R}{q}\frac{z^2}{\log z}\prod_{p\ge2}\biggl(1+\frac{2}{p(p-1)}\biggr)\le3.3\,\frac{R}{q}\frac{z^2}{\log z}.$$

Лемма 34 доказана. $\square$

4.2. Общий случай.

Лемма 35. *Пусть $Rz^2/q \le X$. Тогда*

$$\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1} \frac{\mu^2(r)\bigl|L_r^{(1)}(a,t,\beta)\bigr|}{\varphi(r)} \le \frac{X}{q}G(R)\biggl(2.008\frac{\log(4XR/(eq))}{\log z}+3\biggr)+ \\ +\mathcal{O}\biggl(\bigl((|t|+|\beta|X+1)\log^2 X\bigr)\frac{Rz^2}{\log z}\biggr).$$

Доказательство. Сначала произведем в (2.11) суммирование по n с помощью леммы 33:

$$L_r^{(1)}(a,t,\beta) = \frac{\mu(q)}{q}\sum_{m\le 2X,\ (m,q)=1}\frac{h_r(m)}{m^{it}}\int\limits_{X/m}^{2X/m}\frac{e(\beta m v)\log v}{v^{it}}\,dv + \\ +\mathcal{O}\biggl(q(|t|+|\beta|X+1)\log^2 X\sum_{m\le 2X,\ (m,q)=1}|h_r(m)|\biggr).$$

Замена переменной $w=vm$ дает

$$L_r^{(1)}(a,t,\beta) = \frac{\mu(q)}{q}\sum_{m\le 2X,\ (m,q)=1}\frac{h_r(m)}{m}\left(\int\limits_{X}^{2X}\frac{e(\beta w)\log w}{w^{it}}\,dw - \int\limits_{X}^{2X}\frac{e(\beta w)\,dw}{w^{it}}\log m\right) + \\ +\mathcal{O}\biggl(q(|t|+|\beta|X+1)\log^2 X\sum_{m\le 2X,\ (m,q)=1}|h_r(m)|\biggr),$$

так что, пользуясь обозначениями A_r', A_r'' из (3.16), получаем

$$L_r^{(1)}(a,t,\beta) = \frac{\mu(q)}{q}\int\limits_{X}^{2X}\frac{e(\beta w)\log w}{w^{it}}\,dw\,A_r' - \frac{\mu(q)}{q}\int\limits_{X}^{2X}\frac{e(\beta w)\,dw}{w^{it}}A_r'' + \\ +\mathcal{O}\biggl(q(|t|+|\beta|X+1)\log^2 X\sum_{m\le 2X,\ (m,q)=1}|h_r(m)|\biggr).$$

Дальнейшая оценка величины $L_r^{(1)}(a,t,\beta)$ практически дословно повторяет соответствующие выкладки для $L_r^{(1)}(a,0,0)$. Подробности мы опускаем. $\square$

5. ВТОРАЯ ЛИНЕЙНАЯ СУММА

В этом разделе мы рассмотрим вторую сумму, определенную в (2.12).

Лемма 36. *Если a и r таковы, что $(a,q)=(r,q)=1$, то*

$$\bigl|L_r^{(2)}(a,0,0)\bigr| \le 1.004\frac{\mu^2(q)X\log M_0}{\varphi(q)\log z} + 1.04\varphi(q)\varphi_+(r)M_0\frac{z^2}{\log z},$$

где $\varphi_+(r)=\sum_{\ell|r}\ell=\prod_{p|r}(1+p)$.

Доказательство. Несложно видеть, что

$$L_r^{(2)}(a,t,\beta) = \sum_{\substack{m\le M_0\\(m,q)=1}}\frac{\Lambda(m)}{m^{it}}\sum_{\substack{d\le z^2\\(d,q)=1}}\lambda_d^{(1)}\sum_{\substack{n\sim X/m\\(n,q)=1,\ d|n}}e(\beta mn)\frac{c_r(n)}{n^{it}}\,e\Bigl(\frac{mna}{q}\Bigr) =$$

$$= \sum_{\substack{m\le M_0\\(m,q)=1}} \frac{\Lambda(m)}{m^{it}} \sum_{\substack{d\le z^2\\(d,q)=1}} \lambda_d^{(1)} \sum_{\ell|r} \ell\,\mu\Big(\frac{r}{\ell}\Big) \sum_{\substack{n\sim X/m\\(n,q)=1,\ [d,\ell]|n}} e(\beta mn)\frac{e(mna/q)}{n^{it}}. \qquad (5.1)$$

Положим теперь $t=\beta=0$ и воспользуемся леммой 30; получим

$$L_r^{(2)}(a,0,0) = \sum_{\substack{m\le M_0\\(m,q)=1}} \Lambda(m) \sum_{\substack{d\le z^2\\(d,q)=1}} \lambda_d^{(1)} \sum_{\ell|r} \ell\,\mu\Big(\frac{r}{\ell}\Big)\bigg(\frac{\mu(q)X}{m[d,\ell]q} + \mathcal{O}^*(\varphi(q))\bigg) =$$

$$= \frac{\mu(q)X\varphi(r)}{q} \sum_{\substack{m\le M_0\\(m,q)=1}} \frac{\Lambda(m)}{m} \sum_{\substack{d\le z^2\\(d,q)=1,\ r|d}} \frac{\lambda_d^{(1)}}{d} + \mathcal{O}^*\bigg(1.04\varphi(q)\varphi_+(r)M_0\frac{z^2}{\log z}\bigg),$$

поскольку остаток в последнем выражении не превосходит

$$\varphi(q)\sum_{m\le M_0}\Lambda(m)\sum_{d\le z^2}\big|\lambda_d^{(1)}\big|\sum_{\ell|r}\ell \le 1.04\varphi(q)\,M_0\frac{z^2}{\log z}\,\varphi_+(r),$$

причем сумма по m оценивается с помощью (3.1), а сумма по d — с помощью леммы 23. Применяя второе неравенство леммы 24 (с параметрами $R=r$ и $Q=q$), находим

$$\big|L_r^{(2)}(a,0,0)\big| \le \frac{1.004\mu^2(q)\,X\log M_0}{\varphi(q)\log z} + 1.04\varphi_+(r)\,\varphi(q)\,M_0\frac{z^2}{\log z},$$

причем сумма по m на этот раз оценивается с помощью (3.3). Так приходим к утверждению леммы. $\square$

Переход к общему случаю с использованием (5.1) не представляет трудностей. Имеет место

Лемма 37. *Пусть a и r таковы, что $(a,q)=(r,q)=1$. Тогда*

$$\big|L_r^{(2)}(a,t,\beta)\big| \ll \frac{\mu^2(q)X\log M_0}{(1+|t|)\varphi(q)\log z} + \mathcal{O}\bigg(q(|t|+|\beta|X+1)\varphi_+(r)M_0\frac{z^2}{\log z}\log X\bigg).$$

Прямым следствием этой леммы является

Лемма 38. *Для любого $\varepsilon>0$ имеем*

$$\int_{-T}^{T}\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\big|L_r^{(2)}(a,t,0)\big|\,dt \ll_\varepsilon \frac{X(\log T)(\log R)\log M_0}{\varphi(q)\log z} + \frac{M_0z^2T^2R^{1+\varepsilon}\log X}{\log z}.$$

6. ОСТАТОК, ВОЗНИКАЮЩИЙ ПРИ РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ

Лемма 39. *Пусть $\varepsilon\in(0,0.154]$ и $R/q\ge 15$. Тогда*

$$\sum_{\substack{rq\le R\\(r,q)=1}}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\sum_{\substack{n\le B\\(n,q)=1}}\frac{|v_r(n)|^2}{n} \le 0.285\,G_q\Big(\frac{R}{q}\Big)\frac{(1+\varepsilon)^2B^\varepsilon z^{4\varepsilon}\zeta^2(1+\varepsilon)R}{q\log^2 z}\Big(\log\frac{R}{q}+3.1\Big)^3.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$|c_r(n)|^2 \le \varphi((n,r))^2 = \sum_{\delta|n,\ \delta|r}\delta f_2(\delta),$$

в котором $f_2(\delta) = \prod_{p|\delta}(p-2)$. Согласно неравенству (3.6) получаем

$$\sum_{\substack{r\le R/q\\(r,q)=1}} \frac{\mu^2(r)|c_r(n)|^2}{\varphi(r)} = \sum_{\delta|n} \delta f_2(\delta) \sum_{\substack{\delta|r\le R/q\\(r,q)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} = \sum_{\delta|n} f_2(\delta) G_{\delta q}\left(\frac{R}{\delta q}\right) \le \sum_{\substack{\delta|n\\ \delta\le R/q}} f_3(\delta) G_q\left(\frac{R}{q}\right),$$

где $f_3(\delta) = \mu^2(\delta)\prod_{p|\delta}(p-1)(p-2)/p$. Обозначая исходную сумму через S, будем иметь

$$S \le \sum_{\substack{rq\le R\\(r,q)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \sum_{n\le B}\left(\sum_{d|n}\lambda_d^{(1)}\right)^2 \frac{|c_r(n)|^2}{n} \le G_q\left(\frac{R}{q}\right) \sum_{\delta\le R/q} f_3(\delta) \sum_{\delta|n\le B}\frac{1}{n}\left(\sum_{d|n}\lambda_d^{(1)}\right)^2 \le$$

$$\le G_q\left(\frac{R}{q}\right) B^\varepsilon \sum_{\delta\le R/q} f_3(\delta) \sum_{\delta|n} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\left(\sum_{d|n}\lambda_d^{(1)}\right)^2 \le$$

$$\le G_q\left(\frac{R}{q}\right) B^\varepsilon \zeta(1+\varepsilon) \sum_{\delta\le R/q} f_3(\delta) \sum_{d_1,d_2\le z^2} \frac{\lambda_{d_1}^{(1)}\lambda_{d_2}^{(1)}}{[\delta,d_1,d_2]^{1+\varepsilon}}.$$

Пользуясь леммой 26 и соотношением (3.4), находим

$$\frac{S}{G_q(R/q)} \le \frac{25(1+\varepsilon)^2 B^\varepsilon z^{4\varepsilon}\zeta^2(1+\varepsilon)}{\log^2 z} \sum_{\delta\le R/q} f_3(\delta)\prod_{p|\delta}\frac{4}{p}.$$

Применяя лемму 21, получаем

$$S \le G_q\left(\frac{R}{q}\right) \frac{25(1+\varepsilon)^2 B^\varepsilon z^{4\varepsilon}\zeta^2(1+\varepsilon)R}{q\log^2 z} \cdot 0.0114\left(\log\frac{R}{q} + 3.1\right)^3.$$

Лемма доказана. $\square$

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7 С ЯВНЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Продолжим рассуждения, начало которым было положено в разд. 2.

7.1. Преобразование каждой из величин $|S_r(a/q,t,\beta,M,N)|$. Напомним разложение (2.14) суммы S_r. Прежде всего имеем следующую явную оценку.

Лемма 40. *Если $M \ge 10^{14}$ и $\delta \ge M^{-1/4}$, то*

$$E_1(\delta,r) + E_2(\delta,r) + 2\delta E_3(r) \le 10.5\,\delta M \sum_{n\sim N,\ (n,q)=1} |v_r(n)|.$$

Если не обращать внимание на точные значения констант, то этому утверждению можно придать следующий вид.

Лемма 41. *Пусть $\epsilon > 0$. Если $\delta M \gg M^\epsilon$, то*

$$E_1(\delta,r) + E_2(\delta,r) + 2\delta E_3(r) \ll_\epsilon \delta M \sum_{n\sim N,\ (n,q)=1} |v_r(n)|.$$

Доказательство. Заметим сначала, что в случае, когда $N < n \le 2N$, $M < m \le 2M$ и $X < mn \le 2^\delta X$, положив $A = \max(M, X/n)$, будем иметь

$$\left[\max\left(M,\frac{X}{n}\right),\min\left(2M,\frac{2^\delta X}{n}\right)\right] \subset \left[A, A+(2^\delta-1)M\right] \subset \left[A, A+(2\delta\log 2)M\right],$$

поскольку $2^\delta - 1 = \int_0^{\delta\log 2} e^u\,du \le 2\delta\log 2$. Аналогично в случае, когда $N < n \le 2N$, $M < m \le 2M$ и $2^{1-\delta}X < mn \le 2X$, для $A = \max(M, 2^{1-\delta}X/n)$ получаем

$$\Bigl[\max\Bigl(M, \frac{2^{1-\delta}X}{n}\Bigr), \min\Bigl(2M, \frac{2X}{n}\Bigr)\Bigr] \subset \bigl[A, A + 2(1-2^{-\delta})M\bigr] \subset \bigl[A, A + (2\delta\log 2)M\bigr],$$

так как $1 - 2^{-\delta} = \int_{-\delta\log 2}^{0} e^u\,du \le \delta\log 2$. Отметим, что $2\log 2 < 1.4$. Применяя лемму 14 дважды, находим

$$E_1(\delta, r) + E_2(\delta, r) \le 2\frac{2\cdot 1.4\delta M}{\log(1.4\delta M)}\log(2M)\sum_{n\sim N}|v_r(n)|.$$

Так как $\delta \ge M^{-1/4}$, имеем $\delta M \ge M^{3/4}$ и

$$\frac{2\cdot 1.4\log(2M)}{\log(1.4M^{3/4})} \le 3.8.$$

Поэтому

$$E_1(\delta, r) + E_2(\delta, r) \le 3.8\,\delta M\sum_{n\sim N}|v_r(n)|. \tag{7.1}$$

Переходя к $E_3(r)$ и применяя лемму 13, получаем

$$E_3(r) \le \frac{5}{4}M\sum_{n\sim N}|v_r(n)|. \tag{7.2}$$

Заметим теперь, что $2\cdot 3.8 + 2\cdot 5/4 = 10.1 \le 10.5$. $\square$

Далее, пользуясь классическим неравенством $|a+b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)$, находим

$$\begin{aligned}\Bigl|S_r\Bigl(\frac{a}{q}, t, \beta, M, N\Bigr)\Bigr|^2 \le 2\int_{-\Delta}^{\Delta}\sum_{b \bmod^* q}\Bigl|\sum_{m\equiv b[q],\ m\sim M}\frac{\Lambda(m)}{m^{i(v+t)}}\Bigr|^2|\mathscr{H}(v)|^2\,dv \times \\ \times\int_{-\Delta}^{\Delta}\sum_{b \bmod^* q}\Bigl|\sum_{(n,q)=1,\ n\sim N}\frac{v_r(n)}{n^{i(v+t)}}\,e\Bigl(\frac{nba}{q}\Bigr)\Bigr|^2 dv + 2\Bigl(10.5\,\delta M\sum_{n\sim N}|v_r(n)|\Bigr)^2.\end{aligned} \tag{7.3}$$

В силу леммы 45 (см. приложение) имеем $\int_{\mathbb{R}}|\widehat{H}(\delta, \lambda, \kappa; v)|^2\,dv = \int_{\mathbb{R}}|H(\delta, \lambda, \kappa; u)|^2\,du = (2-2\delta)\times(\log 2)^2/(4\pi)^2$. Предполагая, что $M \ge \max(121, q^3)$, воспользуемся леммой 16:

$$\begin{aligned}\Bigl|S_r\Bigl(\frac{a}{q}, t, \beta, M, N\Bigr)\Bigr|^2 \le 2\cdot 2\frac{(\log 2)^2}{(4\pi)^2}\frac{45}{8}\frac{M^2}{\varphi(q)}\int_{-\Delta}^{\Delta}\sum_{b \bmod^* q}\Bigl|\sum_{(n,q)=1,\ n\sim N}\frac{v_r(n)}{n^{i(v+t)}}\,e\Bigl(\frac{nb}{q}\Bigr)\Bigr|^2 dv + \\ + 221\,\delta^2M^2(N+1)\sum_{n\sim N}|v_r(n)|^2,\end{aligned}$$

откуда, поскольку $MN \le X$ и $N \ge z \ge 121$, находим

$$\begin{aligned}\Bigl|S_r\Bigl(\frac{a}{q}, t, \beta, M, N\Bigr)\Bigr|^2 \le \frac{45}{2}\frac{(\log 2)^2}{(4\pi)^2}\frac{M^2}{\varphi(q)}\int_{-\Delta}^{\Delta}\sum_{b \bmod^* q}\Bigl|\sum_{(n,q)=1,\ n\sim N}\frac{v_r(n)}{n^{i(v+t)}}\,e\Bigl(\frac{nb}{q}\Bigr)\Bigr|^2 dv + \\ + 446\,\delta^2X^2\sum_{n\sim N}\frac{|v_r(n)|^2}{n}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

7.2. Оценка среднего значения (по r и (M,N)) величины $|S_r(a/q,t,\beta,M,N)|^2$. Будем пользоваться следующим кратким обозначением:

$$\Sigma(M,N)=\sum_{rq\le R,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\Bigl|S_r\Bigl(\frac{a}{q},t,\beta,M,N\Bigr)\Bigr|^2. \tag{7.5}$$

Просуммируем неравенство (7.4) по r и воспользуемся неравенством большого решета из теоремы 11; так как $MN\le X$, получим

$$\Sigma(M,N)\le 158\,\frac{M^2}{\varphi(q)}\frac{(\log 2)^2}{(4\pi)^2}\sum_{\substack{(n,q)=1\\ n\sim N}}\biggl(\sum_{d|n}\lambda_d^{(1)}\biggr)^2(n+R^2\Delta)+446\,\delta^2X^2\sum_{\substack{rq\le R\\ (r,q)=1}}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\sum_{n\sim N}\frac{|v_r(n)|^2}{n}.$$

Положим $R=z^{1/4}=2\delta^{-1}>2q^2$ и $M_0=z\ge q^8$, где $z\ge 10^{14}$. Предполагая, что $\beta=0$, согласно (A.6) будем иметь

$$\delta^2\Delta=\frac{2}{\pi\log 2}.$$

Тогда

$$n+R^2\Delta\le 2N+\frac{2\delta^{-2}}{\pi\log 2}\cdot 4\delta^{-2}\le 2N+4\delta^{-4}\le 2N+\frac{z}{4},$$

поскольку $R=2\delta^{-1}$.

Далее, так как $N\ge z$, для любого $n\in(N,2N]$ имеем $n(2N+z/4)\le 4.5\,N^2$. Следовательно,

$$\Sigma(M,N)\le 4.4\,\frac{X^2}{\varphi(q)}\sum_{(n,q)=1,\ n\sim N}\frac{\bigl(\sum_{d|n}\lambda_d^{(1)}\bigr)^2}{n}+446\,\delta^2X^2\sum_{rq\le R,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\sum_{n\sim N}\frac{|v_r(n)|^2}{n}.$$

Просуммируем теперь по соответствующим парам (M,N). Введем обозначение

$$\Sigma=\sum_{M,N}\Sigma(M,N). \tag{7.6}$$

Суммирование по M не представляет труда: каждому N отвечает не более двух значений M. Поэтому

$$\Sigma\le 8.8\,\frac{X^2}{\varphi(q)}\sum_{(n,q)=1,\ n\le 2X/z}\frac{\bigl(\sum_{d|n}\lambda_d^{(1)}\bigr)^2}{n}+892\,\delta^2X^2\sum_{rq\le R,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\sum_{n\le 2X/z}\frac{|v_r(n)|^2}{n}. \tag{7.7}$$

Опустим в первой сумме условие $(n,q)=1$ и воспользуемся леммой 27; для оценки второго слагаемого применим лемму 39. Получим

$$\Sigma\le 8.8\,\frac{X^2}{\varphi(q)}\cdot 166\,\frac{\log(2X/z)}{\log z}+892\,\delta^2X^2G_q\Bigl(\frac{R}{q}\Bigr)\frac{0.285(1+\varepsilon)^2(2e^{2\gamma}Xz^3)^\varepsilon R}{\varepsilon^2q\log^2 z}\Bigl(\log\frac{R}{q}+3.1\Bigr)^3.$$

Отсюда, замечая, что $\delta=2R^{-1}$, $\varphi(q)\le q$, $G_q(R/q)\le G(R/q)$ и $R/q\ge R^{1/3}=X^{1/48}\ge 15$, находим

$$\frac{\varphi(q)}{X^2}\Sigma\le 1461\,\frac{\log(2X/z)}{\log z}+1016\,\frac{(1+\varepsilon)^2(2e^{2\gamma}Xz^3)^\varepsilon}{R\varepsilon^2\log^2 z}\Bigl(\log\frac{R}{q}+3.1\Bigr)^4.$$

Мы использовали неравенство (3.8). Положим теперь $z = X^{1/4}$ и $\varepsilon = 8/(7\log X) \le 0.009$ (поскольку $X \ge 250^{24}$). Будем иметь

$$\frac{\varphi(q)}{X^2}\Sigma \le 4414 + 95\,200\,\frac{(\log R - \log q + 3.1)^4}{R}.$$

Так как $R = z^{1/4} \ge q^{3/2} \ge 250^{3/2}$, то

$$\Sigma \le 32\,830\,\frac{X^2}{\varphi(q)}. \tag{7.8}$$

7.3. Завершение доказательства теоремы 7. Напомним, что $z = X^{1/4} \ge q^6$, и будем считать, что $q \ge 250$. Тогда имеем

$$G_q\biggl(\frac{R}{q}\biggr)\Bigl|S\Bigl(\frac{a}{q},t,\beta\Bigr)\Bigr| \le \sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\bigl(|L_r^{(1)}(a,\beta,t)| + |L_r^{(2)}(a,\beta,t)|\bigr) + \\ + \sqrt{G_q\biggl(\frac{R}{q}\biggr)}\biggl(32\,830\,\frac{X^2}{\varphi(q)}\,\frac{2\log(2X/z^2)}{\log 2}\biggr)^{1/2},$$

где множитель $2(\log(2X/z^2))/\log 2$ возникает из неравенства (2.13), поскольку $M_0 = z$. Эта оценка справедлива при $\beta = 0$ (в силу выбора Δ) и произвольном t. В дальнейшем в численных оценках мы полагаем $t = 0$.

Положим $R^4 = z = M_0 = X^{1/4} \ge q^6$ и $q \ge 250$.

Переходя к $L_r^{(1)}$, воспользуемся леммой 34 (условие Rz^2/q выполнено). Получим

$$\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\bigl|L_r^{(1)}(a,0,0)\bigr| \le \frac{X}{q}\,G(R)\biggl(3.012\,\frac{\log(4X/e)}{\log z} + 2\biggr) + 3.3\varphi(q)\frac{R}{q}\,\frac{z^2}{\log z}\log(8X) \le \\ \le \frac{X}{q}\,G(R)\biggl(3.012\frac{\log(4X/e)}{(1/4)\log X} + 2 + \frac{3.3\,X^{-19/48}}{(1/16)\log X + 1.06}\,\frac{\log(8X)}{(1/4)\log X}\biggr) \le 16\frac{X}{q}G(R).$$

Отметим, что для оценки $G(R)$ мы воспользовались неравенством (3.9), которое применимо, поскольку $R = X^{1/16} \ge 6$. Переходя к $L_r^{(2)}$ и пользуясь утверждениями лемм 36 и 22, находим (с учетом того, что $\varphi(q)M_0Rz^2 \le X^{107/192}$, как несложно проверить)

$$\sum_{r\le R/q,\ (r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\bigl|L_r^{(2)}(a,0,0)\bigr| \le 1.004\,G_q\biggl(\frac{R}{q}\biggr)\frac{\mu^2(q)X\log M_0}{\varphi(q)\log z} + 1.04\varphi(q)M_0\frac{z^2}{\log z}\cdot 3.28\frac{R}{q} \le \\ \le G(R)\frac{X}{q}\biggl(1.004 + 3.4112\,\frac{X^{107/192-1}}{((1/16)\log X + 1.06)(1/4)\log X}\biggr) \le 1.005\,G(R)\frac{X}{q}.$$

В итоге в правой части оценки искомой суммы возникает величина

$$18\,G(R)\frac{X}{q} + \sqrt{G_q\biggl(\frac{R}{q}\biggr)}\biggl(47\,860\,\frac{X^2}{\varphi(q)}\log X\biggr)^{1/2}.$$

Замечая, что $R/q \ge R^{1/3} = X^{1/48}$ и $G_q(R/q) \ge (\varphi(q)/q)G(R/q)$, в предположении $250 \le q \le$ $\le X^{1/24}$ приходим к оценке

$$\Bigl|S\Bigl(\frac{a}{q},0,0\Bigr)\Bigr| \le 1292\frac{\sqrt{q}\,X}{\varphi(q)}.$$

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 ДЛЯ СЛУЧАЯ (V4)

Доказательство теоремы 4 с простыми числами вместо функции Мёбиуса получается несложным видоизменением доказательства теоремы 7. Начнем с неравенства, которое следует из оценки (2.13):

$$\Big|S\Big(\frac{a}{q},t,\beta\Big)-L_r^{(1)}(a,t,\beta)+L_r^{(2)}(a,t,\beta)\Big|^2\le\frac{2\log(2X/(M_0z))}{\log 2}\times$$
$$\times\sum_{M,N}\left(\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\Bigg|\sum_{\substack{(mn,q)=1\\ m\sim M,\ n\sim N}}\frac{\Lambda(m)}{m^{i(v+t)}}\frac{v_r(n)}{n^{i(v+t)}}\,e\Big(\frac{mna}{q}\Big)\Bigg|\,|\mathscr{H}(v)|\,dv+E_1(\delta,r)+E_2(\delta,r)+2\delta E_3(r)\right)^2. \quad (8.1)$$

Действительно, это неравенство справедливо, поскольку сумма $\sum_{mn\sim X}A(m,n)$ есть не что иное, как $S(a/q,t,\beta)-L_r^{(1)}(a,t,\beta)+L_r^{(2)}(a,t,\beta)$. “Локальный” аналог этой величины, отвечающий условиям $m\sim M$, $n\sim N$, совпадает с $S_r(a/q,t,\beta,M,N)$. Однако в последней сумме переменные m и n связаны ограничением $mn\sim X$. Поэтому для получения приведенного выше неравенства достаточно подставить (2.14) в (2.13).

Оставшаяся трудность состоит в том, чтобы объединить все условия на параметры R, δ, M_0, z, q и X. Перечислим их, внося некоторые упрощения (так, мы игнорируем разницу между $\varphi(q)$ и q, вводим условие $R^2/(z\delta^2)\le 1$, хотя нам достаточно такого неравенства с произвольной постоянной в правой части, и т.д.). Задавшись некоторым $\epsilon>0$, потребуем выполнения следующих условий:

(1) $R\ge 8q$;

(2) $M_0,R,z\ge X^{\epsilon}$;

(3) $\delta M_0\ge M_0^{\epsilon}$ для разделения переменных в лемме 41;

(4) $\delta^2R\log^6X\le 1$ для применения большого решета при работе с остаточным членом, возникающим при разделении переменных: действительно, в силу лемм 39 (с $\varepsilon=1/\log z\asymp$ $\asymp 1/\log N$) и 41 имеем

$$\sum_{r\le R/q}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\big|E_1(\delta,r)+E_2(\delta,r)+2\delta E_3(r)\big|^2\ll\delta^2(MN)^2(\log R)^4\frac{R}{q}.$$

После суммирования по N (фактически по степеням двойки) и по M (не более двух значений) приведенная выше оценка увеличится на множитель $\log X$. Еще один логарифм возникает из-за множителя $\mathcal{O}(\log(X/(M_0z)))$;

(5) $(\beta X)^2\le\delta^{-1}$; тем самым для Δ, определенного формулой $\Delta=100(\delta^{-1}+(\beta X)^2)/\delta$, будет выполнено неравенство $\Delta\ll\delta^{-2}$;

(6) $R^2/(z\delta^2)\le 1$ и $M_0\ge q^{1+\epsilon}$ для применения большого решета к билинейной форме. В самом деле, продолжая рассуждения, приводящие к (7.3), применим следствие 12. Возникающую при этом L^2-норму оценим с помощью леммы 27. Нам нужна оценка $R^2\Delta\ll z$, которая обеспечивается неравенством $R^2\delta^{-2}\ll z$, поскольку N не меньше z. Вместо леммы 16 мы будем пользоваться леммой 17 с менее обременительным ограничением $M\ge q^{1+\varepsilon}$. Так как M может быть таким же малым, как M_0, возникает второе из приведенных выше условий;

(7) $(|t|+1+|\beta|X)\sqrt{q}Rz^2\le X$ для слагаемого, возникающего при работе с $L_r^{(1)}(a,t,\beta)$ в лемме 35;

(8) $(|t|+1+|\beta|X)\sqrt{q}Rz^2M_0\le X$ для слагаемого, возникающего при работе с $L_r^{(2)}(a,t,\beta)$ в лемме 37.

Условие (7) вытекает из условия (8). Величину M_0 следует брать как можно меньшей, так что мы положим $M_0 = \min(q, \delta^{-1})X^{2\theta}$ для некоторого положительного θ. Чтобы сделать промежутки изменения параметров β и t как можно бо́льшими, δ и z будем брать маленькими. При этом условие (6) накладывается для баланса между двумя указанными целями. Кроме того, R следует брать как можно меньшим, так что мы положим $R = qX^{2\theta}$ и $z = q^2X^{4\theta}/\delta^2$.

Определим $M_0 = qX^{4\theta}$ и $\delta = q^{-1}X^{-2\theta}$. Также будем предполагать, что

$$|\beta X| \le \sqrt{q}X^{\theta} \qquad \text{и} \qquad (1+|t|+|\beta|X)q^{13/2}X^{22\theta} \le X.$$

Наконец, положим $\eta = (2-44\theta)/13$, что и приводит к утверждению теоремы.

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 ДЛЯ СЛУЧАЯ (V4)

Доказательство L^1-теоремы 2 подобно доказательству теоремы 7, но возникает одно усложнение, которое мы поясним в настоящем разделе. Случай суммирования по простым числам чуть более труден, поскольку опирается на теорему Барбана–Дэвенпорта–Халберстама (в остальных случаях достаточно оценок $|\lambda(m)|, |\mu(m)| \le 1$). Воспользуемся неравенством $|\mathscr{H}(v)| \ll (1+X|\beta|)/(1+|v|)$ при $\beta = 0$ и следствием 12. Начнем с оценки

$$G_q\Big(\frac{R}{q}\Big)\int_{-T}^{T}\bigg|\sum_{\ell\sim X,\,(\ell,q)=1}\frac{\Lambda(\ell)}{\ell^{it}}\,e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big)\bigg|\,dt \ll \int_{-T}^{T}\sum_{r\le R/q,\,(r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\big(\big|L_r^{(1)}(a,t,0)\big|+\big|L_r^{(2)}(a,t,0)\big|\big)\,dt\,+$$
$$+\int_{-T}^{T}\sum_{r\le R/q,\,(r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\bigg|\sum_{\substack{mn\sim X\\ (mn,q)=1,\ m>M_0}}\frac{\Lambda(m)v_r(n)}{(mn)^{it}}\,e\Big(\frac{mna}{q}\Big)\bigg|\,dt.$$

Слагаемое в правой части, содержащее $L_r^{(1)}$, оценивается точно так же, как в лемме 35, а слагаемое, содержащее $L_r^{(2)}$, — как в лемме 38. Оценка же третьего слагаемого в правой части нуждается в некотором видоизменении, которое связано с использованием неравенства (7.3). Прежде всего разобьем сумму по (m,n) на части, отвечающие примерным значениям (M,N) этих переменных, и воспользуемся неравенством Коши для итоговой суммы. Получим

$$\int_{-T}^{T}\sum_{r\le R/q,\,(r,q)=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\bigg|\sum_{\substack{mn\sim X\\ (mn,q)=1,\ m>M_0}}\frac{\Lambda(m)v_r(n)}{(mn)^{it}}\,e\Big(\frac{mna}{q}\Big)\bigg|\,dt \ll$$
$$\ll \sum_{M,N}\Bigg(G_q\Big(\frac{R}{q}\Big)\sum_{r\le R/q}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\bigg(\int_{-T}^{T}\Big|S_r\Big(\frac{a}{q},t,\beta,M,N\Big)\Big|\,dt\bigg)^2\Bigg)^{1/2}.$$

Теперь избавимся от условия $mn\sim X$:

$$\bigg(\int_{-T}^{T}\Big|S_r\Big(\frac{a}{q},t,\beta,M,N\Big)\Big|\,dt\bigg)^2 \ll \bigg(\delta TM\sum_{n\sim N}|v_r(n)|\bigg)^2+$$
$$+\int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-T}^{T}\sum_{b\bmod^* q}\bigg|\sum_{m\equiv b[q],\,m\sim M}\frac{\Lambda(m)}{m^{i(v+t)}}\bigg|^2|\mathscr{H}(v)|\,dt\,dv\,\times$$
$$\times\int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-T}^{T}\sum_{b\bmod^* q}\bigg|\sum_{(n,q)=1,\,n\sim N}\frac{v_r(n)}{n^{i(v+t)}}\,e\Big(\frac{mna}{q}\Big)\bigg|^2dt\,|\mathscr{H}(v)|\,dv. \tag{9.1}$$

Применим неравенство

$$\int\limits_{\substack{-\Delta \\ v+t=w}}^{\Delta}\int\limits_{-T}^{T} |\mathscr{H}(v)|\,dv \ll \log\min(2+T,\Delta).$$

С этого момента и далее с множителем, содержащим $v_r(n)$, будем поступать, как раньше. Что же касается множителя, содержащего выражение с Λ, то сначала сведем его к сумме по простым числам, после чего воспользуемся мультипликативностью характеров. На первом шаге получаем

$$\sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{m\equiv b[q],\, m\sim M}\frac{\Lambda(m)}{m^{iw}}\Biggr|^2 = \sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{p\equiv b[q],\, p\sim M}\frac{\log p}{p^{iw}} + \sum_{\substack{m\equiv b[q],\, m\sim M\\ m=p^k,\, k\ge 2}}\frac{\Lambda(m)}{m^{iw}}\Biggr|^2 \le$$

$$\le 2\sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{p\equiv b[q],\, p\sim M}\frac{\log p}{p^{iw}}\Biggr|^2 + 2\sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{\substack{m\equiv b[q],\, m\sim M\\ m=p^k,\, k\ge 2}}\frac{\Lambda(m)}{m^{iw}}\Biggr|^2.$$

Далее имеем оценки

$$\sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{\substack{m\equiv b[q],\, m\sim M\\ m=p^k,\, k\ge 2}}\frac{\Lambda(m)}{m^{iw}}\Biggr|^2 \le \max_{b \bmod^* q}\Biggl(\sum_{\substack{m\equiv b[q],\, m\sim M\\ m=p^k,\, k\ge 2}}\Lambda(m)\Biggr)\sum_{\substack{m\sim M\\ m=p^k,\, k\ge 2}}\Lambda(m) \le$$

$$\le \Biggl(\sum_{\substack{m\le M\\ m=p^k,\, k\ge 2}}\Lambda(m)\Biggr)^2 \ll M.$$

Учитывая условие $m\equiv b[q]$ с помощью мультипликативных характеров, находим

$$\sum_{b \bmod^* q}\Biggl|\sum_{m\equiv b[q],\, m\sim M}\frac{\Lambda(m)}{m^{iw}}\Biggr|^2 \le \frac{2}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\Biggl|\sum_{(p,q)=1,\, p\sim M}\frac{\chi(p)\log p}{p^{iw}}\Biggr|^2 + \mathcal{O}(M).$$

Получившуюся сумму сразу сводим к сумме по примитивным характерам:

$$\sum_{\chi \bmod q}\Biggl|\sum_{(p,q)=1,\, p\sim M}\frac{\chi(p)\log p}{p^{iw}}\Biggr|^2 = \sum_{\mathfrak{f}|q}\sum_{\chi \bmod^* \mathfrak{f}}\Biggl|\sum_{(p,q)=1,\, p\sim M}\frac{\chi(p)\log p}{p^{iw}}\Biggr|^2.$$

Следующий шаг состоит в применении теоремы Барбана–Дэвенпорта–Халберстама с использованием теоремы 9. У нас $\mathfrak{f}\mid q$; также заметим, что $c_r(p)=\mu(p)=-1$; поэтому

$$\sum_{r\le M/\mathfrak{f},\, (r,\mathfrak{f})=1}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\Biggl|\sum_{(p,q)=1,\, p\sim M}\frac{\chi(p)c_r(p)\log p}{p^{iw}}\Biggr|^2 = G_{\mathfrak{f}}\Bigl(\frac{M}{\mathfrak{f}}\Bigr)\Biggl|\sum_{(p,q)=1,\, p\sim M}\frac{\chi(p)\log p}{p^{iw}}\Biggr|^2.$$

Напомним также, что согласно (3.7) имеем $(\mathfrak{f}/\varphi(\mathfrak{f}))G_{\mathfrak{f}}(M/\mathfrak{f}) \ge G(M/\mathfrak{f})$. Теперь можно воспользоваться теоремой 9 вместо леммы 16. Как и в предыдущем разделе, соберем вместе все условия на параметры ($\epsilon>0$ — некоторое число):

(1) $R\ge 8q$;

(2) $M_0, R, z\ge X^{\epsilon}$;

(3) $\delta M_0 \ge M_0^\epsilon$ для разделения переменных;

(4) $\delta^2 TR\log^6 R \le 1$ для применения неравенства большого решета при работе с остаточным членом, возникающим при разделении переменных, поскольку соответствующий остаточный член из разд. 8 просто интегрируется по t;

(5) $\Delta = 100/\delta^2$, так как $\beta = 0$, что делает здесь ненужным условие (5) из предыдущего раздела;

(6) $TR^2/(\delta^2 z) \le 1$ и $M_0 \ge q^{1+\epsilon}$ для применения неравенства большого решета к билинейной форме;

(7) $qT^2Rz^2 \le X\sqrt{q}$ для оценки остаточного члена, связанного с $L_r^{(1)}(a,t,0)$;

(8) $qT^2Rz^2M_0 \le X\sqrt{q}$ для оценки остаточного члена, связанного с $L_r^{(2)}(a,t,0)$.

Условие (7) снова является следствием условия (8). Приведем значения выбранных нами параметров:

$$R = qX^{2\theta}, \qquad \delta^{-1} = \sqrt{qT}X^{2\theta}, \qquad M_0 = \sqrt{qT}X^{3\theta}, \qquad z = q^3T^2X^{4\theta}, \tag{9.2}$$

где $\theta > 0$ — некоторое число. При этом будем предполагать, что $T^{13/2}q^8X^{13\theta} \le X$. Для получения искомой оценки остается положить $\eta = (1-13\theta)/8$.

10. ОЦЕНКА ДЛЯ КОРОТКОГО ПРОМЕЖУТКА: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

L^1-оценка открывает прямой путь к получению результатов для короткого промежутка. Начнем с комментария методологического характера. Можно было бы пытаться использовать преобразование Меллина характеристической функции промежутка $[X, X+X^\theta]$, однако отсутствие непрерывности приводит к тому, что такое преобразование при стремлении s к $i\infty$ будет убывать как $1/s$. Вследствие этого интеграл по вертикальной прямой от модуля такого преобразования не будет сходящимся, что приводит к дополнительным трудностям. Вместо этого можно попытаться получить более точное выражение для характеристической функции промежутка $[1, X]$, которое не связано с абсолютным значением преобразования Меллина, но опирается на дополнительную информацию о рассматриваемой последовательности. Речь идет об усеченной формуле Перрона. Кроме того, можно было бы рассмотреть сглаженную сумму исходных характеристических функций и затем избавиться от сглаживания с помощью оценок для коротких промежутков; фактически при этом используется точно та же информация, которая необходима для усеченной формулы Перрона.

Сказанное выше означает, что мы получим результаты необходимой степени точности, используя разность двух усеченных формул Перрона. Для наших целей вполне достаточно усеченной формулы Перрона в обычной форме из [27, Theorem 2.1]. В качестве методологического замечания отметим, что более сильная версия этой формулы, полученная первым автором в [33, Theorem 1.2], привела бы к более точной оценке остаточного члена.

Теорема 42 (усеченная формула Перрона). *Пусть ряд Дирихле* $F(z) = \sum_n u_n/n^z$ *сходится абсолютно при* $\operatorname{Re} z > \kappa_{\mathrm{a}}$, *и пусть* $\kappa > 0$ *строго больше* κ_{a}. *Тогда для* $X \ge 1$ *и* $T \ge 1$ *имеем*

$$\sum_{n\le X} u_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(z)\frac{X^z\,dz}{z} + \mathcal{O}^*\left(\int_{1/T}^{\infty} \sum_{|\log(X/n)|\le v} \frac{|u_n|}{n^\kappa}\frac{2X^\kappa\,dv}{Tv^2}\right).$$

Положим $F(z) = \sum_{X<\ell\le 2X} \Lambda(\ell)e(\ell\beta)/\ell^z$. Возьмем $\kappa = 1$ и $\omega = X^{\theta-1}$. Для работы с остатком разобьем промежуток интегрирования в точке $v = 1$. При $v \ge 1$ сумму $\sum_{|\log(X/n)|\le v} |u_n|/n$ оценим сверху величиной $\sum_{n\sim X} \Lambda(n)/n \ll 1$. Если же $v < 1$, то оценим множитель $1/n$ величиной

$X^{-1}e^{1/T} \ll 1/X$. При этом будем предполагать, что $T \le \sqrt{X}$. Отсюда при $1/T \le v \le 1$ в силу леммы 14 будем иметь

$$\sum_{|\log(X/n)|\le v} \frac{|u_n|}{n} \ll X^{-1} \sum_{e^{-v}X\le n\le e^v X} \Lambda(n) \ll X^{-1}\frac{vX}{\log(3vX)}\log X \ll v$$

(в лемме 14 следует положить $q=1$, $A=e^{-v}X$ и $B=3vX\ge 2\operatorname{sh}(v)X \ge 2X(e^v-e^{-v})/2)$. Это сразу приводит к равенству

$$\sum_{X<\ell\le X+X^\theta} \Lambda(\ell)\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{1-iT}^{1+iT} \sum_{X<\ell\le 2X} \frac{\Lambda(\ell)\, e(\ell a/q)}{\ell^z}\, \frac{X^z((1+\omega)^z-1)\,dz}{z} + \mathcal{O}\Big(\frac{X\log X}{T}\Big). \quad (10.1)$$

Как уже было отмечено, использование теоремы 1.2 из [33] позволило бы избежать появления множителя $\log X$ в остаточном члене. Единственная трудность состоит в том, что необходимо применять соответствующую формулу с одним и тем же значением T^* как для интервала до X, так и для интервала до $X+X^\theta$; эта трудность преодолевается обращением к следствию 5.1 из [33].

На этом мы завершим с отступлениями методологического характера и продолжим выкладки. Воспользуемся классическим неравенством $|(1+\omega)^z-1| \le |z\omega(1+\omega)|$, которое следует из представления

$$(1+\omega)^z - 1 = z\int\limits_0^\omega (1+y)^{z-1}\,dy.$$

Положим $T = X^{1-\theta}\sqrt{q}\log X$.

Перенесем контур интегрирования в (10.1) на прямую $\operatorname{Re} z=0$. Для оценки вклада от двух горизонтальных отрезков заметим, что при $\operatorname{Im} s=\pm T$ и $0\le \operatorname{Re} z=\sigma\le 1$ выполняются неравенства $|(1+\omega)^z-1| \ll 1$, $|1/z| \ll 1/T$ и $\sum_{\ell\sim X}\Lambda(\ell)/|\ell^z| \ll X/X^\sigma$. Они приводят к появлению остаточного члена $\mathcal{O}(X/T)$, что вполне нас устраивает.

На прямой $\operatorname{Re} z=0$ применим неравенство $|(1+\omega)^z-1|/|z| \ll X^{\theta-1}$ и таким образом придем к оценке

$$\sum_{X<\ell\le X+X^\theta} \Lambda(\ell)\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big) \ll X^{\theta-1}\int\limits_{-T}^{T} \Big|\sum_{X<\ell\le 2X}\frac{\Lambda(\ell)\, e(\ell a/q)}{\ell^{it}}\Big|\,dt + \frac{X^\theta}{\sqrt{q}}. \quad (10.2)$$

Теперь все готово для доказательства теоремы 3. Чтобы были выполнены условия этой теоремы, наложим дополнительное требование

$$X^{1-\theta}\sqrt{q}\log X \le \Big(\frac{X^\eta}{q}\Big)^{16/13}. \quad (10.3)$$

Для того чтобы гарантировать справедливость неравенства (10.3), достаточно предположения $\theta>\theta_0$ и неравенства

$$X^{1-\theta_0}\sqrt{q} \le \Big(\frac{X^\eta}{q}\Big)^{16/13} \quad (10.4)$$

при условии, что X достаточно велико.

11. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ С ФУНКЦИЕЙ МЁБИУСА

Перенос приведенных выше рассуждений на случай полинома

$$S^\flat\Big(\frac{a}{q}\Big) = \sum_{\ell\sim X} \mu(\ell)\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big) \tag{11.1}$$

не представляет трудностей. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в случае функции Мангольдта, с добавлением индекса $\flat$, когда они относятся к функции Мёбиуса. Работа с линейными формами требует лишь небольших изменений и приводит к тому же результату. Работа с билинейной формой оказывается (в одном из аспектов) даже проще, поскольку теперь нет необходимости пользоваться теоремой Бруна–Титчмарша, а вместо леммы 17 нужно применить оценку

$$\sum_{b \bmod q}\bigg|\sum_{m\equiv b[q],\, m\sim M}\mu(m)\bigg|^2 \ll \frac{M^2}{q}, \tag{11.2}$$

которая справедлива при $M \ge q^{1+\varepsilon}$. Также мы рассмотрим и тесно связанную с (11.1) сумму

$$S^\sharp\Big(\frac{a}{q}\Big) = \sum_{\ell\sim X,\, (\ell,q)=1} \mu(\ell)\, e\Big(\frac{\ell a}{q}\Big). \tag{11.3}$$

В (7.3) потребуется оценка величины

$$\sum_{b \bmod^* q}\bigg|\sum_{m\equiv b[q],\, m\sim M}\mu(m)\bigg|^2. \tag{11.4}$$

Она не превосходит $M^2\varphi(q)/q^2$, тогда как в случае с суммой по простым числам мы имели оценку вида $M^2/\varphi(q)$. Таким образом, оценка умножается на $\varphi^2(q)/q^2$, и из этого множителя нужно затем извлечь квадратный корень при выводе итогового неравенства.

12. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 1. Мы рассмотрим лишь случай иррегулярных чисел. Нужный нам результат вытекает из следующего более общего утверждения.

Теорема 43. *Пусть $X \ge 3$, $\theta \in [0.79, 1]$, и пусть $\mathcal{S}$ — множество иррегулярных чисел промежутка $[X, X+X^\theta]$. Пусть, далее, $q \le X^{1/20}$ — простое число, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — произвольные подмножества в $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ такие, что $|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \ge q(\log q)^2$. Тогда соотношение*

$$\sum_{\substack{a+b+s\equiv m[q]\\ a\in\mathcal{A},\, b\in\mathcal{B},\, s\in\mathcal{S}}} 1 \sim \frac{|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}|\cdot|\mathcal{S}|}{q}$$

(*при стремлении q к бесконечности*) *выполнено для любого $m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Определим сначала две тригонометрические суммы

$$T\Big(\mathcal{A}, \frac{c}{q}\Big) = \sum_{a\in\mathcal{A}} e\Big(\frac{ac}{q}\Big), \qquad T\Big(\mathcal{B}, \frac{c}{q}\Big) = \sum_{b\in\mathcal{B}} e\Big(\frac{bc}{q}\Big), \tag{12.1}$$

затем еще одну по иррегулярным числам

$$U(\alpha) = \sum_{X\le s\le X+X^\theta} \frac{1-\lambda(s)}{2} e(s\alpha) \tag{12.2}$$

и, наконец, число представлений

$$r(\mathcal{A},\mathcal{B},m)=\sum_{\substack{a+b+s\equiv m[q]\\ a\in\mathcal{A},\ b\in\mathcal{B},\ s\in\mathcal{S}}} 1. \tag{12.3}$$

Тогда, как обычно, имеем

$$r(\mathcal{A},\mathcal{B},m)=\frac{1}{q}\sum_{c \bmod^* q} T\Big(\mathcal{A},\frac{c}{q}\Big)T\Big(\mathcal{B},\frac{c}{q}\Big)U\Big(\frac{c}{q}\Big)e\Big(-\frac{mc}{q}\Big). \tag{12.4}$$

Применяя теорему 3 с $\eta=1/12$ и λ вместо μ (версия (V2)) и пользуясь тем, что q — простое, при $c\neq 0$ заключаем, что

$$U\Big(\frac{c}{q}\Big)\ll X^\theta\,\frac{\log q}{\sqrt{\varphi(q)}}.$$

Далее, в силу теоремы К. Рамачандры [24] имеем $U(0)\sim X^\theta/2$ (ибо $\theta>7/12$). Поскольку $\varphi(q)=q-1$, в силу равенства Парсеваля получаем

$$r(\mathcal{A},\mathcal{B},m)=(1+o(1))\frac{X^\theta|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}|}{2q}+\mathcal{O}\bigg(X^\theta\sqrt{\frac{|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}|\log q}{q}}\bigg).$$

Этим и завершается доказательство нашего утверждения. $\square$

Заключительное замечание. Выбор конкретных параметров в теореме 1 обусловлен желанием продемонстрировать относительную точность наших результатов. На самом деле область значений параметров $(\theta,\log q/\log X)$ можно расширить.

Доказательство теоремы 1. Достаточно положить $X=q^{20r}$ и $X^\theta=q^{16r}$ в теореме 43. $\square$

Приложение. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И ИСКЛЮЧЕНИЕ ФАЗЫ

При работе с билинейными формами приходится иметь дело с условиями вида

$$a\sim A,\qquad b\sim B\qquad \text{и}\qquad ab\sim X,$$

где запись $y\sim Y$ означает, что $Y<y\le 2Y$. Последнее условие оказывается обременительным, поскольку связывает переменные друг с другом. Эта связь не является слишком жесткой, и мы избавимся от нее с помощью описанной ниже процедуры. Кроме того, нам удастся избавиться и от фазы $e(\beta r)$. Объектом нашего изучения здесь будет сумма

$$\sum_{X<r\le bX}\varphi_r\,e(\beta r), \tag{A.1}$$

где (φ_ℓ) — некоторая последовательность достаточно общего вида, а $b>1$ — параметр, обычно равный 2. Подобная процедура применяется, например, в [7, Lemma 6]. Используемый нами способ является более точным в двух отношениях: мы можем регулировать длину промежутка интегрирования и избегаем потери логарифмического множителя путем привлечения некоторой информации о локальном поведении последовательности $(|\varphi_r|)$. Перепишем сумму в виде

$$\sum_{r\ge 1}\varphi_r\,\mathbb{1}_{[-1,1]}\Big(2\frac{\log(r/X)}{\log b}-1\Big)e\big(\lambda e^{\kappa(2\log(r/X)/\log b-1)}\big), \tag{A.2}$$

где $\lambda = \beta X\sqrt{b}$ и $\kappa = (\log b)/2$, и выберем подходящее приближение к $\mathbb{1}_{[-1,1]}$. Пусть $\delta \in (0,1/2]$ — вещественный параметр. Заметим сначала, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-|u|)^+ e(uv)\,du = \Big(\frac{\sin \pi v}{\pi v}\Big)^2.$$

Далее рассмотрим трапециевидную функцию

$$h_0(\delta;u) = \frac{(1-|u|)^+ - (1-\delta-|u|)^+}{\delta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \ |u| \le 1-\delta, \\ \dfrac{1-|u|}{\delta} & \text{при } \ 1-\delta \le |u| \le 1, \\ 0 & \text{при } \ 1 \le |u|. \end{cases}$$

Для нее выполнено соотношение

$$\widehat{h}_0(\delta;v) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\delta;u)\,e(uv)\,du = \frac{(\sin \pi v)^2 - (\sin \pi(1-\delta)v)^2}{\pi^2 \delta v^2} = \frac{\sin(\pi\delta v)\sin(\pi(2-\delta)v)}{\pi^2\delta v^2}.$$

Введем еще два дополнительных параметра κ и λ и с их помощью построим функцию

$$H(\delta,\lambda,\kappa;u) = h_0(\delta;u)\,e(\lambda e^{\kappa u}). \tag{A.3}$$

Лемма 44. *Для всех u, за исключением $u \in \{\pm 1, \pm(1-\delta)\}$, имеем*

$$|H(\delta,\lambda,\kappa;u)| \le 1, \qquad |H'(\delta,\lambda,\kappa;u)| \le \delta^{-1} + 2\pi|\lambda\kappa|e^{|\kappa|}.$$

Кроме того, справедливы следующие L^1-оценки:

$$\int_{-1}^{1} |H'(\delta,\lambda,\kappa;u)|\,du \le 2 + 4\pi|\lambda\kappa|e^{|\kappa|}, \qquad \int_{-1}^{1} |H''(\delta,\lambda,\kappa;u)|\,du \le 4\pi|\lambda\kappa|e^{|\kappa|}\big(2+|\kappa|+|2\pi\lambda\kappa|e^{|\kappa|}\big).$$

Доказательство. Если $u \notin \{\pm 1, \pm(1-\delta)\}$, то

$$H'(\delta,\lambda,\kappa;u) = h_0'(\delta;u)\,e(\lambda e^{\kappa u}) + 2i\pi\lambda\kappa e^{\kappa u} H(\delta,\lambda,\kappa;u)$$

и

$$\frac{H''(\delta,\lambda,\kappa;u)}{2i\pi\lambda\kappa e^{\kappa u}} = 2h_0'(\delta;u)e(\lambda e^{\kappa u}) + \big(1 + 2i\pi\lambda\kappa e^{\kappa u}\big)H(\delta,\lambda,\kappa;u).$$

Из этих соотношений читатель легко выведет требуемое утверждение. $\square$

Из предыдущей леммы с помощью однократного и соответственно двукратного интегрирования по частям получаются неравенства

$$|\widehat{H}(\delta,\lambda,\kappa;v)| \le \frac{1 + 2\pi|\lambda\kappa|e^{|\kappa|}}{\pi|u|} \tag{A.4}$$

и

$$|\widehat{H}(\delta,\lambda,\kappa;v)| \le \frac{\delta^{-1}}{2\pi^2|v|^2} + \frac{3+|\kappa|+|2\pi\lambda\kappa|e^{|\kappa|}}{\pi|v|^2}|\lambda\kappa|e^{|\kappa|}, \tag{A.5}$$

где $\widehat{f}(v) = \int_{\mathbb{R}} f(u)e(uv)\,du$ — преобразование Фурье.

Разделение переменных основано на следующей лемме.

Лемма 45. *Пусть $b > 1$, $\delta \in (0, 1/2)$, β и $X \geq 1$ — четыре вещественных параметра. Тогда существует C^1-функция $\mathscr{H}$ такая, что для всякой последовательности комплексных чисел (φ_r) справедливо соотношение*

$$\sum_{X<r\leq bX} \varphi_r\, e(\beta r) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \sum_{r\geq 1} \frac{\varphi_r}{r^{iu}} \mathscr{H}(u) X^{iu}\, du + \mathcal{O}^*\Biggl(\sum_{X<r\leq b^{\delta/2}X} |\varphi_r| + \sum_{b^{1-\delta/2}X<r\leq bX} |\varphi_r| + 2\delta \sum_{r\geq 1} |\varphi_r|\Biggr),$$

где

$$\Delta = \frac{2}{\pi(\log b)\delta^2} + \frac{12b + 2b\log b + 4\pi b^2(\log b)\,|\beta|X}{\log b} \frac{|\beta|X}{\delta}. \tag{A.6}$$

Это утверждение сохраняет силу и при любом большем Δ. Кроме того, имеют место неравенства

$$|\mathscr{H}(u)| \leq \frac{(\log b)(1 + 2\pi b|\beta|X)}{4\pi^2|u|}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{H}(u)|^2\, du = \frac{(\log b)^2(2-2\delta)}{(4\pi)^2}.$$

Функция $\mathscr{H}$ зависит от X, за исключением случая $\beta = 0$, так что множитель X^{iu} можно было бы вовсе не указывать, однако более естественным представляется сохранить его. На самом деле мы имеем

$$\mathscr{H}(u) = \frac{\log b}{4\pi} \widehat{H}\Bigl(\delta, \lambda, \kappa; \frac{u\log b}{4\pi}\Bigr) b^{iu/2}, \qquad \text{где} \quad \lambda = \beta X\sqrt{b}, \quad \kappa = \frac{\log b}{2}. \tag{A.7}$$

Доказательство. Первый шаг состоит во введении в рассмотрение функции $H(\delta, \lambda, \kappa; u)$ (с указанными выше параметрами):

$$\sum_{X<r\leq bX} \varphi_r\, e(\beta r) = \sum_{r\geq 1} \varphi_r H\Bigl(\delta, \lambda, \kappa; 2\frac{\log(r/X)}{\log b} - 1\Bigr) + \\ + \mathcal{O}^*\Biggl(\sum_{0\leq \log(r/X)/\log b\leq \delta/2} |\varphi_r| + \sum_{1-\delta/2\leq \log(r/X)/\log b\leq 1} |\varphi_r|\Biggr).$$

Далее запишем (A.5) в виде $|\widehat{H}(\delta, \lambda, \kappa; v)| \leq (\delta\Delta_1)/|v|^2$, где

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\pi^2\delta^2} + \frac{6b + b\log b + 2\pi b^2(\log b)\,|\beta|X}{2\pi} \frac{|\beta|X}{\delta}.$$

Заменяя промежуток интегрирования конечным, получим

$$H\Bigl(\delta, \lambda, \kappa; 2\frac{\log(\ell/L)}{\log b} - 1\Bigr) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{H}(\delta, \lambda, \kappa; v) \Bigl(\frac{L}{\ell}\Bigr)^{4i\pi v/\log b} e(v)\, dv = \\ = \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} \widehat{H}(\delta, \lambda, \kappa; v) \Bigl(\frac{L}{\ell}\Bigr)^{4i\pi v/\log b} e(v)\, dv + \mathcal{O}^*(2\delta).$$

Замена переменной $u = 4\pi v/\log b$ завершает доказательство. Точное значение для интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{H}(u)|^2\, du$ получается из равенства Парсеваля. $\square$

Выбирая $b = 2$, используя оценки $2^{\delta/2} - 1 \leq \delta$ и $1 - 2^{-\delta/2} \leq \delta/2$, огрубляя константы и пользуясь неравенством $\delta^{-1} + 40|\beta|X + 60(\beta X)^2 \leq 100(\delta^{-1} + (\beta X)^2)$, приходим к следующему утверждению.

Лемма 46. *Пусть $\delta \in (0,1/2)$, β и $X \ge 1$ — три вещественных параметра. Тогда существует C^1-функция $\mathscr{H}$ такая, что для всякой последовательности комплексных чисел (φ_r) справедливо соотношение*

$$\sum_{X<r\le 2X} \varphi_r\, e(\beta r) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \sum_{r\ge 1} \frac{\varphi_r}{r^{iu}} \mathscr{H}(u) X^{iu}\, du + \mathcal{O}^*\Biggl(\sum_{\substack{X<r\le (1+\delta)X \\ \text{или } (2-\delta)X<r\le 2X}} |\varphi_r| + 2\delta \sum_{r\ge 1} |\varphi_r| \Biggr),$$

где $\Delta = 100(\delta^{-1} + (\beta X)^2)/\delta$. Кроме того, имеют место неравенства

$$|\mathscr{H}(u)| \le \frac{25}{73}\,\frac{1+|\beta|X}{1+|u|}, \qquad |\mathscr{H}(u)| \le \frac{\delta^{-1} + (\beta X)^2}{1+|u|^2}.$$

Что касается последнего неравенства, то в действительности нами доказана оценка

$$|\mathscr{H}(u)| \le \min\biggl(\frac{\log 2}{2\pi}, \frac{\log 2}{4\pi^2}\,\frac{1+13|\beta|X}{|u|}\biggr),$$

из которой оно следует (первое значение мы используем при $|u| \le 2$).

Благодарности. Главная часть представленных в настоящей работе результатов была получена во время визита первого автора в Институт математических наук (Ченнаи) в 2010 г., когда он читал там курс по локальным моделям и теореме Гогейзеля. Работа была завершена во время совместного визита авторов в этот институт в октябре 2018 г. Авторы благодарны институту за предоставленные прекрасные условия для работы.

Оба автора также выражают благодарность рецензенту за очень внимательное отношение к тексту статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барбан М.Б., Вехов П.П.* Об одной экстремальной задаче // Тр. Моск. мат. о-ва. 1968. Т. 18. С. 83–90.
2. *Bombieri E.* Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. Paris: Soc. math. France, 1974. (Astérisque; V. 18); 2nd ed., 1987.
3. *Bourgain J., Sarnak P., Ziegler T.* Disjointness of Moebius from horocycle flows // From Fourier analysis and number theory to Radon transforms and geometry. Berlin: Springer, 2013. P. 67–83. (Dev. Math.; V. 28); arXiv: 1110.0992 [math.NT].
4. *Codecà P., Nair M.* A note on a result of Bateman and Chowla // Acta arith. 2000. V. 93, N 2. P. 139–148.
5. *Daboussi H.* Brun's fundamental lemma and exponential sums over primes // J. Number Theory. 2001. V. 90, N 1. P. 1–18.
6. *Davenport H.* On some infinite series involving arithmetical functions. II // Q. J. Math. Oxf. Ser. 1937. V. 8. P. 313–320.
7. *Fouvry E., Iwaniec H.* Exponential sums with monomials // J. Number Theory. 1989. V. 33, N 3. P. 311–333.
8. *Gallagher P.X.* A large sieve density estimate near $\sigma = 1$ // Invent. math. 1970. V. 11. P. 329–339.
9. *Graham S.* An asymptotic estimate related to Selberg's sieve // J. Number Theory. 1978. V. 10, N 1. P. 83–94.
10. *Green B., Tao T.* The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences // Ann. Math. Ser. 2. 2012. V. 175, N 2. P. 541–566.
11. *Hajela D., Smith B.* On the maximum of an exponential sum of the Möbius function // Number theory: Semin. New York, 1984–1985. Berlin: Springer, 1987. P. 145–164. (Lect. Notes Math.; V. 1240).
12. *Haye Betah M.* Explicit expression of a Barban & Vehov theorem // Funct. approx. Comment. math. 2019. V. 60, N 2. P. 177–193.
13. *Iwaniec H., Kowalski E.* Analytic number theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. (AMS Colloq. Publ.; V. 53).
14. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
15. *Van Lint J.H., Richert H.-E.* On primes in arithmetic progressions // Acta arith. 1965. V. 11. P. 209–216.
16. *Montgomery H.L., Vaughan R.C.* The large sieve // Mathematika. 1973. V. 20, N 2. P. 119–134.

17. *Motohashi Y.* On Gallagher's prime number theorem // Proc. Japan Acad. Ser. A: Math. Sci. 1977. V. 53, N 2. P. 50–52.
18. *Motohashi Y.* Primes in arithmetic progressions // Invent. math. 1978. V. 44, N 2. P. 163–178.
19. *Motohashi Y.* Lectures on sieve methods and prime number theory. Berlin: Springer, 1983. (Lect. Math. Phys. Math.; V. 72).
20. *OEIS Foundation.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2019. http://oeis.org.
21. *Pintz J.* Elementary methods in the theory of L-functions. II: On the greatest real zero of a real L-function // Acta arith. 1976. V. 31. P. 273–289.
22. *Platt D.J.* Numerical computations concerning the GRH // Math. Comput. 2016. V. 85, N 302. P. 3009–3027; arXiv: 1305.3087 [math.NT].
23. *Platt D.J., Ramaré O.* Explicit estimates: from $\Lambda(n)$ in arithmetic progressions to $\Lambda(n)/n$ // Exp. Math. 2017. V. 26, N 1. P. 77–92.
24. *Ramachandra K.* Some problems of analytic number theory // Acta arith. 1976. V. 31, N 4. P. 313–324.
25. *Ramanujan S.* Irregular numbers // J. Indian Math. Soc. 1913. V. 5. P. 105–106; Collected papers of Srinivasa Ramanujan. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015. P. 20–21.
26. *Ramaré O.* On Šnirel'man's constant // Ann. Sc. Norm. Pisa. Cl. Sci. Sér. 4. 1995. V. 22, N 4. P. 645–706.
27. *Ramaré O.* Eigenvalues in the large sieve inequality // Funct. approx. Comment. math. 2007. V. 37, N 2. P. 399–427.
28. *Ramaré O.* Arithmetical aspects of the large sieve inequality. With the collaboration of D.S. Ramana. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2009. (Harish-Chandra Res. Inst. Lect. Notes; V. 1).
29. *Ramaré O.* On Bombieri's asymptotic sieve // J. Number Theory. 2010. V. 130, N 5. P. 1155–1189.
30. *Ramaré O.* Some elementary explicit bounds for two mollifications of the Moebius function // Funct. approx. Comment. math. 2013. V. 49, N 2. P. 229–240.
31. *Ramaré O.* Explicit estimates on several summatory functions involving the Moebius function // Math. Comput. 2015. V. 84, N 293. P. 1359–1387.
32. *Ramaré O.* An explicit density estimate for Dirichlet L-series // Math. Comput. 2016. V. 85, N 297. P. 335–356.
33. *Ramaré O.* Modified truncated Perron formulae // Ann. Math. Blaise Pascal. 2016. V. 23, N 1. P. 109–128.
34. *Rankin R.A.* The difference between consecutive prime numbers // J. London Math. Soc. 1938. V. 13. P. 242–247.
35. *Riesel H., Vaughan R.C.* On sums of primes // Ark. Mat. 1983. V. 21. P. 45–74.
36. *Rosser J.B., Schoenfeld L.* Approximate formulas for some functions of prime numbers // Ill. J. Math. 1962. V. 6. P. 64–94.
37. *Selberg A.* On elementary methods in prime number theory and their limitations // C. r. 11ème Congrès des mathematiciens Scandinaves, Trondheim, 1949. Oslo: Johan Grundt Tanums Forlag, 1952. P. 13–22.
38. *Виноградов И.М.* Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. 1937. Т. 15, № 6–7. С. 291–294.
39. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. (Тр. МИАН; Т. 23).
40. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
41. *Zhan T.* On the representation of large odd integer as a sum of three almost equal primes // Acta math. Sin. New Ser. 1991. V. 7, N 3. P. 259–272.

Перевод с английского М.А. Королёва