Planik

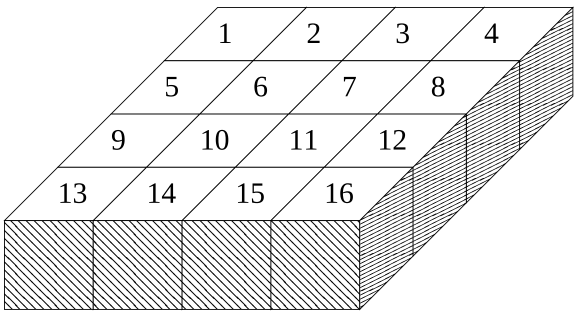
Son groupe de transformations

Olivier Ramaré

Le Planik se comprend naturellement si nous le situons dans le cadre de la théorie des groupes. Nous serons en mesure de répondre de façon définitive dans ce cadre au problème de savoir si oui ou non il est possible de ranger un position de départ quelconque. Les notes qui suivent montrent comment procéder, et le lecteur pourra même en déduire un algorithme qui permettra de le faire en pratique. L'essentiel de cette étude est due à Joseph Oesterlé que je remercie vivement !

1. Un groupe de transformations

Rappelons que le jeu se déroule en bougeant 16 cubes en bois, sur le dessus desquels figure un numéro de 1 à 16 et rengés en carré comme suit. Nous les utilisons pour construire un carré dont la forme *rangée* est



Un planik rangé

Notons a, b, c, d les quatre inversions de lignes et A, B, C, D celles des colonnes. Nous enchainons ensuite de tels mouvements, c'est à dire que nous les faisons se suivre. Ces mouvements peuvent se voir comme des applications de l'ensemble $\mathscr{E} = \{1, 2, \cdots, 15, 16\}$ dans lui même. Par exemple, le mouvement A correspond à l'application :

$$\begin{cases} A(1) = 13, \\ A(5) = 9, \\ A(9) = 5, \\ A(13) = 1, \end{cases} \begin{cases} A(2) = 2, \\ A(6) = 6, \\ A(10) = 10, \\ A(14) = 14, \end{cases} \begin{cases} A(3) = 3, \\ A(7) = 7, \\ A(11) = 11, \\ A(10) = 10, \end{cases} \begin{cases} A(4) = 4, \\ A(8) = 8, \\ A(12) = 12, \\ A(16) = 16. \end{cases}$$

Lorsque nous partons d'un Planik qui n'est pas bien rangé, ceci est à lire comme « Nous mettons le cube qui est à la place *initialement* numérotée 1 à la place *initialement* numérotée 13 ».

Il faut ensuite se convaincre que faire suivre un coup, disons A, par un autre coup, disons a, correspond à composer a avec A, i.e. à regarder l'application $a \circ A$. Le mouvement A intervient *avant* le mouvement a, mais la composition s'écrit dans l'autre sens ... Nous écrirons le coup par Aa, puisque c'est ainsi l'ordre naturel lorsque l'on joue.

Chaque coup est une bijection de $\mathscr{E}$, ce que l'on appelle plus couramment dans ce contexte une permutation de $\mathscr{E}$. L'ensemble des permutations de $\mathscr{E}$ muni de la composition est un groupe fini qui se note $\mathfrak{S}(\mathscr{E})$. Nous notons par G le groupe engendré par nos coups élémentaires, et c'est ce groupe que nous devons déterminer.

2. Orbites

Nous remarquons tout d'abord que nos mouvements élémentaires conservent globalement certains ensembles. En effet, chaque coin reste dans un coin, c'est à dire que chaque coup induit une permutation de $\mathscr{C} = \{1, 4, 13, 16\}$. Cette proprieté est vraie à chaque étape, et nous en déduisons que chaque élément de G possède cette même propriété : quelque soit la façon dont nous jouons, les coins resterons toujours dans les coins !

De même, l'ensemble des 4 cases centrales (à savoir $\mathscr{M} = \{6, 7, 10, 11\}$), l'ensemble des 4 cases-bord-horizontal (à savoir $\mathscr{H} = \{2, 3, 14, 15\}$) et celui des 4 cases-bord-vertical (à savoir $\mathscr{V} = \{5, 8, 9, 12\}$) sont aussi préservés.

Ces conditions réduisent considérablement les permutations possibles puisque le groupe de toutes les permutations sur 16 éléments contient

$$16! = 20\,922\,789\,888\,000$$

éléments, alors, si l'on prend une permutation sur les coins ($4! = 24$ possibilités), une permutation sur le centre (24 possibilités), et une permutation sur les cases-bord-horzontal et une sur les cases-bord-vertical, cela ne nous donne plus le choix qu'entre $24^4 = 331\,776$ permutations. Nous avons fait une grande partie du chemin, mais ce n'est pas encore suffisant, et il nous faut ajouter une condition.

Avant de nous avancer dans cette direction, formalisons ce que nous avons obtenu. Nous avons construit une application :

$$\begin{aligned} G &\to \mathfrak{S}(\mathscr{C}) \times \mathfrak{S}(\mathscr{M}) \times \mathfrak{S}(\mathscr{H}) \times \mathfrak{S}(\mathscr{V}) \\ s &\mapsto (s_{\mathscr{C}}, s_{\mathscr{M}}, s_{\mathscr{H}}, s_{\mathscr{V}}) \end{aligned}$$

qui consiste tout simplement à associer à toute succession de coups possibles (une autre façon de dire : un élément de G) ses restrictions sur les ensembles globalement stables $\mathscr{C}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{V}$.

3. Signatures

Dit de façon rapide, chacun des mouvements élémentaires est de signature 1, ce qui fait que notre groupe G est un sous ensemble du groupe alterné.

La signature peut être difficile à appréhender et je n'ai pas trouver de façon de la présenter sur le groupe des permutations d'une ensemble à quatre éléments qui soit notoirement plus simple. Le groupe des transformations affines qui préservent un tétraèdre est bien isomorphe à ce groupe de transformations, et nous pouvons considérér les transformations qui préservent une orientation de celles qui l'inversent.

De façon générale, si σ est une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$, sa signature est définie par

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le 4} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

où le produit porte sur tous les couples (i, j) vérifiant les inégalités indiquées. Cette signature vaut ou bien 1, ou bien -1. En fait, la définition proposée fonctionne aussi lorsque σ est une permutation sur n éléments, et pas seulement sur 4.

Lorsque l'on part d'un ensemble qui n'est pas spécialement numéroté de 1 à 4, nous nous contentons de numéroter les éléments à notre guise. Il se trouve que le $\varepsilon(\sigma)$ sera le même quelque soit la numérotation choisie ! C'est un peu plus délicat à établir avec peu de matériel, mais en voici une démonstration : nous démontrons que tout morphisme de groupes sur l'ensemble des permutations et à valeurs dans $\{\pm 1\}$ ou bien prend la valeur -1 sur chaque transposition ou bien est identiquement égal au morphisme constant. En effet, si ce morphisme, disons φ, n'est pas constant, il existe une transposition τ telle que $\varphi(\tau) = -1$ (preuve laissée à la lectrice attentive !) Nous rappelons alors cette belle formule : pour toute permutation σ, et en désignant par $(1, 2)$ la transposition de 1 et de 2, nous avons $\sigma \circ (1, 2) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2))$, soit la transposition de $\sigma(1)$ et de $\sigma(2)$. Le lecteur vérifiera aussi que $\varphi(\sigma^{-1}) = \varphi(\sigma)$, et par conséquent $\varphi((\sigma(1), \sigma(2))) = \varphi((1, 2)) = -1$. Nous en déduisons que φ prend la valeur -1 sur *toutes* les transpositions, ce qui conclut la preuve.

Maintenant que cette signature est construite, chacune des permutations $s_{\mathscr{C}}$, $s_{\mathscr{M}}$, $s_{\mathscr{V}}$ et $s_{\mathscr{H}}$ admet une signature. La remarque fondamentale est alors la suivante. Nous avons

$$\varepsilon(s_{\mathscr{C}})\varepsilon(s_{\mathscr{M}})\varepsilon(s_{\mathscr{H}})\varepsilon(s_{\mathscr{V}}) = 1. \tag{1}$$

En effet, cette relation est vérifiée sur les mouvements élémentaires et s'étend par conséquent à tout le groupe G.

4. Détermination de G

Nous terminons ici notre étude en montrant que, si s est une permutation qui préserve les coins, les cases du milieu, les cases-bord-horizontal et les cases-bord-vertical, et si de plus (1) est vérifiée, alors s est un élément de G, i.e. elle peut s'écrire comme une succession de coups élémentaires.

Première étape

Sur les coins, l'inversion a opère en transposant 1 et 4, D opère en transposant 4 et 16 et d opère en transposant 13 et 16. Ces trois transpositions engendrent le groupe de permutation des 4 coins. Toute permutation des quatre coins peut donc être réalisée en utilisant seulement les inversions a, D, d, qui de plus fixent les cases centrales. On montre de même que toute permutation des quatre cases centrales peut être réalisée en utilisant seulement les inversions B, C, c, qui de plus fixent les coins. Cela démontre que G permet de réaliser simultanément n'importe quel couple (s_1, s_2) formé d'une permutation des coins et d'une permutation des cases centrales (au prix d'une permutation inconnue des cases-bord). Pour conclure, il nous suffira donc de vérifier que le sous-groupe H de G qui fixe coins et cases centrales peut réaliser n'importe quel couple (s_3, s_4) formé d'une permutation des cases-bord-horizontal et d'une permutation des cases-bord-vertical de mêmes signatures.

Deuxième étape

Remarquons tout d'abord que l'élément $aBaB$ de G (obtenu en réalisant successivement les inversions a, B, a, B) appartient à H, réalise une permutation circulaire des cases 2, 3 et 14 et fixe les 5 autres cases-bord. De manière analogue, on construit des éléments de H qui réalisent n'importe quel couple (s_3, s_4) où l'une des deux permutations s_3, s_4 est un cycle d'ordre 3 et l'autre est l'identité. En prenant des produits de tels éléments, on voit que H permet de réaliser n'importe quel couple (s_3, s_4) où s_3 et s_4 sont toutes deux des permutations paires. Par ailleurs $aDaDaD$ est un élément de H qui opère sur les cases-bord-horizontal par la transposition de 2 et 3, et sur les cases-bord-vertical par la transposition de 8 et 12. Cela termine la démonstration.

5. Pratique

Nous laissons à la lectrice le soin de calculer l'ordre (i.e. dans ce contexte, le cardinal) de G.

Il est facile de calculer la signature d'une à partir des remarques :

— tout cycle de longueur 3 est de signature 1.

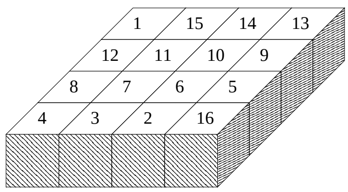
— toute permutation de trois éléments sans point fixe est un cycle de longueur 3.

— Et bien sûr toute transposition est de signature -1.

Une fois que nous savons qu'une position est réalisable, il faut encore le faire ! Une question reste à ce propos : quel est le nombre minimal de coups ? J'ai l'impression que toute position peut se résoudre en *moins de huit coups*.

6. Quelques exemples

Commençons par nous intéresser à la position de départ suivante.



Nous nous contentons de donner des notes :

— La signature sur les coins vaut -1.

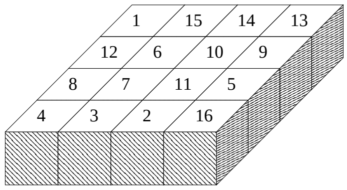
— La signature sur les cases-bord-vertical vaut 1.

— La signature sur les cases-bord-horizontal vaut 1.

— La signature sur les cases du centre vaut 1.

Et en conclusion : il est *impossible* de ranger cette configuration !

Regardons maintenant la position suivante :



Nous nous contentons encore de donner que des notes :
— La signature sur les coins vaut -1.
— La signature sur les cases-bord-vertical vaut 1.
— La signature sur les cases-bord-horizontal vaut 1.
— La signature sur les cases du centre vaut -1.
Et en conclusion : il est *possible* de ranger cette configuration !

7. Excuses et autres

J'ai rédigé ces notes rapidement et n'est pas eu beaucoup de temps pour les relire ... J'espère bien évidemment qu'il n'y a pas trop d'erreurs, ni avoir « réussi » à construire une construction fausse à partir de notes correctes ! Il est bien évident que les commentaires que qui me seront adressés permettront d'améliorer ce texte.