Sur l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » et une fonction définie par J. R. Wilton

Michel Balazard et Bruno Martin

10 octobre 2013

À la mémoire de notre ami Patrick Sargos.

Abstract

We describe the points of differentiability of the function

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \{t\}\{\lambda t\}\frac{dt}{t^2},$$

where $\{t\}$ denotes the fractional part of t. In connection with this question, we study series involving the first Bernoulli function, the arithmetical function "number of divisors", and the Gauss map $\alpha(x) = \{1/x\}$ from the theory of continued fractions. A key role is played by a function defined in 1933 by J. R. Wilton, similar to the Brjuno function of dynamical systems theory. A unifying theme of our exposition is the use of functional equations involving the Gauss map, allowing us to reprove and refine a theorem of Wilton, la Bretèche and Tenenbaum.

Keywords

Fractional part, Autocorrelation, Continued fractions, Approximate functional equations
MSC classification : 26A27 (11A55)

Table des matières

1 Introduction

Posons pour $\lambda \geqslant 0$

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \{t\}\{\lambda t\} \frac{dt}{t^2},$$

où $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel t, et $\lfloor t \rfloor$ sa partie entière. La fonction $A(\lambda)$ est la *fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »*, introduite par Báez-Duarte *et al.* (cf. [2]) dans le contexte de l'étude du critère de Nyman pour l'hypothèse de Riemann.

Báez-Duarte *et al.* établissent en particulier que la fonction A, continue sur $[0, \infty[$, n'est dérivable en aucun point rationnel et posent la question de déterminer l'ensemble de ses points de dérivabilité. L'objet de la première partie du présent travail (§§2-6) est de répondre complètement à cette question.

Théorème 1 *Les points de dérivabilité de la fonction A sont les nombres irrationnels positifs λ tels que la série*

$$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{\log q_{k+1}}{q_k}$$

converge, où $(q_k)_{k \geqslant 0}$ désigne la suite croissante des dénominateurs des réduites de λ.

Pour démontrer le théorème 1, nous ramenons l'étude de la fonction d'autocorrélation A à celle d'une fonction $\mathcal{W}$, somme d'une série introduite par Wilton en 1933 (cf. [35]) dans l'étude de la série trigonométrique

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi n x)\,, \tag{1}$$

où $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs du nombre entier naturel n. La série $\mathcal{W}(x)$ est définie au §3.1 en termes du développement de x en fraction continue, et nous verrons alors qu'elle définit une fonction intégrable sur $[0, 1]$, solution de l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{W}(x) = \log(1/x) - x\mathcal{W}(\{1/x\}). \tag{2}$$

Il s'avère que la fonction d'autocorrélation A et la primitive

$$\Upsilon(x) = \int_0^x \mathcal{W}(t)dt$$

de la fonction de Wilton $\mathcal{W}$ sont intimement liées.

Proposition 1 *Pour* $0 < \lambda < 1$*, on a*

$$A(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\Upsilon(\lambda)}{2\lambda},$$

où ρ *est une fonction continue sur* $]0,1[$*, et dérivable en chaque irrationnel.*

Ainsi, la recherche des points de dérivabilité de A est ramenée à celle des points de dérivabilité de Υ. En effet la fonction A n'est pas dérivable à droite en 0 : on a $A(\lambda) \sim \frac{1}{2}\lambda \log(1/\lambda)$ quand $\lambda \to 0$ (relation (72) *infra*). D'autre part, l'identité $A(\lambda) = \lambda A(1/\lambda)$ permet de restreindre l'étude à l'intervalle $]0,1[$.

Cette question est très voisine de celle traitée dans notre précédent article [3] concernant le comportement local moyen de la fonction de Brjuno, solution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = \log(1/x) + x\Phi(\{1/x\}), \tag{3}$$

qui ne diffère de (2) que par un signe.

La fonction de Brjuno joue un rôle important dans la théorie des systèmes dynamiques, plus précisément dans l'étude des itérations d'un polynôme quadratique (cf. par exemple l'article [5] qui démontre un résultat substantiel dans ce domaine, et renvoie aux références antérieures). Observons cependant qu'elle apparaît déjà en filigrane dans l'article de Wilton (cf. [35] (7.32), p. 235).

Pour étudier Φ et notamment déterminer l'ensemble de ses points de Lebesgue, c'est-à-dire, les points $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\Phi(t) - \Phi(x)|dt = 0, \tag{4}$$

nous avons développé dans [3] plusieurs éléments théoriques concernant le comportement en moyenne de fonctions directement liées au développement en fraction continue d'un nombre réel. Dans le présent article, nous rappelons et exploitons ces résultats pour étudier le comportement local moyen de la fonction $\mathcal{W}$ de Wilton. Cela nous permet de montrer que les points de dérivabilité de Υ, et donc ceux de A, sont précisément ceux mentionnés dans le théorème 1.

Dans la démonstration de la proposition 1, la fonction auxiliaire suivante joue un rôle essentiel :

$$\varphi_1(t) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{B_1(nt)}{n}, \tag{5}$$

où B_1 désigne la première fonction de Bernoulli normalisée :

$$B_1(t) = \{t\} - 1/2 + [t \in \mathbb{Z}]/2,$$

où $[P]$ désigne la valeur de vérité de l'assertion $[P]$ (notation d'Iverson).

La série $\varphi_1(t)$ converge presque partout et définit une fonction périodique, de période 1, intégrable sur $[0, 1]$. Báez-Duarte *et al.* ont établi dans [2] la relation suivante entre A et φ_1 : pour tout $\lambda > 0$,

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\log\lambda + \frac{A(1)+1}{2} - \lambda\int_\lambda^\infty \varphi_1(t)\frac{dt}{t^2}. \tag{6}$$

Pour démontrer la proposition 1, il reste donc à établir une relation entre les fonctions φ_1 et $\mathcal{W}$. C'est l'objet de la proposition suivante, démontrée sous une forme plus précise au §4.2 (proposition 18).

Proposition 2 *On a*

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x) \quad (p.p.), \tag{7}$$

où $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 1-périodique bornée, continue en tout irrationnel.

La fonction G est définie et étudiée au §4.1. La proposition 1 résulte alors de (6) et (7) par une intégration par parties.

Nous avons choisi de rédiger l'ensemble des raisonnements menant au théorème 1 dans un cadre conceptuel ajusté à l'objet étudié et au résultat présenté. Alors que Báez-Duarte *et al.* montraient le parti que l'on pouvait tirer, pour l'étude de la fonction A, de la représentation de φ_1 par la série trigonométrique ψ_1 définie par (1), notre démonstration se passe entièrement de cette représentation *. Nous éliminons également le recours à la transformation de Mellin, utilisée dans [2] pour démontrer (6), et redémontrons cette identité par des manipulations élémentaires de séries et d'intégrales au §6.1.

Dans la deuxième partie du présent article (§§7-9), issue des recherches effectuées pour démontrer la proposition 2, nous étudions et précisons un théorème de Wilton, la Bretèche et Tenenbaum. Nous aboutissons à l'énoncé suivant.

Théorème 2 *Les trois séries $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ et $\mathcal{W}(x)$ convergent pour les mêmes valeurs de la variable x. En tout point de convergence x, on a*

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x) + \delta(x),$$

où $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 1-périodique nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

*. En cohérence avec ce parti pris, nous écrirons $A(1)$ et $\zeta(2)$ sans expliciter leurs valeurs respectives $\log(2\pi) - \gamma$ et $\pi^2/6$.

L'assertion suivant laquelle les points de convergence de ψ_1 et de $\mathcal{W}$ sont les mêmes est due à Wilton (1933, [35], (20_{III}), p. 221). Ce résultat fut retrouvé en 2004 par la Bretèche et Tenenbaum, qui démontrèrent également que les points de convergence de φ_1 coïncidaient avec ceux de ψ_1 et $\mathcal{W}$, ainsi que l'identité $\varphi_1 = \psi_1$ en tout point de convergence ([4], Théorème 4.4, p. 16). Enfin, l'égalité $\varphi_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{W} + G + \delta$ est notre contribution à cet énoncé. Il est complété par la définition et les propriétés de la fonction G, qui sont l'objet du §4.1 ; quant à la fonction δ, elle est définie par (44) au §9. Notons que les propriétés de $\varphi_1 + \mathcal{W}/2 = G + \delta$ que nous établissons (prolongement à $\mathbb{R}$ borné, continuité en tout irrationnel, limites à gauche et à droite en tout rationnel) ne sont pas évidentes *a priori*. En effet, la fonction $\mathcal{W}$ n'est bornée sur aucun intervalle ouvert non vide [†], comme le montre le comportement local de sa primitive Υ au voisinage d'un nombre rationnel quelconque (cf §3.4, proposition 11). Cela étant, notre but dans cette seconde partie est surtout de fournir l'exposé autonome d'une démonstration du théorème 2, apportant à la question étudiée un éclairage complémentaire aux approches de Wilton et de La Bretèche et Tenenbaum, en la plaçant, dans une perspective historique, au carrefour de plusieurs problématiques. En particulier, le leitmotiv technique de notre exposé est l'utilisation d'équations fonctionnelles du type

$$f(x) = -xf(\{1/x\}) + g(x) \quad (x \in X), \tag{8}$$

où g est une fonction supposée connue et f la fonction inconnue, et d'équations fonctionnelles approchées apparentées à (8). C'était déjà le cas dans [35], et Wilton cite comme source de cette idée l'article [15] de Hardy et Littlewood.

Ainsi la fonction de Wilton vérifie l'équation (8) avec $g(x) = \log(1/x)$ (cf. §3.2), et les sommes partielles de φ_1 et ψ_1 vérifient des équations fonctionnelles approchées similaires à (8) avec des fonctions $g(x) = -\frac{1}{2}\log(1/x) + O(1)$ (cf. §4.2.1 et §8). C'est là le fait essentiel qui permet de démontrer le théorème. La fonction G apparaît comme solution d'une équation fonctionnelle (8) avec une fonction g continue sur $[0, 1]$, construite à partir de la fonction A. Celle-ci joue donc ici un rôle auxiliaire, alors qu'elle est la première motivation de ce travail.

Voici quel est le plan de cet article.

Première partie : points de dérivabilité de la fonction A. Au §2 nous rappelons, comme dans notre article [3], les éléments de la théorie classique des fractions continues qui nous seront utiles, et nous citons les estimations obtenues dans [3] utiles à la démonstration du théorème 1. Au §3 nous définissons la fonction de Wilton et décrivons son comportement local moyen en adaptant la démarche adoptée dans [3] pour l'étude de la fonction de Brjuno Le §4 concerne la fonction φ_1 ; nous y déterminons notamment la relation liant φ_1 et la fonction $\mathcal{W}$. La méthode des équations fonctionnelles approchées, que nous avons adoptée à la suite de Wilton et qui constitue la source commune des deux parties de notre travail, est présentée sous une forme assez générale au §4.2.2. Au §5 nous étudions le comportement local de la primitive φ_2 de $2\varphi_1$ introduite par Báez-Duarte *et al.* au §4.2 de [2] ; nous montrons en particulier que ses points de dérivabilité sont

†. Il en est d'ailleurs de même pour les fonctions φ_1 et ψ_1.

précisément les points de convergence des séries φ_1 et $\mathcal{W}$ (dits *points de Wilton*), et déterminons le comportement asymptotique de son module de continuité. Ces résultats sont enfin transférés à la fonction A au §6.

Deuxième partie : autour d'un théorème de Wilton, la Bretèche et Tenenbaum. Au §7 nous présentons le contexte de ce théorème : il s'agit d'une classe de problèmes introduite par Davenport en 1937 (cf. [8], [9]) pour élucider les relations entre convolution de Dirichlet et séries trigonométriques. Nous présentons également brièvement l'approche générale développée par la Bretèche et Tenenbaum dans [4]. Le §8 présente une nouvelle démonstration de l'équation fonctionnelle approchée vérifiée par les sommes partielles de la série trigonométrique $\psi_1(x)$, découverte par Wilton. Notre démonstration est légèrement plus simple que celle de Wilton et fournit un meilleur terme d'erreur. Nous concluons cette partie au §9.

Nous n'avons pas rédigé de survol exhaustif des travaux liés au thème abordé dans cet article. Nous renvoyons cependant à d'autres approches de problèmes voisins par Jaffard (cf. [18]), Schoissengeier (cf. [28]), Aistleitner, Berkes et Seip (cf. [1]), Rivoal et Roques (cf. [26]).

2 Fractions continues

2.1 Généralités

Nous posons $X =]0,1[\setminus\mathbb{Q}$ et $\alpha(x) = \{1/x\}$ pour $x \in X$. Nous définissons les fonctions itérées de α en posant $\alpha_0(x) = x$ et pour $k \geqslant 1$, $\alpha_k(x) = \alpha\big(\alpha_{k-1}(x)\big)$. Les fonctions α_k $(k \geqslant 0)$ sont définies sur X, à valeurs dans X. Lorsque x est rationnel, les mêmes formules permettent de définir $\alpha_k(x)$ tant que $k \leqslant K$, où K est un entier, appelé *profondeur* de x (cf. §2.6) ; on a alors $\alpha_K(x) = 0$.

Rappelons le théorème de Ryll-Nardzewski (cf. [27], Theorem 2, p. 76) : pour toute fonction $f \in L^1(0,1)$, on a $f \circ \alpha \in L^1(0,1)$ et

$$\int_0^1 f\big(\alpha(t)\big)\frac{dt}{1+t} = \int_0^1 f(t)\frac{dt}{1+t}. \tag{9}$$

Pour $x \in X$, nous notons $a_0(x) = 0$, et $a_k(x) = \lfloor 1/\alpha_{k-1}(x)\rfloor$ $(k \geqslant 1)$ les quotients incomplets de x ; $p_k(x), q_k(x)$ $(k \geqslant 0)$ respectivement le numérateur et le dénominateur de la fraction réduite d'ordre k de x. Avec la notation classique, on a

$$[a_0(x); a_1(x), \ldots, a_k(x)] = \frac{p_k(x)}{q_k(x)}.$$

Les fonctions a_k, p_k, q_k définies sur X sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ pour $k \geqslant 1$. On a la relation

$$\alpha_k(x) = -\frac{p_k(x) - xq_k(x)}{p_{k-1}(x) - xq_{k-1}(x)}. \tag{10}$$

On a, pour tout $k \geqslant 2$,

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geqslant q_{k-1} + q_{k-2} \geqslant 2q_{k-2}, \tag{11}$$

et $q_k \geqslant F_{k+1}$ pour $k \geqslant 0$, où F_n est le n^{e} nombre de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ pour $n \geqslant 1$). On peut également (cf. [3], (13), p. 199) déduire de (11) la majoration

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_k \leqslant 3q_k, \tag{12}$$

valable pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous utiliserons également la majoration

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{F_{k+1}} \leqslant 3,36. \tag{13}$$

2.2 Les fonctions β_k et γ_k

Nous introduisons les fonctions

$$\beta_k(x) = \alpha_0(x)\alpha_1(x)\cdots\alpha_k(x)$$

(par convention, $\beta_{-1} = 1$) et

$$\gamma_k(x) = \beta_{k-1}(x) \log\bigl(1/\alpha_k(x)\bigr) \quad (x \in X, k \geqslant 0),$$

de sorte que $\gamma_0(x) = \log 1/x$. Rappelons les identités

$$\beta_k(x) = (-1)^{k-1}\bigl(p_k(x) - xq_k(x)\bigr) = \bigl|p_k(x) - xq_k(x)\bigr| = \frac{1}{q_{k+1}(x) + \alpha_{k+1}(x)q_k(x)} \quad (x \in X), \tag{14}$$

les encadrements

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} \leqslant \beta_k \leqslant \frac{1}{q_{k+1}} \quad (k \geqslant -1) \tag{15}$$

et, (cf. [3], proposition 1)

$$-\frac{\log(2q_k)}{q_k} \leqslant \gamma_k - \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \leqslant \frac{\log 2}{q_k}. \tag{16}$$

On dispose également de la majoration

$$\beta_{i+j} \leqslant \frac{1}{q_{i+1}F_{j+1}} \quad (i \geqslant -1, j \geqslant 0). \tag{17}$$

2.3 Cellules

Soit $k \in \mathbb{N}$, $b_0 = 0$ et $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{N}^*$. La cellule (de profondeur k) $\mathfrak{c}(b_1, \ldots, b_k)$ est l'intervalle ouvert d'extrémités $[b_0; b_1, \ldots, b_k]$ et $[b_0; b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k + 1]$.

Nous prolongeons par continuité (sans changer de notation) les fonctions a_k, p_k, q_k (et donc aussi α_k) sur chaque cellule de profondeur k. Dans la cellule $\mathfrak{c}(b_1, \ldots, b_k)$, les fonctions a_j, p_j, q_j sont ainsi constantes pour $j \leqslant k$:

$$a_j(x) = b_j, \quad \frac{p_j(x)}{q_j(x)} = [b_0; b_1, \ldots, b_j] \quad (x \in \mathfrak{c}(b_1, \ldots, b_j)).$$

Les extrémités de $\mathfrak{c}(b_1, \ldots, b_k)$ sont

$$\frac{p_k}{q_k} \quad \text{et} \quad \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$$

(dans cet ordre si k est pair ; dans l'ordre opposé si k est impair).

Étant donné un nombre irrationnel x et un entier naturel k, il existe une unique cellule de profondeur k qui contient x. Selon la proposition 4 de [3], la distance $\delta_k(x)$ de x aux extrémités de cette cellule satisfait à

$$\delta_k(x) \leqslant \frac{1}{q_k(x) q_{k+1}(x)}. \tag{18}$$

2.4 Dérivées des fonctions α_k et γ_k dans une cellule de profondeur k

Nous utiliserons les relations suivantes, valables dans une cellule de profondeur k.

$$\alpha_k' = (-1)^k (q_k + \alpha_k q_{k-1})^2 \quad \text{(cf. [3], (34), p. 207)}$$
$$\gamma_k' = (-1)^{k-1} q_{k-1} \log(1/\alpha_k) + (-1)^{k-1}/\beta_k \quad \text{(cf. [3], (36), p. 208).}$$

2.5 Profondeur et épaisseur d'un segment

Soit $I = [a, b]$ un segment inclus dans $]0, 1[$, de longueur $h = b - a > 0$ et d'extrémités a, b irrationnelles. Il existe un unique entier naturel K tel que I soit inclus dans une cellule de profondeur K, mais dans aucune cellule de profondeur $K + 1$. On dit alors que I est de profondeur K. La longueur d'un segment I tend uniformément vers 0 quand sa profondeur K tend vers l'infini. Dans le cas où $x \in X$ est fixé et $I = [x - h/2, x + h/2]$ avec $x \pm h/2 \in X$, la profondeur $K = K(x, h)$ de I tend vers l'infini quand h tend vers 0 (cf paragraphe 5.4 de [3]).

Nous définissons également l'épaisseur de I comme le nombre de cellules de profondeur $K+1$ qui ont une intersection non vide avec I, où K est la profondeur de I. L'épaisseur de I est donc un nombre entier supérieur ou égal à 2.

2.6 Profondeur d'un nombre rationnel

Soit r un nombre rationnel, $0 < r < 1$, mis sous forme irréductible p/q. Il peut s'écrire d'une et une seule façon sous la forme

$$r = [0; b_1, \ldots, b_k]$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$, $b_i \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, et $b_k \geqslant 2$. Nous dirons alors que r est de profondeur k. On a alors $\alpha_k(r) = 0$. Par convention, 0 et 1 sont de profondeur 0.

Écrivons $[0; b_1, \ldots, b_{k-1}]$ sous forme réduite p_{k-1}/q_{k-1} (si $k = 1$, on a $q_0 = 1$). Le nombre rationnel r est une extrémité de deux cellules de profondeur k (qui sont donc contigües) :

$$\mathfrak{c} \quad \text{d'extrémités} \quad [0; b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1] = \frac{p - p_{k-1}}{q - q_{k-1}} \quad \text{et} \quad r\,;$$

$$\mathfrak{c}' \quad \text{d'extrémités} \quad r \quad \text{et} \quad [0; b_1, \ldots, , b_{k-1}, b_k + 1] = \frac{p + p_{k-1}}{q + q_{k-1}}.$$

Dans le paragraphe 5.3 de [3], nous avons établi l'inclusion

$$]r - \frac{2}{3q^2}, r + \frac{2}{3q^2}[\setminus \{r\} \subset \mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'.$$

Enfin, observons que les profondeurs des nombres rationnels appartenant à une cellule de profondeur K sont supérieures à K.

2.7 Comportement en moyenne de γ_k

Nous restituons ici certaines majorations de l'intégrale $\int_I \gamma_k(t)dt$ obtenues dans [3] (propositions 7, 9 et 11).

Proposition 3 *Soit I un segment inclus dans $]0, 1[$ de longueur h, avec $0 < h \leqslant e^{-2}$, inclus dans une cellule de profondeur K avec $K \in \mathbb{N}$. Pour $x \in I$, $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < K$, on a*

$$\int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt \leqslant \frac{3}{2} q_{k+1} h^2,$$

où q_{k+1} désigne la valeur constante de cette fonction sur I.

Proposition 4 *Soit I un segment inclus dans $]0, 1[$ de longueur h, avec $0 < h \leqslant e^{-2}$, de profondeur K, dont le milieu x et les extrémités sont irrationnels. On a*

$$\int_I \gamma_K(t) dt \leqslant 8h\gamma_K(x) + \frac{h}{q_K}(6 \log q_K + 4),$$

où q_K désigne la valeur constante de cette fonction sur I.

Proposition 5 *Soit I un segment inclus dans $]0,1[$ de longueur h, avec $0 < h \leqslant e^{-2}$, de profondeur K, d'épaisseur E, et dont le milieu x et les extrémités sont irrationnels. Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > K$ on a*

$$\int_I \gamma_k(t)dt \leqslant \frac{h}{F_{k-K}}\Big(\frac{72[E>2]}{q_K} + \frac{12[E=2]\log q_{K+2}(x)}{q_{K+1}(x)} + \frac{12[E=2]\log q_{K+3}(x)}{q_{K+2}(x)}\Big),$$

où q_K désigne la valeur constante de cette fonction sur I.

3 La fonction de Wilton et son comportement local moyen

3.1 Définition, rappels

Dans [3], nous avons étudié la fonction de Brjuno

$$\Phi(x) = \sum_{k\geqslant 0} \gamma_k(x).$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \gamma_k(t)dt &\leqslant \frac{1}{F_{k+1}} \int_0^1 \log\big(1/\alpha_k(t)\big)dt \quad \text{(d'après (15) et (17))}\\
&\leqslant \frac{2}{F_{k+1}} \int_0^1 \log\big(1/\alpha_k(t)\big)\frac{dt}{1+t}\\
&= \frac{2}{F_{k+1}} \int_0^1 \log(1/t)\frac{dt}{1+t} \quad \text{(d'après (9))}\\
&\leqslant \frac{2}{F_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi la série à termes positifs $\Phi(x)$ est convergente dans $L^1(0,1)$, et donc presque partout. On appelle respectivement nombres de Brjuno et nombres de Cremer, ses points irrationnels de convergence, respectivement de divergence.

À présent pour $x \in X =]0,1[\setminus\mathbb{Q}$, nous posons :

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \gamma_k(x). \tag{19}$$

Si $x = r \in]0,1[$ est rationnel, les valeurs $\alpha_k(r)$ ne peuvent être définies par la formule $\alpha_k(x) = \alpha\big(\alpha_{k-1}(x)\big)$ que pour $k \leqslant K = K(r)$, où $K(r)$ est la profondeur de r, définie au §2.6. On pose alors

$$\mathcal{W}(r) = \sum_{0\leqslant k<K} (-1)^k \gamma_k(r). \tag{20}$$

Par exemple, $\mathcal{W}(1/k) = \log k$ si k est entier, $k \geqslant 2$. Par convention, $\mathcal{W}(0) = 0$. Enfin, on prolonge la définition de $\mathcal{W}(x)$ à $x \in \mathbb{R}$ par périodicité : $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(\{x\})$.

La *fonction de Wilton* [‡] est la somme de la série (19), (20) en tout point où cette série converge (en particulier en tout point rationnel). Nous appelons *nombres de Wilton* (resp. *nombres de Wilton-Cremer*) les points irrationnels de convergence (resp. de divergence).

Proposition 6 *Si $x \in X$ est un nombre de Brjuno alors la série $\mathcal{W}(x)$ est convergente, et de plus on a*

$$|\mathcal{W}(x)| \leqslant \Phi(x). \tag{21}$$

En particulier l'inégalité (21) est valable presque partout.

Démonstration L'inégalité (21) résulte directement de l'inégalité triangulaire. □

Ainsi, tout nombre de Brjuno est un nombre de Wilton (et tout nombre de Wilton-Cremer est un nombre de Cremer). L'inégalité (21) garantit également que la fonction $\mathcal{W}$ de Wilton appartient à $L^1(0,1)$. Bien que nous n'en ayons pas l'usage dans cette étude, signalons que la fonction de Wilton est à oscillation moyenne bornée [§] sur $[0,1]$, autrement dit que

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I \left| \mathcal{W}(x) - \frac{1}{|I|} \int_I \mathcal{W}(t)dt \right| dx < \infty,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les intervalles I inclus dans $[0,1]$. Il est possible de le déduire des résultats obtenus dans [21], où Marmi, Moussa et Yoccoz établissent que la fonction de Brjuno est à oscillation moyenne bornée.

Proposition 7 *Soit $x \in X$. La série $\mathcal{W}(x)$ est convergente si, et seulement si la série*

$$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)}$$

est convergente.

Démonstration C'est une conséquence directe de l'encadrement (16) et du fait que la série

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{\log q_k}{q_k}$$

est convergente. □

‡. En l'honneur du mathématicien australien John Raymond Wilton (1884-1944) qui a le premier introduit la série $\mathcal{W}(x)$ (cf. [35], assertion (20_{III}), p. 221). L'article nécrologique [6] donne un aperçu de sa vie et de son oeuvre.

§. En conséquence, la fonction $\mathcal{W}$ appartient à $L^p(0,1)$ pour tout $p \geqslant 1$.

3.2 Équation fonctionnelle de $\mathcal{W}$

Proposition 8 *Soit $x \in X$. Le réel x est un nombre de Wilton si, et seulement si $\alpha(x)$ est un nombre de Wilton. Dans ce cas, on a*

$$\mathcal{W}(x) = \log(1/x) - x\mathcal{W}\big(\alpha(x)\big)\,, \tag{22}$$

et $\alpha_k(x)$ est un nombre de Wilton pour tout entier naturel k.

Démonstration Cela résulte de l'identité

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(x) &= \log(1/x) + x\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\alpha_1(x)\cdots\alpha_{k-1}(x)\log 1/\alpha_k(x)\\ &= \log(1/x) + x\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\alpha_0\big(\alpha(x)\big)\cdots\alpha_{k-2}\big(\alpha(x)\big)\log 1/\alpha_{k-1}\big(\alpha(x)\big)\\ &= \log(1/x) - x\mathcal{W}\big(\alpha(x)\big).\end{aligned}$$

□

On a plus généralement la proposition suivante.

Proposition 9 *Pour tout nombre de Wilton x, $K \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{k<K}(-1)^k\gamma_k(x) + (-1)^K\beta_{K-1}(x)\mathcal{W}\big(\alpha_K(x)\big). \tag{23}$$

De plus l'identité (23) *reste valable lorsque x est un nombre rationnel de profondeur supérieure ou égale à K.*

Démonstration On peut l'établir directement à partir de la définition de $\mathcal{W}(x)$ ou le démontrer par récurrence à partir de la proposition 8. □

3.3 Primitive de la fonction de Wilton

On introduit à présent la fonction absolument continue

$$\Upsilon(x) = \int_0^x \mathcal{W}(t)dt, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous étudions le comportement local de Υ. Nous emploierons à plusieurs reprises l'identité

$$\int_I \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\gamma_k(t)dt = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\int_I \gamma_k(t)dt, \quad (I \text{ intervalle inclus dans } [0,1]),$$

dont la validité est garantie par la majoration

$$\int_0^1 \sum_{k\geqslant 0}\gamma_k(t)dt < \infty.$$

3.4 Comportement de Υ au voisinage d'un nombre rationnel

Les résultats et démonstrations de ce paragraphe sont analogues à ceux du paragraphe 7 de [3], qui concernait la fonction Ψ, intégrale de la fonction de Brjuno. Dans un souci de lisibilité, nous avons restitué la plupart des détails.

Lemme 1 *On a*

$$\int_0^x \left|\mathcal{W}\big(\alpha(t)\big)\right| dt \ll x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned}\int_0^x \left|\mathcal{W}\big(\alpha(t)\big)\right| dt &\leqslant \int_0^x \Phi\big(\alpha(t)\big) dt \quad \text{(d'après la proposition 6)}\\ &\ll x \quad \text{(d'après le lemme 4 de [3]).}\end{aligned}$$

□

Lemme 2 *Pour* $0 < x \leqslant 1$, *on a*

$$\Upsilon(x) = x\log(1/x) + x + O(x^2)\,, \tag{24}$$

$$\Upsilon(1) - \Upsilon(1-x) = -x\log(1/x) - x + O\big(x^2\log(2/x)\big)\,. \tag{25}$$

Démonstration Pour $0 < x \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\Upsilon(x) = \int_0^x \mathcal{W}(t)dt &= \int_0^x \Big(\log(1/t) - t\mathcal{W}\big(\alpha(t)\big)\Big) dt \quad \text{(d'après la proposition 8)}\\ &= \int_0^x \log(1/t)dt + O\Big(x\int_0^x \left|\mathcal{W}\big(\alpha(t)\big)\right| dt\Big)\\ &= x\log(1/x) + x + O(x^2) \quad \text{(d'après le lemme 1).}\end{aligned}$$

Pour établir (25), il suffit de traiter le cas $0 < x < 1/2$. Nous utiliserons notamment l'estimation

$$\int_0^x \Phi(u)du \ll x\log(1/x) \quad (0 < x < 1/2), \tag{26}$$

qui résulte de l'estimation (46), p. 214 de notre article [3]. On a

$$\begin{aligned}\Upsilon(1) - \Upsilon(1-x) &= \int_{1-x}^1 \mathcal{W}(t)dt\\ &= \int_{1-x}^1 \Big(-t\mathcal{W}\big(\alpha(t)\big) + \log(1/t)\Big)\, dt \quad \text{(d'après la proposition 8)}\\ &= \int_0^{x/(1-x)} \Big(-\mathcal{W}(u) + O\big(u\Phi(u)\big) + O(u)\Big)\, du \quad \text{(en posant } u = (1-t)/t\text{)}\\ &= -\frac{x}{1-x}\log\Big(\frac{1-x}{x}\Big) - \frac{x}{1-x} + O\big(x^2\log(1/x)\big) \quad \text{(d'après (24) et (26))}\\ &= -x\log(1/x) - x + O\big(x^2\log(1/x)\big).\end{aligned}$$

□

Rappelons que la fonction $\mathcal{W}$ a été prolongée aux nombres rationnels par la formule (20).

Proposition 10 *Pour $r = p/q \in]0,1[$, $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$, $h \in \mathbb{R}$, $q^2|h| < 2/3$, on a*

$$\Upsilon(r+h) - \Upsilon(r) = \frac{1}{q}|h| \log(e/q^2|h|) + h\mathcal{W}(r) + O\big(qh^2 \log(1/q^2|h|)\big).$$

Démonstration Soit $K \in \mathbb{N}^*$ la profondeur du nombre rationnel r. Comme $0 < |h| < 2/3q^2$, on sait d'après le §2.6 que l'intervalle ouvert d'extrémités r et $r+h$ est inclus dans l'une des deux cellules de profondeur K :

- $\mathfrak{c}$ d'extrémités $\frac{p-p_{K-1}}{q-q_{K-1}}$ et r ;
- $\mathfrak{c}'$ d'extrémités r et $\frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$,

où p_{K-1}/q_{K-1} est la $(K-1)^{\text{e}}$ réduite de r.

Les trois nombres $\frac{p-p_{K-1}}{q-q_{K-1}}$, r et $\frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$ se succèdent dans cet ordre si K est pair, dans l'ordre inverse si K est impair. Par conséquent,

$$(-1)^K h > 0 \Leftrightarrow r + h \in \mathfrak{c}'.$$

D'après la proposition 9 nous avons

$$\begin{aligned}\Upsilon(r+h) - \Upsilon(r) &= \int_r^{r+h} \mathcal{W}(t)dt \\ &= \sum_{k<K} (-1)^k \int_r^{r+h} \gamma_k(t)dt + (-1)^K \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\mathcal{W}\big(\alpha_K(t)\big)dt.\end{aligned}$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k<K}(-1)^k \int_r^{r+h} \gamma_k(t)dt - h\mathcal{W}(r)\Big| &= \Big|\sum_{k<K}(-1)^k \int_r^{r+h} \big(\gamma_k(t) - \gamma_k(r)\big)dt\Big| \\ &\leqslant \frac{3}{2}h^2 \sum_{k<K} q_{k+1} \quad \text{(d'après la proposition 3)} \\ &\leqslant 5qh^2 \quad \text{(d'après la majoration (12)).}\end{aligned}$$

Il reste à montrer

$$(-1)^K \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\mathcal{W}\big(\alpha_K(t)\big)dt = \frac{|h|}{q}\log(1/q^2|h|) + \frac{|h|}{q} + O\big(qh^2\log(1/q^2|h|)\big). \tag{27}$$

La fonction α_K est définie sur chacune des cellules $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$. Suivant que $r+h$ appartienne à $\mathfrak{c}$ ou à $\mathfrak{c}'$, nous prolongeons α_K (par continuité à droite ou à gauche suivant la parité de K) respectivement

à $\mathfrak{c} \cup \{r\}$ ou $\mathfrak{c}' \cup \{r\}$, et dans l'intégrale du premier membre de (27) nous effectuons le changement de variables $u = \alpha_K(t)$. Distinguons les deux cas.
Premier cas : $(-1)^K h > 0$. Dans ce cas, le segment d'extrémités r et $r+h$ est inclus dans $\overline{\mathfrak{c}'}$. Dans $\mathfrak{c}'$, on a $q_K(t) = q$, $p_K(t) = p$ et, d'après (10)

$$u = \alpha_K(t) = \frac{q_K t - p_K}{-q_{K-1}t + p_{K-1}}.$$

La fonction α_K est dérivable sur $\mathfrak{c}'$ et $\alpha_K' = (-1)^K (q_K + \alpha_K q_{K-1})^2$, de sorte que

$$(-1)^K \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\mathcal{W}\big(\alpha_K(t)\big)dt = (-1)^{2K} \int_{\alpha_K(r)}^{\alpha_K(r+h)} \mathcal{W}(u) \frac{du}{(q_K + q_{K-1}u)^3}.$$

On a $\alpha_K(r) = 0$ et

$$\begin{aligned}\alpha_K(r+h) &= \frac{q^2 h}{-q_{K-1}p - q_{K-1}qh + p_{K-1}q} \\ &= \frac{q^2|h|}{1 - |h|qq_{K-1}},\end{aligned}$$

car $p_{K-1}q - pq_{K-1} = (-1)^K = \operatorname{sgn} h$. Nous posons donc

$$x' = \frac{q^2|h|}{1 - |h|qq_{K-1}}. \tag{28}$$

Comme $q_{K-1} \leqslant q/2$, on a

$$\begin{aligned}(-1)^K \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\mathcal{W}\big(\alpha_K(t)\big)dt &= \frac{1}{q^3}\int_0^{x'} \mathcal{W}(u) \frac{du}{\Big(1 + u\frac{q_{K-1}}{q}\Big)^3} \\ &= \frac{x'\log(1/x')}{q^3} + \frac{x'}{q^3} + O\Big(\frac{x'^2}{q^3}\log(1/x')\Big),\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (24) et (26).
Deuxième cas : $(-1)^K h < 0$. Dans ce cas, le segment d'extrémités r et $r+h$ est inclus dans $\overline{\mathfrak{c}}$. Dans cette cellule, on a

$$u = \alpha_K(t) = \frac{(q - q_{K-1})t - p + p_{K-1}}{-q_{K-1}t + p_{K-1}},$$

Par suite, $\alpha_K(r) = 1$ et

$$\begin{aligned}\alpha_K(r+h) &= \frac{(q - q_{K-1})\frac{p}{q} - (p - p_{K-1}) + h(q - q_{K-1})}{-q_{K-1}\frac{p}{q} + p_{K-1} - q_{K-1}h} \\ &= 1 + \frac{hq^2}{(-1)^K - qq_{K-1}h} = 1 - x,\end{aligned}$$

avec cette fois
$$x = \frac{q^2|h|}{1+|h|qq_{K-1}}. \tag{29}$$
Nous avons donc, d'après (25) et (26),
$$\begin{aligned}(-1)^K \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\mathcal{W}\big(\alpha_K(t)\big)dt &= -\frac{1}{q^3}\int_{1-x}^{1} \mathcal{W}(u)du + O\Big(\frac{x^2}{q^3}\log(1/x)\Big) \\ &= \frac{x\log(1/x)}{q^3} + \frac{x}{q^3} + O\Big(\frac{x^2}{q^3}\log(1/x)\Big).\end{aligned}$$

Dans les deux cas on a donc pour $y = x$ ou x',
$$(-1)^K \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\mathcal{W}\big(\alpha_K(t)\big)dt = \frac{y\log(1/y)}{q^3} + \frac{y}{q^3} + O\Big(\frac{y^2}{q^3}\log(1/y)\Big). \tag{30}$$
Comme $q_{K-1} < q/2$ et $|h| < 2/3q^2$, nous avons
$$\log(1/y) = \log(1/q^2|h|) + O(q^2h),$$
et
$$y = q^2|h| + O(h^2q^4),$$
Ces estimations insérées dans (30) entraînent bien (27). □

La proposition suivante énonce une conséquence importante de la proposition 10.

Proposition 11 *La fonction de Wilton n'est bornée sur aucun intervalle ouvert non vide.*

Démonstration

Soit I un intervalle ouvert non vide et $r \in I \cap \mathbb{Q}$. Si $\mathcal{W}$ était bornée sur I, on aurait $\Upsilon(r+h) - \Upsilon(r) = O(h)$ pour h assez petit. Ce n'est pas le cas. □

3.5 Comportement de Υ au voisinage d'un nombre de Wilton-Cremer

Proposition 12 *Soit $x \in X$ un point de Wilton-Cremer. Alors la fonction Υ n'est pas dérivable en x.*

Démonstration Étant donné un nombre x de Wilton-Cremer, nous allons construire une suite de nombres réels $(h_K)_{K\geqslant 0}$ tendant vers 0 quand $K \to \infty$, et telle que le taux d'accroissement
$$\frac{\Upsilon(x+h_K) - \Upsilon(x)}{h_K} \tag{31}$$
n'ait pas de limite quand $K \to \infty$.

Dans la suite pour tout entier naturel k, a_k, q_k, p_k désignent les valeurs des fonctions correspondantes au point x. Pour tout entier impair K, nous choisissons un nombre irrationnel x_K appartenant à la cellule $\mathfrak{c}(a_1, \ldots, a_K, a_{K+1}+2)$, tel que $(x+x_K)/2$ soit irrationnel. On a la suite d'inégalités

$$\begin{aligned}[][a_0; a_1, \ldots, a_K, a_{K+1}] < x < [a_0; a_1, \ldots, a_K, a_{K+1}+1] \\ < [a_0; a_1, \ldots, a_K, a_{K+1}+2] < x_K < [a_0; a_1, \ldots, a_K, a_{K+1}+3],\end{aligned}$$

de sorte que le segment $I_K = [x, x_K]$ est inclus dans la cellule $\mathfrak{c}(a_1, \ldots, a_K)$, est de profondeur K, et d'épaisseur 3. Notant $h_K = x_K - x$, nous avons

$$0 < h_K \leqslant \frac{p_K}{q_K} - x \leqslant \frac{1}{q_K q_{K+1}}, \tag{32}$$

de sorte que h_K tend vers 0 lorsque K tend vers l'infini. Enfin remarquons que la fonction q_{K+1} satisfait à

$$q_{K+1} \leqslant q_{K+1}(t) \leqslant (a_{K+1}+2)q_K + q_{K-1} \leqslant 3q_{K+1} \quad (t \in I_K). \tag{33}$$

D'après la proposition 5, on a

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k>K} (-1)^k \int_{I_K} \gamma_k(t)dt\Big| &\leqslant \sum_{k>K} \int_{I_K} \gamma_k(t)dt \\ &\leqslant \frac{72h_K}{q_K} \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \\ &\leqslant \frac{242h_K}{q_K},\end{aligned} \tag{34}$$

où la dernière inégalité provient de (13) et pourvu que $q_K q_{K+1} \geqslant e^2$ (ce qui est vrai dès que $K \geqslant 3$). De plus,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k<K} (-1)^k \int_{I_K} \big(\gamma_k(t) - \gamma_k(x)\big)dt\Big| &\leqslant \sum_{k<K} \int_{I_K} \big|\gamma_k(t) - \gamma_k(x)\big|dt \\ &\leqslant \frac{3h_K^2}{2} \sum_{k<K} q_{k+1} \quad \text{(d'après la proposition 3)} \\ &\leqslant 5h_K^2 q_K \quad \text{(d'après la majoration (12))} \\ &\leqslant \frac{5h_K}{q_{K+1}} \quad \text{(d'après la majoration (32))}.\end{aligned} \tag{35}$$

Par ailleurs, la fonction γ_K est dérivable sur I_K et $\gamma_K'(t) = q_{K-1}\log\big(1/\alpha_K(t)\big) + 1/\beta_K(t)$. On a donc, pour $t \in I_K$,

$$\begin{aligned}
|\gamma_K'(t)| &\leqslant q_{K-1}\log\big(a_{K+1}(t)+1\big) + q_K + q_{K+1}(t) \quad \text{(d'après (15))}\\
&\leqslant q_K a_{K+1}(t) + q_{K-1} + 2q_{K+1}(t)\\
&= 3q_{K+1}(t) \leqslant 9q_{K+1} \quad \text{(d'après (33))},
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\Big|(-1)^K \int_{I_K} \big(\gamma_K(t) - \gamma_K(x)\big)dt\Big| &\leqslant \int_{I_K} \big|\gamma_K(t) - \gamma_K(x)\big|dt\\
&\leqslant 9q_{K+1}\int_{I_K}(t-x)dt\\
&= \frac{9}{2}q_{K+1}h_K^2 \leqslant \frac{5h_K}{q_K}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

À présent nous avons

$$\begin{aligned}
\Upsilon(x+h_K) - \Upsilon(x) &= \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\int_{I_K}\gamma_k(t)dt\\
&= h_K\sum_{k\leqslant K}(-1)^k\gamma_k(x) + \sum_{k\leqslant K}(-1)^k\int_{I_K}\big(\gamma_k(t)-\gamma_k(x)\big)dt\\
&\quad + \sum_{k>K}(-1)^K\int_{I_K}\gamma_k(t)dt,
\end{aligned}$$

et compte tenu de (34), (35) et (36), nous obtenons finalement

$$\frac{\Upsilon(x+h_K)-\Upsilon(x)}{h_K} = \sum_{k\leqslant K}(-1)^k\gamma_k(x) + O\Big(\frac{1}{q_K}\Big). \qquad (37)$$

Le même raisonnement, mais en retenant cette fois les valeurs paires de K, fournit une suite h_K, de nombres négatifs, telles que (37) est vérifiée. Comme x est un point de Wilton-Cremer, la somme figurant au membre de droite de (37) diverge lorsque K tend vers l'infini. Cela montre que le taux d'accroissement (31) diverge lorsque $h \to 0$. □

Observons que nous n'avons pas exclu la possibilité que Υ soit dérivable à droite et à gauche en un point de Wilton-Cremer.

3.6 Comportement de Υ au voisinage d'un nombre de Wilton

Proposition 13 *Tout nombre de Wilton est un point de Lebesgue de $\mathcal{W}$. En particulier la fonction Υ est dérivable en tout nombre x de Wilton et $\Upsilon'(x) = \mathcal{W}(x)$.*

Démonstration Soit x un nombre de Wilton tel que $0 < x < 1$. Il s'agit d'établir

$$\int_{x-h/2}^{x+h/2} \big|\mathcal{W}(t) - \mathcal{W}(x)\big| dt = o(h) \quad (h \to 0).$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on peut supposer que les nombres $x \pm h/2$ sont irrationnels. Posons alors $I = [x - h/2, x + h/2]$ et notons K la profondeur de ce segment. De plus nous posons $q_j = q_j(x)$ pour tout entier naturel j.

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_I |\mathcal{W}(t) - \mathcal{W}(x)| dt \leqslant \sum_{k<K} \int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt + \int_I \gamma_K(t) dt \\ + \sum_{k>K} \int_I \gamma_k(t) dt + h\Big|\sum_{k\geqslant K} (-1)^k \gamma_k(x)\Big|.\end{aligned}$$

Majorons chacun des quatre termes du second membre. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\sum_{k<K} \int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt &\leqslant \frac{3h}{2} \sum_{k<K} q_{k+1} \quad \text{(d'après la proposition 3)} \\ &\leqslant \frac{9}{2} q_K h \qquad \text{(d'après la majoration (12))} \\ &\leqslant \frac{9}{q_{K+1}} \quad \text{(d'après la majoration (18) puisque } h/2 < \delta_K(x)\text{)}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{1}{h}\int_I \gamma_K(t) dt \leqslant 8\gamma_K(x) + \frac{6 \log q_K + 4}{q_K} \quad \text{(d'après la proposition 4)}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\sum_{k>K} \int_I \gamma_k(t) dt &\leqslant \Big(\frac{72}{q_K} + 12\frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + 12\frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}}\Big) \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \qquad \text{(d'après la proposition 5)} \\ &\leqslant \frac{242}{q_K} + 41\frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + 41\frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}} \quad \text{(d'après la majoration (13))}.\end{aligned}$$

Puisque x est un nombre de Wilton, on a

$$\sum_{k\geqslant K} (-1)^k \gamma_k(x) = o(1) \quad \text{et} \quad \gamma_K(x) = o(1) \quad (K \to \infty)$$

et donc aussi, d'après l'encadrement (16),

$$\frac{\log q_{K+1}}{q_K} = o(1) \quad (K \to \infty).$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1}{h}\int_I |\mathcal{W}(t)-\mathcal{W}(x)|dt = o(1) \quad (K\to\infty). \tag{38}$$

On obtient bien la conclusion souhaitée puisque K tend vers l'infini lorsque h tend vers 0 (cf. paragraphe 2.5).

3.7 Module de continuité de Υ

Maintenant et dans la suite, nous notons

$$\omega(h,\varphi) = \sup\{|\varphi(x)-\varphi(y)|, 0 \leqslant x, y \leqslant 1, |x-y| \leqslant h\} \quad (h>0),$$

le module de continuité d'une fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Proposition 14 *On a*

$$\omega(h,\Upsilon) = h\log(1/h) + O(h) \quad (h>0).$$

Démonstration

D'après (24), nous avons

$$\omega(h,\Upsilon) \geqslant h\log(1/h) + O(h).$$

Par ailleurs, d'après le théorème 3 de [3], en notant $\Psi(x) = \int_0^x \Phi(t)dt$, on a

$$\omega(h,\Psi) = h\log(1/h) + O(h).$$

Donc, pour $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, $|x-y| \leqslant h$,

$$\Big|\int_x^y \mathcal{W}(t)dt\Big| \leqslant \int_x^y \big|\mathcal{W}(t)\big|dt \leqslant \int_x^y \Phi(t)dt \leqslant \omega(h,\Psi) \leqslant h\log(1/h) + O(h).$$

Par suite,

$$\omega(h,\Upsilon) \leqslant h\log(1/h) + O(h),$$

ce qui achève la preuve. □

4 La fonction φ_1 et son lien avec la fonction de Wilton

Rappelons que la série $\varphi_1(t)$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_1(t) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{B_1(nt)}{n}.$$

Baez Duarte *et al.* ont montré (proposition 6 de [2]) que φ_1 définit une fonction appartenant à $L^2(0,1)$, et donc à $L^1(0,1)$, en utilisant la représentation de φ_1 en série trigonométrique. On peut établir que la série φ_1 converge dans $L^2(0,1)$ sans recourir à cette représentation en invoquant le critère de Cauchy, l'identité

$$\int_0^1 B_1(mt)B_1(nt)dt = \frac{(m,n)^2}{12mn} \quad (m,n \in \mathbb{N}^*)$$

(démontrée par Landau de manière élémentaire : cf. [20], p. 203) et le fait que la série double $\sum_{m,n\geqslant 1} \frac{(m,n)^2}{(mn)^2}$ est convergente.

Le but des prochains paragraphes est d'établir une relation entre les fonctions φ_1 et $\mathcal{W}$. Il nous faut au préalable introduire deux nouvelles fonctions auxiliaires.

4.1 Les fonctions F et G

Posons pour $x > 0$

$$F(x) = \frac{x+1}{2}A(1) - A(x) - \frac{x}{2}\log x. \tag{39}$$

La fonction F est continue sur $]0,\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $F(0) = A(1)/2$ ¶.

Pour $x \in X$, nous posons

$$G(x) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \beta_{j-1}(x)F\big(\alpha_j(x)\big) \tag{40}$$

et nous prolongeons la définition de G aux rationnels de $[0,1[$ en posant

$$G(r) = \sum_{j\leqslant K}(-1)^j \beta_{j-1}(r)F\big(\alpha_j(r)\big),$$

si r est un nombre rationnel $\in [0,1[$ de profondeur K. En particulier, $G(0) = F(0) = A(1)/2$. Enfin nous prolongeons G à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

Les trois propositions suivantes résument les principales propriétés de la fonction $G : [0,1[\to \mathbb{R}$.

Proposition 15 *La fonction G est bornée sur $\mathbb{R}$, continue en tout irrationnel, continue à droite en 0, et on a $G(1-0) = -A(1)/2$.*

Démonstration On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0,1[$.

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, nous posons

$$G_j(x) = \begin{cases} (-1)^j\beta_{j-1}(x)F\big(\alpha_j(x)\big) & \text{si } x \in X \text{ ou si } x \text{ est un rationnel de profondeur} \geqslant j \\ 0 & \text{si } x \text{ est un nombre rationnel de profondeur} < j. \end{cases}$$

¶. On a $A(1) = \log 2\pi - \gamma$, où γ désigne la constante d'Euler (cf. démonstration de la proposition 8 de [2]).

Nous avons donc
$$G(x)=\sum_{j\geqslant 0}G_j(x)\quad (0\leqslant x<1).$$

Désignons par $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de la valeur absolue d'une fonction f sur $[0,1[$. Comme $\|G_j\|_\infty\leqslant \|F\|_\infty/F_{j+1}$, la série est normalement convergente. En particulier, G est bornée sur $[0,1]$.

D'autre part, si $x\in X$, toutes les fonctions G_j sont continues en x. Il en résulte que G est continue en x.

Ensuite $G_0=F$ est continue sur $[0,1[$ et pour $j\geqslant 1$,
$$|G_j(x)|\leqslant \|F\|_\infty x,$$
donc G_j est continue en 0.

Enfin, quand x tend vers 1,
$$\begin{aligned} G_0(x)=F(x)\to&\quad F(1)=0,\\ G_1(x)=-xF\big(\alpha(x)\big)=-xF\big((1-x)/x\big)\to&-F(0)=-A(1)/2\quad\text{et, pour } j\geqslant 2,\\ |G_j(x)|\leqslant \beta_1(x)\|F\|_\infty=\|F\|_\infty(1-x)\to&\quad 0,\end{aligned}$$
donc $G(1-0)=-A(1)/2$. □

Proposition 16 *La fonction G vérifie l'équation fonctionnelle*
$$G(x)=F(x)-xG\big(\alpha(x)\big)\quad (x\in]0,1[).\tag{41}$$

Plus généralement, si $K\in\mathbb{N}$ et si $x\in[0,1[$ est irrationnel ou rationnel de profondeur supérieure ou égale à K,
$$G(x)=\sum_{j<K}(-1)^j\beta_{j-1}(x)F\big(\alpha_j(x)\big)+(-1)^K\beta_{K-1}(x)G\big(\alpha_K(x)\big).\tag{42}$$

Démonstration Soit $K\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$ irrationnel ou rationnel de profondeur $K'\geqslant K$. On a
$$G(x)=\sum_{j<K}(-1)^j\beta_{j-1}(x)F\big(\alpha_j(x)\big)+\begin{cases}\sum_{j\geqslant K}(-1)^j\beta_{j-1}(x)F\big(\alpha_j(x)\big) & \text{si } x\notin\mathbb{Q},\\ \sum_{K\leqslant j\leqslant K'}(-1)^j\beta_{j-1}(x)F\big(\alpha_j(x)\big) & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

Si $x\notin\mathbb{Q}$ on a
$$\sum_{j\geqslant K}(-1)^j\beta_{j-1}(x)F\big(\alpha_j(x)\big)=(-1)^K\beta_{K-1}(x)G\big(\alpha_K(x)\big).$$

Si $x \in \mathbb{Q}$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{K \leqslant j \leqslant K'} (-1)^j \beta_{j-1}(x) F\big(\alpha_j(x)\big) &= \sum_{j' \leqslant K-K'} (-1)^{K+j'} \beta_{j'-1+K}(x) F\big(\alpha_{j'+K}(x)\big) \\ &= (-1)^K \beta_{K-1}(x) \sum_{j' \leqslant K-K'} (-1)^{j'} \beta_{j'-1}\big(\alpha_K(x)\big) F\Big(\alpha_{j'}\big(\alpha_K(x)\big)\Big) \\ &= (-1)^K \beta_{K-1}(x) G\big(\alpha_K(x)\big)\end{aligned}$$

puisque $\alpha_K(x) \in [0,1[$ est un nombre rationnel de profondeur $K' - K$. □

Proposition 17 *Si $r = p/q \in]0,1[$ est un nombre rationnel de profondeur $K \geqslant 1$, écrit sous forme irréductible, alors*

- *si K est pair, G est continue à droite en r et $G(r-0) = G(r) - \frac{A(1)}{q}$;*
- *si K est impair, G est continue à gauche en r et $G(r+0) = G(r) + \frac{A(1)}{q}$.*

Démonstration Écrivons $r = \frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_K]$ avec $K \geqslant 1$ et $a_K \geqslant 2$ et considérons $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(a_1, \ldots, a_K)$ et $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}(a_1, \ldots, a_K - 1, 1)$, cellules contigües de profondeurs respectives K et $K+1$, auxquelles r est adhérent. Si K est pair (resp. impair), alors la cellule $\mathfrak{c}$ se situe à droite (resp. à gauche) de r. Nous allons montrer que

$$\lim_{\substack{x \to r \\ x \in \mathfrak{c}}} G(x) = G(r)$$

tandis que

$$\lim_{\substack{x \to r \\ x \in \mathfrak{c}'}} G(x) = G(r) + (-1)^K \Big(\frac{F(1)}{q} - \frac{2F(0)}{q}\Big),$$

ce qui montrera le résultat souhaité. Remarquons tout d'abord que tout nombre rationnel appartenant à la réunion $\mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'$ est de profondeur supérieure ou égale à $K+1$. Pour $j < K$ les fonctions α_j et β_j sont continues sur $\overline{\mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'}$. Par ailleurs notons que pour $x \in \overline{\mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'} \subset \mathfrak{c}(a_1, \ldots, a_{K-1})$,

$$\beta_{K-1}(x) = |p_{K-1} - x q_{K-1}| = \frac{1}{q} + o(1) \quad (x \to r).$$

- Calcul de $\lim_{\substack{x \to r \\ x \in \mathfrak{c}}} G(x)$

Pour $x \in \mathfrak{c}$, on a $p_K(x) = p$, $q_K(x) = q$, et par conséquent, d'après les formules (10) et (14),

$$\begin{aligned}\alpha_K(x) &= -\frac{p - xq}{p_{K-1} - x q_{K-1}} = o(1), \\ \beta_K(x) &= |qx - p| = o(1) \quad (x \to r,\, x \in \mathfrak{c}).\end{aligned}$$

D'aprés l'équation fonctionnelle (42), nous avons

$$G(x) = \sum_{j\leqslant K} (-1)^j \beta_{j-1}(x) F\big(\alpha_j(x)\big) + (-1)^{K+1}|qx-p| G\big(\alpha_{K+1}(x)\big) \quad (x \in \mathfrak{c}).$$

Comme G est bornée sur $[0,1[$ et comme F est continue sur le même intervalle, il suit

$$\lim_{\substack{x\to r\\ x\in\mathfrak{c}}} G(x) = \sum_{j<K} (-1)^j \beta_{j-1}(r) F\big(\alpha_j(r)\big) + \frac{(-1)^K}{q} F(0) = G(r). \tag{43}$$

• Calcul de $\lim_{\substack{x\to r\\ x\in\mathfrak{c}'}} G(x)$

Tous les nombres rationnels de $\mathfrak{c}'$ ont une profondeur supérieure ou égale à $K+2$. Pour $x \in \mathfrak{c}'$, on a $p_K(x) = p - p_{K-1}$, $q_K(x) = q - q_{K-1}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \alpha_K(x) &= -\frac{p - p_{K-1} - x(q - q_{K-1})}{p_{K-1} - xq_{K-1}} = 1 + o(1), \\ \beta_K(x) &= \big|p - p_{K-1} - (q - q_{K-1})x\big| = \frac{1}{q} + o(1) \quad (x \to r,\ x \in \mathfrak{c}'). \end{aligned}$$

De plus, pour $x \in \mathfrak{c}'$, $p_{K+1}(x) = p$ et $q_{K+1}(x) = q$, et

$$\begin{aligned} \beta_{K+1}(x) &= |qx - p|, \\ \alpha_{K+1}(x) &= -\frac{p - xq}{p - p_{K-1} - x(q - q_{K-1})} = o(1) \quad (x \to r,\ x \in \mathfrak{c}'). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

$$\begin{aligned} G(x) = \sum_{j<K} &(-1)^j \beta_{j-1}(x) F\big(\alpha_j(x)\big) + (-1)^K \Big(\beta_{K-1}(x) F\big(\alpha_K(x)\big) - \beta_K(x) F\big(\alpha_{K+1}(x)\big)\Big) \\ &+ (-1)^{K+2} |p - qx| G\big(\alpha_{K+2}(x)\big) \quad (x \in \mathfrak{c}'). \end{aligned}$$

Il suit

$$\lim_{\substack{x\to r\\ x\in\mathfrak{c}'}} G(x) = \sum_{j<K} (-1)^j \beta_{j-1}(r) F\big(\alpha_j(r)\big) + (-1)^K \Big(\frac{F(1)}{q} - \frac{F(0)}{q}\Big) = G(r) + (-1)^K \Big(\frac{F(1)}{q} - \frac{2F(0)}{q}\Big).$$

□

4.2 Relation entre φ_1 et $\mathcal{W}$

Introduisons la fonction 1-périodique $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in X, \\ \dfrac{(-1)^{K+1} A(1)}{2q} \text{ si } x = p/q \in [0,1[,\ (p,q) = 1,\ x \text{ de profondeur } K. \end{cases} \tag{44}$$

L'objet de ce paragraphe est la démonstration de la proposition suivante, qui est la partie du théorème 2 concernant la série φ_1.

Proposition 18 *Les séries $\varphi_1(x)$ et $\mathcal{W}(x)$ convergent pour les mêmes valeurs de $x \in [0,1]$ et l'identité*

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x) + \delta(x) \tag{45}$$

est valable en tout point de convergence. En particulier, on a $\varphi_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x)$ presque partout.

4.2.1 Équation fonctionnelle vérifiée par les sommes partielles de $\varphi_1(x)$

La première étape de la démonstration de la proposition 18 consiste à établir une équation fonctionnelle approchée vérifiée par les sommes partielles de φ_1.

Proposition 19 *Pour $x \in]0,1]$, $v \in \mathbb{R}$ et $xv \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant v} \frac{B_1(mx)}{m} + x \sum_{1 \leqslant n \leqslant xv} \frac{B_1\big(n\alpha(x)\big)}{n} = F(x) - \frac{1}{2}\log(1/x) + \varepsilon(x,v),$$

avec

$$\varepsilon(x,v) \ll \frac{1}{xv}.$$

Démonstration Nous reproduisons la formule figurant en haut de la page 225 de [2] :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant m \leqslant v} \frac{B_1(mx)}{m} + x \sum_{1 \leqslant n \leqslant xv} \frac{B_1(n/x)}{n} &= \frac{x}{2}\int_0^v \{t\}^2 t^{-2}dt + \frac{1}{2}\int_0^{xv} \{t\}^2 t^{-2}dt - \int_0^v \{t\}\{xt\}t^{-2}dt \\ &+ \frac{x-1}{2}\log(1/x) + \frac{x-1}{2}\int_v^{xv}\{t\}t^{-2}dt + \frac{1}{2xv}(\{xv\} - x\{v\})^2 + \frac{x-1}{2xv}(\{xv\} - x\{v\}).\end{aligned} \tag{46}$$

Comme $B_1(n/x) = B_1\big(n\alpha(x)\big)$, on reconnaît bien la formule annoncée, avec

$$\begin{aligned}\varepsilon(x,v) = -\frac{x}{2}\int_v^\infty \{t\}^2 t^{-2}dt - \frac{1}{2}\int_{xv}^\infty \{t\}^2 t^{-2}dt + \int_v^\infty \{t\}\{xt\}t^{-2}dt \\ + \frac{x-1}{2}\int_v^{xv}\{t\}t^{-2}dt + \frac{1}{2xv}(\{xv\} - x\{v\})^2 + \frac{x-1}{2xv}(\{xv\} - x\{v\}).\end{aligned}$$

Chacun des six termes composant $\varepsilon(x,v)$ est $\ll 1/xv$ si $v \geqslant 1/x$ (ce qui entraîne $v \geqslant 1$). □

Signalons que la source de l'identité (46) est la troisième démonstration de la loi de réciprocité quadratique, proposée par Gauss en 1808 (cf. [14], §5). Eisenstein en 1844 (cf. [12]) en donna une présentation géométrique particulièrement intuitive à l'aide d'un comptage de points à coordonnées entières dans un rectangle. L'article d'Eisenstein fut traduit par Cayley et publié en 1857 dans le *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, édité par Sylvester (cf. [7]). Trois ans plus tard, Sylvester publia une note au Comptes Rendus [29] où il généralisait l'argument d'Eisenstein à un rectangle $[0, v] \times [0, xv]$ où v et x sont des réels quelconques. La relation (46) découle de l'identité de Sylvester par sommation partielle (cf. [2], p. 223-225).

4.2.2 Sur les solutions d'une équation fonctionnelle approchée

Dans ce paragraphe, nous établissons un résultat général sur des fonctions satisfaisant une équation approchée apparentée à (8).

On considère une fonction $f : [0, 1[\times[1, \infty[\to \mathbb{R}$ pour laquelle on suppose qu'il existe des nombres réels $C \geqslant 1$, $a \geqslant 1$, $b > 0$ tels que

i) pour tous $x \in]0, 1]$, $v \in \mathbb{R}$, tels que $x^a v \geqslant C$, on a

$$f(x, v) + xf\big(\alpha(x), x^a v\big) = -\frac{1}{2}\log(1/x) + F(x) + \varepsilon(x, v), \tag{47}$$

avec

$$\varepsilon(x, v) \ll (x^a v)^{-b}\,;$$

ii) pour tout $v \geqslant 1$, $f(0, v) = 0$.

iii) on a uniformément pour $x \in]0, 1[$ et $v \geqslant 1$

$$f(x, v) \ll \log(2v)\,;$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ fixé, on se pose la question de l'existence de

$$\mathfrak{F}(x) = \lim_{v\to\infty} f(x, v).$$

On a d'abord $\mathfrak{F}(0) = 0$, d'après la condition ii). Ensuite, si $0 < x \leqslant 1$, la condition i) garantit que $\mathfrak{F}(x)$ existe si et seulement si $\mathfrak{F}\big(\alpha(x)\big)$ existe, et que dans ce cas, on a

$$\mathfrak{F}(x) + x\mathfrak{F}\big(\alpha(x)\big) = -\frac{1}{2}\log(1/x) + F(x). \tag{48}$$

Les deux sous-paragraphes qui suivent établissent la proposition suivante.

Proposition 20 *Soit $f : [0, 1[\times[1, \infty[\to \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions i), ii) et iii) ci-dessus. La limite $\mathfrak{F}(x)$ existe si et seulement si la série $\mathcal{W}(x)$ est convergente et on a alors*

$$\mathfrak{F}(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x) + \delta(x).$$

• **Le cas x rationnel**

Proposition 21 *Soit $x = \frac{p}{q} \in [0,1[$ un rationnel de profondeur K mis sous forme irréductible. La limite $\mathfrak{F}(x)$ existe et de plus,*

$$\mathfrak{F}(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x) + (-1)^{K+1}\frac{A(1)}{2q}, \tag{49}$$

Démonstration La convergence de $f(x,v)$ se démontre par récurrence sur la profondeur K de x. Si $K = 0$, la convergence est directement garantie par la condition ii) et $\mathfrak{F}(0) = 0$. Si $K \geqslant 1$, $\alpha(x)$ est de profondeur $K-1$, et l'existence de $\mathfrak{F}(x)$ se déduit directement de (48). Pour établir (49), on considère les trois relations

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(x) &= \log(1/x) - x\mathcal{W}\big(\alpha(x)\big),\\
\mathfrak{F}(x) &= F(x) - \frac{1}{2}\log(1/x) - x\mathfrak{F}\big(\alpha(x)\big),\\
G(x) &= F(x) - xG\big(\alpha(x)\big),
\end{aligned}$$

vérifiées par tous les rationnels $x \in]0,1[$. En posant $h = \mathcal{W} + 2\mathfrak{F} - 2G$, on a

$$h(0) = -2G(0) = -A(1),$$

et

$$h(x) = -xh\big(\alpha(x)\big) \quad (x \in]0,1[\cap\mathbb{Q}).$$

Si $x = p/q$ est de profondeur $K \geqslant 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
h(x) &= (-1)^j\beta_{j-1}(x)h\big(\alpha_j(x)\big) \quad (0 \leqslant j \leqslant K) \quad \text{(par récurrence sur } j\text{)}\\
&= (-1)^K\beta_{K-1}(x)h(0)\\
&= (-1)^{K+1}A(1)/q.
\end{aligned}$$

□

• **Le cas x irrationnel** Dans ce sous-paragraphe, nous notons abusivement $\beta_j(x) = \beta_j$ et $\alpha_j(x) = \alpha_j$ pour $j \geqslant 1$ afin de garantir une meilleure lisibilité. L'itération de l'équation fonctionnelle approchée i) fournit la proposition suivante.

Proposition 22 *Soit $x \in X$ et $K \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ tels que $\beta_K(x)^a v \geqslant C$. On a*

$$\begin{aligned}
&f(x,v) + (-1)^K\beta_K f(\alpha_{K+1}, \beta_K^a v)\\
&\qquad = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{K}(-1)^j\beta_{j-1}\log(1/\alpha_j) + \sum_{j=0}^{K}(-1)^j\beta_{j-1}F(\alpha_j) + \sum_{j=0}^{K}(-1)^j\beta_{j-1}\varepsilon\big(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v\big).
\end{aligned} \tag{50}$$

Démonstration Le cas $K = -1$ est trivial. Le cas $K = 0$ correspond à (47). Maintenant, si (50) est vraie au rang K, et si de plus $v \geqslant C/\beta_{K+1}^a$, alors l'identité (47) appliquée à α_{K+1} et $\beta_K^a v$ nous donne

$$f\big(\alpha_{K+1}, \beta_K^a v\big) + \alpha_{K+1} f\big(\alpha_{K+2}, \beta_{K+1}^a v\big) = -\frac{1}{2}\log(1/\alpha_{K+1}) + F(\alpha_{K+1}) + \varepsilon\big(\alpha_{K+1}, \beta_K^a v\big). \quad (51)$$

En ajoutant (50) et $(-1)^{K+1}\beta_K \times$(51), on obtient bien la relation (50) au rang $K+1$ au lieu de K. □

Proposition 23 *Si $x \in X$, $f(x,v)$ converge lorsque $v \to \infty$ si et seulement si la série $\mathcal{W}(x)$ est convergente. On a alors*

$$\lim_{v\to\infty} f(x,v) = \mathfrak{F}(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x). \quad (52)$$

Démonstration Supposons d'abord que la série $\mathcal{W}(x)$ est convergente. Si $v \geqslant 1$, définissons l'entier $K = K(x,v) \geqslant -1$ par l'encadrement

$$\beta_K^a v \geqslant C > \beta_{K+1}^a v.$$

On a

$$q_{K+2}(x) + q_{K+1}(x) \geqslant \frac{1}{\beta_{K+1}} > (v/C)^{1/a},$$

donc $K(x,v) \to \infty$ quand $v \to \infty$. Maintenant,

$$\begin{aligned}(-1)^K \beta_K f(\alpha_{K+1}, \beta_K^a v) &\ll \beta_K \log(2\beta_K^a v) \\ &\leqslant \beta_K \log(2C/\alpha_{K+1}^a) \\ &\ll \beta_K(x) + \gamma_K(x) \\ &= o(1) \quad (K \to \infty),\end{aligned} \quad (53)$$

puisque la série $\mathcal{W}(x)$ est convergente.

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{K} (-1)^j \beta_{j-1}\varepsilon\big(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v\big) &\ll \sum_{j=0}^{K} \beta_{j-1}\big(\beta_j^a v\big)^{-b} \\ &\leqslant \frac{1}{v^b}\sum_{j=0}^{K} \frac{\beta_{j-1}}{\beta_j^{ab}}.\end{aligned} \quad (54)$$

La série $\sum_{j\geqslant 0}\beta_{j-1}$ est absolument convergente et la suite $\{\beta_j^{-ab}\}_{j\geqslant 0}$ tend vers l'infini en croissant. Un théorème classique de Kronecker (cf. [19]) garantit alors que

$$\sum_{j=0}^{K}\frac{\beta_{j-1}}{\beta_j^{ab}} = o(1/\beta_K^{ab}) \quad (K\to\infty).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{K}(-1)^j\beta_{j-1}\varepsilon\big(\alpha_j,\beta_{j-1}^{a}v\big) &= o(1/(\beta_K^{a}v)^b) \quad (K\to\infty)\\ &= o(1) \quad (v\to\infty).\end{aligned} \tag{55}$$

Par conséquent, la proposition 22 montre que $f(x,v)$ converge lorsque v tend vers l'infini, et a pour limite $-\frac{1}{2}\mathcal{W}(x)+G(x)$.

Pour la réciproque, on suppose que $f(x,v)$ converge lorsque $v\to\infty$. Si $K\geqslant 1$ on pose $v=v(x,K)=C/\beta_K^{a}$, de sorte que $v(x,K)\to\infty$ quand $K\to\infty$. Les estimations (53) et (55) ci-dessus mènent à la conclusion que la série $\mathcal{W}(x)$ converge et a pour somme $-2\mathfrak{F}(x)+2G(x)$.□

4.2.3 Conclusion de la preuve de la proposition 18

La somme partielle $\sum_{n\leqslant v}B_1(nx)/n$ de la série $\varphi_1(x)$ satisfait aux points i), ii) et iii) énoncés dans le paragraphe 4.2.2. En effet, le point ii) est trivial. En ce qui concerne le point iii), on a pour $x\in\mathbb{R}$ et $v\geqslant 1$,

$$\sum_{n\leqslant v}\frac{B_1(nx)}{n}\leqslant\sum_{n\leqslant v}\frac{1}{n}\ll\log(2v).$$

Enfin le point i) est vérifié par la somme partielle de $\varphi_1(x)$ avec les paramètres $a=b=1$ d'après la proposition 19. La conclusion découle donc de la proposition 20.

5 La fonction φ_2 et son comportement local

Soit B_2 la deuxième fonction de Bernoulli définie par

$$B_2(t)=\{t\}^2-\{t\}+\frac{1}{6} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Nous posons pour $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\varphi_2(\lambda)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{B_2(n\lambda)}{n^2}, \tag{56}$$

qui définit une fonction 1-périodique. De l'identité classique $B_2(x) = \int_0^x 2B_1(t)dt + B_2(0)$, nous déduisons

$$\begin{aligned}\varphi_2(\lambda) &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \int_0^{n\lambda} 2B_1(t)dt + B_2(0) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \\ &= 2 \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \int_0^{\lambda} B_1(nu)du + \frac{\zeta(2)}{6} \\ &= 2 \int_0^{\lambda} \sum_{n\geqslant 1} \frac{B_1(nu)}{n} du + \frac{\zeta(2)}{6},\end{aligned}$$

l'interversion des signes $\sum$ et $\int$ dans la dernière égalité résultant de la convergence dans $L^1(0,1)$ de la série $\varphi_1(u)$. Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_2(\lambda) = 2 \int_0^{\lambda} \varphi_1(t)dt + \frac{\zeta(2)}{6}, \tag{57}$$

ce qui constitue la définition pour φ_2 adoptée dans [2]. En particulier, la fonction φ_2 est absolument continue.

Proposition 24 *On a*

$$\varphi_2(\lambda) - \varphi_2(0) = -\Upsilon(\lambda) + 2 \int_0^{\lambda} G(t)dt \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Démonstration

Cela résulte immédiatement de la formule (57) et de la proposition 18. □

Il est intéressant de retrouver partiellement le résultat de la proposition 12 de [2], obtenu alors par des moyens très différents (inversion de Mellin et équation fonctionnelle de la fonction d'Estermann).

Proposition 25 *Soit $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q) = 1$. La fonction φ_2 n'est pas dérivable en r et*

$$\varphi_2\Big(\frac{p}{q} + h\Big) - \varphi_2\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{1}{q}|h| \log|h| + 2\varphi_1(r)h + \big(2\log q - 1 + A(1)\big)|h|/q + o(h) \quad (h \to 0). \tag{58}$$

Démonstration Comme φ_2 est de période 1, on peut supposer que $r \in]0,1]$. Nous avons, d'après la proposition 24,

$$\varphi_2(r+h) - \varphi_2(r) = \Upsilon(r) - \Upsilon(r+h) + 2\int_r^{r+h} G(t)dt.$$

D'après la proposition 10, on a

$$\Upsilon(r) - \Upsilon(r+h) = -\frac{1}{q}|h|\log(1/|h|) - h\mathcal{W}(r) + \frac{2\log q - 1}{q}|h| + o(h) \quad (h \to 0). \tag{59}$$

D'après la proposition 17, on a

$$\int_r^{r+h} G(t)dt = hG(r) + \frac{\operatorname{sgn} h + (-1)^{K+1}}{2} \cdot \frac{A(1)}{q} h + o(h) \quad (h \to 0), \tag{60}$$

où K est la profondeur de r.

En ajoutant (59) et le double de (60), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_2(r+h) - \varphi_2(r) = &-\frac{1}{q}|h|\log(1/|h|) + h\big(2G(r) - \mathcal{W}(r) + (-1)^{K+1}A(1)/q\big) \\ &+ \big(2\log q - 1 + A(1)\big)|h|/q + o(h),\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat, compte tenu de (45). □

Proposition 26 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre de Wilton-Cremer. La fonction φ_2 n'est pas dérivable en λ.*

Démonstration Par 1-périodicité de φ_2, on peut supposer que $\lambda \in]0,1[$. On a d'après la proposition 24,

$$\frac{\varphi_2(\lambda+h) - \varphi_2(\lambda)}{h} = -\frac{\Upsilon(\lambda+h) - \Upsilon(\lambda)}{h} + \frac{2}{h}\int_\lambda^{\lambda+h} G(t)dt.$$

Comme la fonction G est continue en λ (proposition 15), nous avons

$$\frac{\varphi_2(\lambda+h) - \varphi_2(\lambda)}{h} = -\frac{\Upsilon(\lambda+h) - \Upsilon(\lambda)}{h} + 2G(\lambda) + o(1) \quad (h \to 0).$$

Or d'après la proposition 12, le taux d'accroissement de la fonction Υ diverge, ce qui fournit la conclusion attendue. □

Proposition 27 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\{\lambda\}$ est un nombre de Wilton. Alors λ est un point de Lebesgue de φ_1. En particulier φ_2 est dérivable en λ et $\varphi_2'(\lambda) = 2\varphi_1(\lambda)$.*

Démonstration Par 1-périodicité de φ_1 et φ_2, on peut supposer que $\lambda \in]0,1[$. D'après la proposition 18 on a pour $h > 0$

$$\frac{1}{h}\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} \big|\varphi_1(t) - \varphi_1(\lambda)\big|dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} \big|\mathcal{W}(t) - \mathcal{W}(\lambda)\big|dt + \frac{1}{h}\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} \big|G(t) - G(\lambda)\big|dt.$$

Comme la fonction G est continue en λ, λ est un point de Lebesgue de G. Par ailleurs, d'après la proposition 13, λ est également un point de Lebesgue de $\mathcal{W}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{h}\int_{\lambda-h}^{\lambda+h}\bigl|\varphi_1(t)-\varphi_1(\lambda)\bigr|dt = o(1) \quad (h>0, h\to 0). \qquad \square$$

Nous pouvons d'autre part préciser la proposition 7 de [2].

Proposition 28 *Le module de continuité de φ_2 satisfait à*

$$\omega(h,\varphi_2) = h\log 1/h + O(h) \quad (0 < h \leqslant 1).$$

Démonstration Comme la fonction G est bornée sur $[0,1]$, on a

$$\Bigl|\int_x^y G(t)dt\Bigr| = O(h) \quad (0\leqslant x < y \leqslant 1, |x-y|\leqslant h). \tag{61}$$

Puisque $2\varphi_1 = -\mathcal{W} + 2G$ presque partout, on en déduit immédiatement que

$$\omega(h,\varphi_2) = \omega(h,\Upsilon) + O(h) \quad (h>0).$$

La conclusion résulte alors directement de la proposition 14. $\square$

6 Comportement local de la fonction A et fin de la preuve du théorème 1

6.1 Relations entre A, φ_1 et φ_2

Dans ce paragraphe, nous donnons une démonstration élémentaire de la relation (6) :

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\log\lambda + \frac{A(1)+1}{2} - \lambda\int_\lambda^\infty \varphi_1(t)\frac{dt}{t^2}.$$

Pour $\lambda > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\lambda^\infty \sum_{n\leqslant N} \frac{B_1(nt)}{n}\,\frac{dt}{t^2} &= \sum_{n\leqslant N} \int_\lambda^\infty B_1(nt)\frac{d(nt)}{(nt)^2} \\
&= \sum_{n\leqslant N} \int_{\lambda n}^\infty B_1(u)\frac{du}{u^2} \\
&= \int_\lambda^\infty B_1(u)\min(N, \lfloor u/\lambda\rfloor)\frac{du}{u^2} \\
&= \int_\lambda^{\lambda N} B_1(u)\lfloor u/\lambda\rfloor\frac{du}{u^2} + N\int_{\lambda N}^\infty B_1(u)\frac{du}{u^2} \qquad (62) \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^{\lambda N} B_1(u)\frac{du}{u} - \int_\lambda^{\lambda N} B_1(u)\{u/\lambda\}\frac{du}{u^2} + O(1/N\lambda^2) \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^{\lambda N} B_1(u)\frac{du}{u} - \int_\lambda^{\lambda N} \{u\}\{u/\lambda\}\frac{du}{u^2} + \frac{1}{2}\int_\lambda^{\lambda N}\{u/\lambda\}\frac{du}{u^2} + O(1/N\lambda^2), \qquad (63)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la seconde formule de la moyenne pour majorer la deuxième intégrale de (62).

Examinons successivement les trois intégrales figurant dans (63). On a d'abord

$$\int_\lambda^{\lambda N} B_1(u)\frac{du}{u} = \int_\lambda^\infty B_1(u)\frac{du}{u} + O(1/N\lambda). \qquad (64)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\int_\lambda^{\lambda N} \{u\}\{u/\lambda\}\frac{du}{u^2} &= \int_\lambda^\infty \{u\}\{u/\lambda\}\frac{du}{u^2} + O(1/N\lambda) \\
&= A(1/\lambda) - \int_0^\lambda \{u\}\{u/\lambda\}\frac{du}{u^2} + O(1/N\lambda), \qquad (65)
\end{aligned}$$

où la dernière intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda \{u\}\{u/\lambda\}\frac{du}{u^2} &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \{u\}\frac{du}{u} \\
&= 1/\lambda + \frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda \{u\}\frac{du}{u} \\
&= 1/\lambda + \frac{\log\lambda}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda B_1(u)\frac{du}{u}. \qquad (66)
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\int_{\lambda}^{\lambda N} \{u/\lambda\} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\lambda} \int_1^N \{u\} \frac{du}{u^2}$$
$$= c_1/\lambda + O(1/N\lambda), \tag{67}$$

où $c_1 = \int_1^\infty \{u\}/u^2 du$.

En tenant compte de (64), (65), (66) et (67) dans (63), on obtient

$$\int_{\lambda}^{\infty} \sum_{n \leqslant N} \frac{B_1(nt)}{n} \frac{dt}{t^2} = -A(1/\lambda) + \frac{\log \lambda}{2\lambda} + \frac{c_2}{\lambda} + O\big((\lambda^{-1} + \lambda^{-2})/N\big), \tag{68}$$

où

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 + \int_1^\infty B_1(u) \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_1^\infty \{u\} \frac{du}{u^2} \qquad (69)\\ &= 1 + \frac{1}{2} \int_1^\infty \{u\}^2 \frac{du}{u^2} \quad \text{(où l'on a intégré par parties la première intégrale de (69))}\\ &= \frac{A(1)+1}{2}. \end{aligned}$$

Comme la série de fonction périodique $\sum_n B_1(nt)/n$ converge dans $L^1(0,1)$, on peut faire tendre N vers l'infini dans (68) et obtenir ainsi

$$\int_{\lambda}^{\infty} \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2} = -A(1/\lambda) + \frac{\log \lambda}{2\lambda} + \frac{A(1)+1}{2\lambda},$$

d'où l'identité (6) en tenant compte de l'identité $A(\lambda) = \lambda A(1/\lambda)$.

Proposition 29 *On a pour tout $\lambda > 0$,*

$$A(\lambda) = \frac{1}{2} \log(\lambda) + \frac{1 + A(1)}{2} + \frac{\varphi_2(\lambda)}{2\lambda} - \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^3}. \tag{70}$$

Démonstration

Cela résulte de (6) par intégration par parties. □

On déduit immédiatement de la proposition 29 et de l'identité $A(\lambda) = \lambda A(1/\lambda)$ les relations asymptotiques suivantes :

Proposition 30 *On a*

$$A(\lambda) \sim \frac{1}{2} \log \lambda \quad (\lambda \to \infty), \tag{71}$$

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda}{2} \log(1/\lambda) \quad (\lambda \to 0). \tag{72}$$

6.2 Points de dérivabilité

La proposition 29 implique ainsi l'existence d'une fonction f_1 dérivable sur $]0,\infty[$ telle que

$$A(\lambda) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{2\lambda} + f_1(\lambda) \quad (\lambda > 0). \tag{73}$$

En particulier, A et φ_2 ont les mêmes points de dérivabilité sur $]0,\infty[$. Compte tenu des résultats de la section 5, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 31 *Les points de dérivabilité de A sont les nombres de Wilton positifs.*

Compte tenu de la proposition 7, nous avons bien établi le théorème 1.

6.3 Module de continuité

Dans ce paragraphe, nous donnons le comportement asymptotique du module de continuité de la fonction A.

Proposition 32 *On a*

$$\omega(A,h) = \frac{1}{2}h\log(1/h) + O(h) \quad (0 < h \leqslant 1).$$

Les équations fonctionnelles $A(\lambda) = \lambda A(1/\lambda)$ et (70) fournissent la relation

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{2}\log(1/\lambda) + \frac{1+A(1)}{2}\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\varphi_2(1/\lambda) - \int_{1/\lambda}^{\infty}\varphi_2(t)\frac{dt}{t^3}. \tag{74}$$

En particulier, on a

$$A(h) - A(0) = \frac{1}{2}h\log(1/h) + O(h) \quad (0 < h \leqslant 1),$$

ce qui prouve que $\omega(A,h) \geqslant \frac{1}{2}h\log(1/h) + O(h)$ pour $0 < h \leqslant 1$ tend vers 0. Il nous reste à démontrer l'inégalité en sens inverse.

On a

$$\omega(A,h) = \sup_{0<h'\leqslant h} \max\bigl(\omega_0(A,h'), \omega_1(A,h')\bigr),$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_0(A,h) &= \sup_{0<\lambda<1} |A(\lambda+h) - A(\lambda)| \\ \omega_1(A,h) &= \sup_{\lambda\geqslant 1} |A(\lambda+h) - A(\lambda)|. \end{aligned}$$

Commençons par majorer $\omega_1(A,h)$.

Proposition 33 *On a*

$$\omega_1(A,h) \leqslant \frac{1}{2} h \log(1/h) + O(h) \quad (0 < h \leqslant 1).$$

Démonstration

On a, d'après (70) et (73),

$$A(\lambda) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{2\lambda} + f_1(\lambda),$$

avec

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{2}\log\lambda + \frac{1+A(1)}{2} - \lambda \int_\lambda^\infty \varphi_2(t)\frac{dt}{t^3},$$
$$f_1'(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \int_\lambda^\infty \varphi_2(t)\frac{dt}{t^3} + \frac{\varphi_2(\lambda)}{\lambda^2}.$$

En particulier, $f_1'(\lambda) = O(1)$ pour $\lambda \geqslant 1$, donc

$$f_1(\lambda + h) - f_1(\lambda) = O(h) \quad (\lambda \geqslant 1,\ h > 0).$$

Maintenant,

$$\frac{\varphi_2(\lambda+h)}{\lambda+h} - \frac{\varphi_2(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda+h}\big(\varphi_2(\lambda+h) - \varphi_2(\lambda)\big) - \frac{h}{\lambda(\lambda+h)}\varphi_2(\lambda).$$

Le dernier terme est $O(h)$ pour $\lambda \geqslant 1$, $h > 0$. D'autre part,

$$|\varphi_2(\lambda+h) - \varphi_2(\lambda)| \leqslant h\log(1/h) + O(h) \quad (0 < h \leqslant 1)$$

d'après la proposition 28. On a donc

$$|A(\lambda+h) - A(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2(\lambda+h)} h\log(1/h) + O(h) \quad (\lambda \geqslant 1,\ 0 < h \leqslant 1), \tag{75}$$

et en particulier

$$\omega_1(A,h) \leqslant \frac{1}{2} h \log(1/h) + O(h) \quad (0 < h \leqslant 1). \qquad \square$$

Passons maintenant à l'étude de $\omega_0(A,h)$. D'après (74), on a

$$A(\lambda) = \frac{1}{2} f_2(\lambda) + f_3(\lambda),$$

avec

$$f_2(\lambda) = \lambda\log(1/\lambda) + \lambda^2\varphi_2(1/\lambda),$$
$$f_3(\lambda) = \frac{1+A(1)}{2}\lambda - \int_{1/\lambda}^\infty \varphi_2(t)\frac{dt}{t^3},$$
$$f_3'(\lambda) = \frac{1+A(1)}{2} - \lambda\varphi_2(1/\lambda).$$

Comme $f_3'(\lambda) = O(1)$ pour $0 < \lambda \leqslant 2$, on a

$$f_3(\lambda+h) - f_3(\lambda) = O(h) \quad (0 < \lambda \leqslant 1,\ 0 < h \leqslant 1).$$

Pour démontrer la proposition 32, il nous reste donc à montrer la proposition suivante.

Proposition 34 *On a*

$$|f_2(\lambda+h) - f_2(\lambda)| \leqslant h\log(1/h) + O(h) \quad (0 < \lambda \leqslant 1,\ 0 < h \leqslant 1). \tag{76}$$

Démonstration

On a pour $0 < \lambda \leqslant 1$ et $0 < h \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} f_2(\lambda+h) - f_2(\lambda) = &\int_\lambda^{\lambda+h} \bigl(\log(1/t) - 1\bigr)dt + \bigl((\lambda+h)^2 - \lambda^2\bigr)\varphi_2(1/\lambda) \\ &+ (\lambda+h)^2\Bigl(\varphi_2\bigl(1/(\lambda+h)\bigr) - \varphi_2(1/\lambda)\Bigr) \end{aligned}$$

et

$$\Bigl|\int_\lambda^{\lambda+h} \bigl(\log(1/t) - 1\bigr)dt + \bigl((\lambda+h)^2 - \lambda^2\bigr)\varphi_2(1/\lambda)\Bigr| \leqslant h\min\bigl(\log(1/\lambda), \log(1/h)\bigr) + O(h).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Bigl|\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+h}\Bigr| &= \frac{h}{\lambda(\lambda+h)} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \quad (\lambda \geqslant \sqrt{2h}). \end{aligned}$$

Nous allons donc distinguer les deux cas $\lambda \geqslant \sqrt{2h}$ et $\lambda < \sqrt{2h}$.

Si $\lambda \geqslant \sqrt{2h}$, on a

$$\begin{aligned} &(\lambda+h)^2\Bigl|\varphi_2\bigl(1/(\lambda+h)\bigr) - \varphi_2(1/\lambda)\Bigr| \\ &\leqslant (\lambda+h)^2\Bigl(\frac{h}{\lambda(\lambda+h)}\log\Bigl(\frac{\lambda(\lambda+h)}{h}\Bigr) + O\Bigl(\frac{h}{\lambda(\lambda+h)}\Bigr)\Bigr) \\ &= h\Bigl(1 + \frac{h}{\lambda}\Bigr)\bigl(\log(1/h) + 2\log\lambda + \log(1+h/\lambda)\bigr) + O\bigl(h(1+h/\lambda)\bigr) \\ &= h\log(1/h) + 2h\log\lambda + O(h), \end{aligned}$$

donc

$$|f_2(\lambda+h) - f_2(\lambda)| \leqslant h\log(1/h) + h\log\lambda + O(h) \leqslant h\log(1/h) + O(h).$$

Si $\lambda < \sqrt{2h}$, on a

$$(\lambda+h)^2\Bigl|\varphi_2\bigl(1/(\lambda+h)\bigr) - \varphi_2(1/\lambda)\Bigr| = O\bigl((\lambda+h)^2\bigr) = O(h),$$

donc on a encore

$$|f_2(\lambda+h) - f_2(\lambda)| \leqslant h\log(1/h) + O(h). \qquad \square$$

7 Lien formel entre les séries $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$

Le développement en série de Fourier de la fonction B_1 est donné par

$$B_1(t) = \frac{-1}{\pi} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\sin(2\pi m t)}{m},$$

de sorte que l'on a formellement

$$\varphi_1(x) = - \sum_{m,n \geqslant 1} \frac{\sin(2\pi m n x)}{\pi m n} = \psi_1(x).$$

Le problème de donner un sens analytique à cette identité formelle a été plus généralement posé par Davenport ([8], [9]) en 1937 : étant donné un couple de deux fonctions arithmétiques (f, g) liées par la relation

$$f(n) = \sum_{d \mid n} g(d),$$

pour quelles valeurs de x l'identité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{g(n)}{n} B_1(nx) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m \geqslant 1} \frac{f(m)}{m} \sin(2\pi m x)$$

est-elle valide, au sens où les deux sommes sont convergentes et coïncident ? En général, le problème le plus délicat est celui de l'égalité des deux sommes ; il revient à montrer que

$$\Delta(f, v, x) := \sum_{n \leqslant v} \frac{g(n)}{n} B_1(nx) - \frac{1}{\pi} \sum_{m \leqslant v} \frac{f(m)}{m} \sin(2\pi m x) \to 0 \quad (v \to \infty). \tag{77}$$

Davenport traite notamment le cas du couple (δ, μ), où $\delta(n) = [n = 1]$ et μ est la fonction de Möbius. Sa méthode consiste à montrer la relation (77) en étudiant les variations et le comportement en moyenne de $x \mapsto \Delta(f, v, x)$. L'article [4] (pp. 4-5), ainsi que l'introduction de [22] contiennent une description plus précise de la méthode de Davenport et de ses limites.

Dans [4] la Bretèche et Tenenbaum ont traité cette question grâce à la P-sommation. Rappelons ce dont il s'agit.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n (avec la convention $P(1) = 1$). Une série de terme général $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est dite P-sommable si

- pour tout $y \geqslant 1$ la série $\sigma(y) = \sum_{n \geqslant 1} u_n [P(n) \leqslant y]$ converge ;
- la quantité $\sigma(y)$ a une limite quand y tend vers l'infini.

Cette définition apparaît en 1957 au §2 de l'article [11] de Duffin, mais l'étude approfondie de la P-sommation n'a véritablement commencé que 34 ans plus tard avec l'article [13] de Fouvry et Tenenbaum. Cette étude s'appuie sur la connaissance des propriétés statistiques des entiers sans grand facteur premier, acquise depuis l'article fondateur de Dickman [10] jusqu'à nos jours ; le chapitre III.5 de [30] est un exposé pédagogique des résultats les plus importants de cette théorie.

L'approche de la Bretèche et Tenenbaum pour résoudre le problème de Davenport consiste à montrer au préalable la relation asymptotique

$$\nabla(f,v,x) := \sum_{P(n)\leqslant v} \frac{g(n)}{n} B_1(nx) - \frac{1}{\pi} \sum_{P(m)\leqslant v} \frac{f(m)}{m} \sin(2\pi mx) = o(1) \quad (v\to\infty),$$

pour en déduire (77). Nous nous bornerons ici à renvoyer à [4] et [22] pour la description précise de cette méthode, qui fournit de nombreux résultats généraux et permet de traiter complètement les cas emblématiques des couples[‖] $(\log,\Lambda)$ et $(\tau,\mathbb{1})$, ce dernier correspondant précisément à l'identité étudiée dans le présent travail.

Notre méthode consiste à montrer qu'en cas de convergence les sommes $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ sont égales à une même troisième quantité. Pour cela nous avons développé l'idée fondamentale de Wilton dans [35], qui consistait à étudier la somme partielle $\psi_1(x,v) = -\sum_{n\leqslant v}\tau(n)\sin(2\pi nx)/\pi n$ de la série $\psi_1(x)$ via une équation fonctionnelle approchée du type (47) :

$$\psi_1(x,v) + x\psi_1\big(\alpha(x), x^c v\big) = -\frac{1}{2}\log(1/x) + F(x) + o(1) \quad (x\in]0,1], v\to\infty). \tag{78}$$

Nous avons vu au §4.2.1 que la somme partielle $\sum_{n\leqslant v} B_1(nx)/n$ de la série $\varphi_1(x)$ vérifie une équation fonctionnelle approchée de ce type avec $c=1$, où F est définie par (39) ; cette équation fonctionnelle approchée était déjà présente implicitement dans [2], et repose sur le même principe de symétrie que la démonstration géométrique de la loi de réciprocité quadratique. Au §8, nous précisons l'équation fonctionnelle de Wilton, en démontrant (78) avec $c=2$ et une estimation améliorée du terme d'erreur $o(1)$. En outre, notre démonstration est sensiblement plus simple que celle de Wilton.

Ces équations fonctionnelles entraînent (cf. §4.2.2) que le comportement des sommes partielles de $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ suit asymptotiquement – avec toutefois des termes correctifs aux points rationnels– celui de la solution $h(x)$ de l'équation fonctionnelle

$$h(x) + xh\big(\alpha(x)\big) = -\frac{1}{2}\log(1/x) + F(x),$$

qui n'est autre que la fonction $-\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\beta_{k-1}(x)F\big(\alpha_k(x)\big)$.

‖. Conformément à l'usage, Λ désigne la fonction de Von Mangoldt, et $\mathbb{1}(n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

8 Équation fonctionnelle vérifiée par les sommes partielles de $\psi_1(x)$

Rappelons la définition
$$\psi_1(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau(n)}{n}\sin(2\pi n x),$$
où $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$.

Déterminer une équation fonctionnelle approchée pour les sommes partielles de $\psi_1(x)$ est bien plus ardu que pour celles de $\varphi_1(x)$. La raison en est que nous ne disposons pas d'une interprétation géométrique, analogue à celle donnant l'identité de Sylvester pour la fonction partie entière, qui nous permette de relier simplement les sommes
$$\sum_{n\leqslant v}\tau(n)\sin(2\pi n x) \text{ et } \sum_{n\leqslant x^c v}\tau(n)\sin(2\pi n/x),$$
avec une valeur convenable de c.

La méthode développée par Wilton dans [35] repose sur l'utilisation de la formule sommatoire de Voronoï (cf. [33]), employée par ce dernier pour donner une nouvelle démonstration de la majoration
$$\Delta(x) = \sum_{n\leqslant x}\tau(n) - x(\log x + 2\gamma - 1) \ll x^{1/3+\varepsilon}, \tag{79}$$
valable pour tout $\varepsilon > 0$, qu'il avait précédemment obtenue par une méthode élémentaire (cf. [32]). La formule de Voronoï, qui ramène l'étude d'une somme de la forme $\sum_n \tau(n)f(n)$ à une somme similaire où f est remplacée par une certaine transformée intégrale de f, a permis à Wilton de découvrir (essentiellement) la proposition suivante.

Proposition 35 *On a pour $x \in]0,1]$, $v > 0$, $x^2 v \geqslant 2$,*
$$\frac{1}{\pi}\sum_{n\leqslant v}\frac{\tau(n)}{n}\sin(2\pi n x) + \frac{x}{\pi}\sum_{n\leqslant x^2 v}\frac{\tau(n)}{n}\sin(2\pi n/x) = -\frac{1}{2}\log x - F(x) + O\big((x^2v)^{-1/2}\log^2(x^2 v)\big), \tag{80}$$
où F est définie par (39).

La proposition 35 découle du point (2.2) du Theorem 2, p. 223 de [35] (il faut prendre la partie imaginaire de la relation donnée par Wilton), à ceci près que le second membre de (80) y apparaît sous la forme
$$-\frac{1}{2}\log x + \mathfrak{F}(x) + O\big((x^2v)^{-1/5}\big),$$
où $\mathfrak{F}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, non explicitée.

Cela étant, plutôt que d'exposer les détails de la démarche de Wilton, nous avons choisi une autre voie, qui consiste au fond à utiliser la formule sommatoire de Voronoï sous la forme symétrique donnée par Nasim (cf. [23], Main theorem, p. 36). Cependant nous explicitons les détails nécessaires, sans supposer une étude préalable de [23].

Notre approche repose sur : la transformation de Mellin

$$Mf(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt\,, \tag{81}$$

la transformation de Fourier en cosinus

$$\mathfrak{C}f(x) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi tx)dt\,, \tag{82}$$

et quelques propriétés des fonctions cosinus intégral généralisées

$$\mathrm{ci}(a,z) = \int_z^\infty \cos t \cdot t^{a-1}dt\,; \quad \mathrm{Ci}(a,z) = \int_0^z \cos t \cdot t^{a-1}dt \tag{83}$$

(pour ces dernières, nous avons adopté les notations de [25], §8.21, p. 188).

Les trois sous-paragraphes suivants présentent les propriétés de (81), (82) et (83) que nous utilisons au §8.4 pour démontrer (80).

8.1 Rappels sur la transformation de Mellin

Nous recommandons la lecture de l'appendice A (p. 231) de [2] et nous en rappelons ci-dessous les éléments qui nous seront utiles.

En désignant par s la variable complexe, on note $\sigma = \Re s$ et $\tau = \Im s$. Si $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, on note** $\mathcal{W}(a,b)$ l'ensemble des fonctions complexes f mesurables sur $]0,\infty[$ telles que

$$\int_0^\infty |f(t)|t^{\sigma-1}dt < \infty \quad (a < \sigma < b).$$

Si $f \in \mathcal{W}(a,b)$, la transformée de Mellin Mf définie par (81) est holomorphe dans la bande $a < \sigma < b$.

Nous considérons maintenant les transformées de Mellin qui interviennent dans notre argumentation, et rappelons, au §8.1.4, la forme que prend la théorie de Plancherel dans le contexte de la transformation de Mellin.

**. Nous conservons ici cette notation, aucune confusion avec la fonction de Wilton n'étant à craindre.

8.1.1 La fonction A

On sait que $A \in \mathcal{W}(-1, 0)$ et que

$$MA(s) = -\frac{\zeta(-s)\zeta(s+1)}{s(s+1)} \quad (-1 < \sigma < 0)$$

(cf. [2], proposition 10).

On en déduit que la fonction A_1 définie par $A_1(t) = A(t)/t$ $(= A(1/t))$ appartient à $\mathcal{W}(0, 1)$ et que

$$MA_1(s) = \frac{\zeta(1-s)\zeta(s)}{s(1-s)} \quad (0 < \sigma < 1).$$

Comme cette fonction appartient †† à $L^1(\sigma + i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$ pour tout $\sigma \in]0, 1[$, la formule d'inversion de Mellin nous donne

$$A(x) = \int_{\Re s = \frac{1}{2}} \frac{\zeta(1-s)\zeta(s)}{s(1-s)} x^s \frac{d\tau}{2\pi}, \tag{84}$$

où l'égalité, *a priori* valable presque partout, est vraie pour tout $x > 0$ par continuité.

8.1.2 Le reste dans le problème des diviseurs de Dirichlet

Nous utiliserons également l'expression de la transformée de Mellin du reste Δ, défini par (79), dans le problème des diviseurs de Dirichlet. À cette occasion, donnons l'énoncé général d'un principe classique, qui est une réciproque de la proposition 14 de [2].

Proposition 36 *Soit $a < b \leqslant c < d$, $f \in \mathcal{W}(a, b)$, $g \in \mathcal{W}(c, d)$. On suppose que $g - f$ est un polynôme généralisé*

$$P(t) = \sum_{\rho, k} c_{\rho,k} t^{-\rho} \log^k t,$$

où la somme est finie, les ρ sont des nombres complexes vérifiant $b \leqslant \Re\rho \leqslant c$, les k sont des entiers naturels, et les $c_{\rho,k}$ des coefficients complexes. Alors Mf et Mg sont les restrictions aux bandes $a < \sigma < b$ et $c < \sigma < d$, respectivement, d'une même fonction méromorphe dans la bande $a < \sigma < d$, dont la somme des parties polaires est

$$\sum_{\rho, k} c_{\rho,k} \frac{(-1)^k k!}{(s-\rho)^{k+1}}.$$

††. Rappelons que pour $0 < \sigma < 1$, $\tau \geqslant \tau_0$, $\zeta(\sigma + i\tau) \ll \tau^{(1-\sigma)/2} \log(\tau)$ (cf. [17] theorem 1.9 p. 25 par exemple).

Démonstration

En résumé, on va montrer que les fonctions Mf et Mg sont des prolongements méromorphes l'une de l'autre.

On a

$$f(t) + P(t)[t \geqslant 1] = g(t) - P(t)[t < 1]. \tag{85}$$

En notant $h(t)$ la valeur commune des deux membres de (85), on voit que $h \in \mathcal{W}(a, b)$ (premier membre) et $h \in \mathcal{W}(c, d)$ (second membre). On a donc $h \in \mathcal{W}(a, d)$; la transformée de Mellin Mh est holomorphe dans la bande $a < \sigma < d$, et

$$\begin{aligned} Mf(s) &= Mh(s) + \sum_{\rho,k} c_{\rho,k} \frac{(-1)^k k!}{(s-\rho)^{k+1}} \quad (a < \sigma < b), \\ Mg(s) &= Mh(s) + \sum_{\rho,k} c_{\rho,k} \frac{(-1)^k k!}{(s-\rho)^{k+1}} \quad (c < \sigma < d). \end{aligned}$$

□

La proposition 85 s'applique à

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \leqslant t} \tau(n), \\ g(t) &= \Delta(t), \\ P(t) &= -t(\log t + 2\gamma - 1). \end{aligned}$$

On a $f \in \mathcal{W}(-\infty, -1)$, $g \in \mathcal{W}(-1, -1/3)$ (en utilisant l'estimation (79)). Comme

$$\begin{aligned} Mf(s) &= \int_0^\infty \big(\sum_{n \leqslant t} \tau(n) \big) t^{s-1} dt \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \tau(n) \int_n^\infty t^{s-1} dt \\ &= \frac{\zeta^2(-s)}{-s} \quad (\sigma < -1), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$M\Delta(s) = \frac{\zeta^2(-s)}{-s} \quad (-1 < \sigma < -1/3).$$

Par conséquent la fonction Δ_1 définie par $\Delta_1(t) = \Delta(t)/t$ appartient à $\mathcal{W}(0, 2/3)$ et

$$M\Delta_1(s) = \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s} \quad (0 < \sigma < 2/3).$$

8.1.3 La fonction $t \mapsto (\cos t)[t \leqslant v]$

Pour tout $v > 0$, la fonction $t \mapsto (\cos t)[t \leqslant v]$ appartient à $\mathcal{W}(0,\infty)$ et sa transformée de Mellin est $\mathrm{Ci}(s,v)$. Par conséquent la transformée de Mellin de $t \mapsto (\cos 2\pi tx)[t \leqslant v]$ est $(2\pi x)^{-s}\mathrm{Ci}(s, 2\pi xv)$.

8.1.4 La transformation de Mellin-Plancherel sur $L^2(0,\infty)$

Si $f \in L^2(0,\infty)$, la formule (81), où l'intégrale doit être comprise comme $\lim_{T\to\infty}\int_{1/T}^{T}$ dans $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$ définit un élément de cet espace, et l'application ainsi définie, dite transformation de Mellin-Plancherel, est une isométrie bijective entre espaces de Hilbert (cf. par exemple [31] §3.17 pp. 94-95). En particulier, si f et g appartiennent à $L^2(0,\infty)$, on a

$$\int_0^\infty f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_{\sigma=1/2} Mf(s)\overline{Mg(s)}\,\frac{d\tau}{2\pi}$$

(théorème de Plancherel).

Appliquons le théorème de Plancherel à l'intégrale

$$I(x,v) = 2\int_0^v \frac{\Delta(t)}{t}\cos(2\pi tx)dt\,, \tag{86}$$

qui va jouer un rôle essentiel au §8.4. On a

$$\begin{aligned} I(x,v) &= 2\int_0^\infty \Delta_1(t)\cos(2\pi tx)[t \leqslant v]dt \\ &= 2\int_{\Re s=\frac{1}{2}} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s}\overline{\mathrm{Ci}(s,2\pi xv)}(2\pi x)^{s-1}\,\frac{d\tau}{2\pi} \\ &= \int_{\Re s=\frac{1}{2}} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s}\mathrm{Ci}(1-s,2\pi xv)(2\pi x)^{s-1}\,\frac{d\tau}{\pi}. \end{aligned} \tag{87}$$

8.2 Rappels sur la transformation de Fourier en cosinus

Si $f \in L^2(0,\infty)$, la formule (82), où l'intégrale doit être comprise comme $\lim_{T\to\infty}\int_0^T$ dans $L^2(0,\infty)$, définit un élément de cet espace, et l'application $\mathfrak{C}$ ainsi définie est un opérateur unitaire involutif de $L^2(0,\infty)$, dite transformation de Fourier en cosinus.

La démonstration proposée au §8.4 est sous-tendue par le lien existant entre $\mathfrak{C}$ et la transformation de Mellin-Plancherel M sur $L^2(0,\infty)$, lien qui est l'une des nombreuses façons de concevoir l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann :

si $f \in L^2(0,\infty)$, alors

$$M(\mathfrak{C}f)(s) = \frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}Mf(1-s), \tag{88}$$

égalité entre deux éléments de $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$ (c'est-à-dire vraie pour presque tout τ, et $\sigma = \frac{1}{2}$). En effet les deux membres de (88) définissent des isométries de $L^2(0,\infty)$ dans $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$ et coïncident sur les fonctions $t \mapsto [0 \leqslant t \leqslant a]$, dont les combinaisons linéaires constituent une partie dense de $L^2(0,\infty)$.

Comme application de (88), donnons deux relations entre la fonction d'autocorrélation A et le reste dans le problème des diviseurs de Dirichlet.

Proposition 37 *Pour $x > 0$, on a*

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x \mathfrak{C}\Delta_1(t)dt && (89)\\ &= x\mathfrak{C}\Delta_1(x) + \mathfrak{C}\Delta_1(1/x) \quad (p.p.). && (90) \end{aligned}$$

Démonstration

D'après les estimations (79), (71), (72) et le fait que $\mathfrak{C}$ est un opérateur de $L^2(0,\infty)$, les trois fonctions

$$\begin{aligned} &x \mapsto \mathfrak{C}\Delta_1(x)\\ &x \mapsto \big(\mathfrak{C}\Delta_1(1/x)\big)/x\\ &x \mapsto A(x)/x = A_1(x) \end{aligned}$$

appartiennent à $L^2(0,\infty)$. Leurs transformées de Mellin-Plancherel respectives sont

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} M\Delta_1(1-s) = \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s}, \quad \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{1-s} \text{ et } \frac{\zeta(1-s)\zeta(s)}{s(1-s)},$$

et (90) équivaut à l'identité

$$\frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s} + \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{1-s} = \frac{\zeta(1-s)\zeta(s)}{s(1-s)}.$$

Quant à (89), elle découle de l'identité

$$\frac{\zeta(1-s)\zeta(s)}{s(1-s)} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s},$$

qui donne

$$A_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \mathfrak{C}\Delta_1(t)dt \quad (p.p.)$$

(cf. [2], (12), p. 234), et l'égalité presque partout est vraie partout, par continuité. □

Nous verrons au §8.4 que la proposition 35 se ramène pour l'essentiel à une forme précisée de (90), à savoir que pour tout $x > 0$,

$$xI(x,v) + I(1/x, x^2v) \to A(x) \quad (v \to \infty). \tag{91}$$

Nous pouvons déduire de la proposition 37 une expression utile pour la fonction A.

Proposition 38 *Pour $x > 0$, on a*

$$A(x) = \int_0^\infty \Delta(t) \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t^2} dt.$$

Démonstration On a,

$$\int_0^\infty \Delta(t) \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t^2} dt = \int_0^\infty \Delta_1(t) \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t} dt.$$

Comme

$$\frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t} = 2 \int_0^x \cos(2\pi tu)\, du$$

est la transformée de Fourier en cosinus de $u \mapsto [u \leqslant x]$, le théorème de Plancherel (pour $\mathfrak{C}$ sur $L^2(0,\infty)$) nous donne

$$\int_0^\infty \Delta(t) \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t^2} dt = \int_0^x \mathfrak{C}\Delta_1(t) dt. \qquad \square$$

8.3 Estimations des fonctions cosinus intégral généralisées

Nous utiliserons des estimations de

$$\mathrm{ci}(s,v) = \int_v^\infty \cos(t) \cdot t^{s-1} dt\,; \quad \mathrm{Ci}(s,v) = \int_0^v \cos(t) \cdot t^{s-1} dt$$

pour $v > 0$ et $s = \frac{1}{2} + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, ce que nous supposons dans tout ce sous-paragraphe.

Notons pour commencer que Ci est absolument convergente et ci semi-convergente. De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{ci}(s,v) + \mathrm{Ci}(s,v) &= \int_0^\infty \cos(t) \cdot t^{s-1} dt \\ &= \Gamma(s) \cos(\pi s/2) \end{aligned}$$

(cf. [24], §62, (4)). On a donc

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^{-s}\big(\mathrm{ci}(s,v) + \mathrm{Ci}(s,v)\big) &= 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\pi s/2) \\ &= \frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}, \end{aligned} \tag{92}$$

d'après l'équation fonctionnelle de la fonction ζ.

Les estimations que nous utiliserons seront démontrées grâce à la proposition classique suivante, qui découle d'une intégration par parties en écrivant $ge^{if} = (g/f') \cdot f'e^{if}$.

Proposition 39 *Soient $a < b$ deux nombres réels, $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment dérivables telles que g/f' est bien définie et monotone, et qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(t)/g(t)| \geqslant c$. On a alors*

$$\Big| \int_a^b g(t) e^{if(t)} dt \Big| \leqslant \frac{2}{c}.$$

La proposition suivante rassemble les estimations dont nous aurons l'usage pour les fonctions Ci et ci dans la preuve de la proposition 35.

Proposition 40 *Pour $v > 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on a*

$$|\mathrm{Ci}(1/2 + i\tau, v)| \leqslant \min\big(4, 2\sqrt{v}/(|\tau| - v)\big) \quad (|\tau| > v)$$
$$|\mathrm{ci}(1/2 + i\tau, v)| \leqslant \min\big(4, 2\sqrt{v}/(v - |\tau|)\big) \quad (|\tau| < v).$$

Démonstration

Nous donnons la démonstration pour Ci, celle pour ci étant similaire.

On peut supposer $\tau > v > 1$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ci}(1/2 + i\tau, v) &= \int_0^v \frac{\cos t}{\sqrt{t}} t^{i\tau} dt \\ &= \int_0^v \frac{e^{i(t+\tau\log t)}}{2\sqrt{t}} dt + \int_0^v \frac{e^{i(-t+\tau\log t)}}{2\sqrt{t}} dt. \end{aligned} \tag{93}$$

Commençons par la première intégrale. Avec les notations de la proposition 39, on a ici

$$\begin{aligned} g(t) &= t^{-1/2}, \\ f(t) &= t + \tau \log t, \end{aligned}$$

de sorte que

$$f'(t)/g(t) = \sqrt{t} + \tau/\sqrt{t}.$$

Cette fonction est décroissante sur $]0, \tau]$, donc sur $]0, v]$, et on a $|f'(t)/g(t)| \geqslant (\tau + v)/\sqrt{v}$ sur ce dernier intervalle. Par conséquent,

$$\Big| \int_0^v \frac{e^{i(t+\tau\log t)}}{\sqrt{t}} dt \Big| \leqslant \frac{2\sqrt{v}}{\tau + v}. \tag{94}$$

De même,

$$\Big| \int_0^v \frac{e^{i(-t+\tau\log t)}}{\sqrt{t}} dt \Big| \leqslant \frac{2\sqrt{v}}{\tau - v}. \tag{95}$$

En ajoutant (94) et (95), on obtient

$$|\mathrm{Ci}(1/2 + i\tau, v)| \leqslant 2\sqrt{v}/(\tau - v). \tag{96}$$

Si v et τ sont trop proches, on peut améliorer cette inégalité de la façon suivante. Si $\tau \geqslant v+\sqrt{v}$, (96) nous donne

$$|\mathrm{Ci}(1/2+i\tau, v)| \leqslant 2.$$

En revanche, si $\tau - \sqrt{v} < v < \tau$, on a

$$\begin{aligned} |\mathrm{Ci}(1/2+i\tau, v)| &\leqslant |\mathrm{Ci}(1/2+i\tau, \tau-\sqrt{v})| + \int_{\tau-\sqrt{v}}^{v} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &\leqslant 2 + \int_{v-\sqrt{v}}^{v} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &\leqslant 4. \end{aligned}$$

□

8.4 Démonstration de la proposition 35

Pour $x > 0$, $v > 0$, nous posons

$$\psi_1(x, v) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leqslant v} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi n x)$$

(sommes partielles de la série $\psi_1(x)$). La proposition suivante ramène l'étude de $\psi_1(x, v)$ à celle de l'intégrale $I(x, v)$ définie par (86)

Proposition 41 *Pour $x > 0$, $v > 0$, on a*

$$-\psi_1(x, v) = -xI(x, v) + A(x) - \frac{1}{2}(\log x + \log 2\pi - \gamma) + \varepsilon(x, v), \tag{97}$$

où

$$\varepsilon(x, v) = -\int_v^\infty \frac{\sin(2\pi t x)}{\pi t}(\log t + 2\gamma)dt + \frac{\sin(2\pi v x)}{\pi v}\Delta(v) - \int_v^\infty \Delta(t) \frac{\sin(2\pi t x)}{\pi t^2} dt.$$

Démonstration

Nous commençons par effectuer une intégration par parties sur l'expression de $-\psi_1(x, v)$ comme intégrale de Stieltjes :

$$\begin{aligned} -\psi_1(x, v) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n \leqslant v} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi n x) \\ &= \int_0^v \frac{\sin(2\pi t x)}{\pi t} d\big(\sum_{n \leqslant t} \tau(n)\big) \\ &= \int_0^v \frac{\sin(2\pi t x)}{\pi t}(\log t + 2\gamma)dt + \int_0^v \frac{\sin(2\pi t x)}{\pi t} d\Delta(t). \end{aligned} \tag{98}$$

Pour la première intégrale de (98), on a

$$\int_0^v \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t}(\log t + 2\gamma)dt = \int_0^\infty - \int_v^\infty .$$

D'une part, nous posons

$$\varepsilon_1(x,v) = -\int_v^\infty \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t}(\log t + 2\gamma)dt$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t}(\log t + 2\gamma)dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\log(t/2\pi x) + 2\gamma)\frac{\sin t}{t}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log t \frac{\sin t}{t}dt - \frac{(\log x + \log 2\pi - 2\gamma)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt \\ &= -\frac{1}{2}(\log x + \log 2\pi - \gamma), \end{aligned} \tag{99}$$

où l'on a utilisé les valeurs de l'intégrale d'Arndt

$$\int_0^\infty \log t \frac{\sin t}{t}dt = -\frac{\pi\gamma}{2}$$

(cf. [24] §69, (9)) et de celle de Dirichlet

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Passons à la seconde intégrale de (98) :

$$\begin{aligned}\int_0^v \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t}d\Delta(t) &= \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t}\Delta(t)\Big|_0^v - \int_0^v \Delta(t)\Big(-\frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t^2} + 2x\frac{\cos(2\pi tx)}{t}\Big)dt \\ &= \int_0^\infty \Delta(t)\frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t^2}dt - xI(x,v) + \varepsilon_2(x,v), \end{aligned} \tag{100}$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_2(x,v) = \frac{\sin(2\pi vx)}{\pi v}\Delta(v) - \int_v^\infty \Delta(t)\frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t^2}dt.$$

En ajoutant (99) et (100), et en tenant compte de la proposition 38, on obtient bien (97). □

La proposition suivante précise l'assertion (91).

Proposition 42 *Pour $x > 0$, $v > 0$, on a*

$$xI(x,v) + I(1/x, x^2v) = A(x) + \eta(x,v), \tag{101}$$

où

$$\eta(x,v) = -\int_{|\tau|\leqslant V} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s}(2\pi)^{s-1}\mathrm{ci}(1-s,V)(x^s + x^{1-s})\,\frac{d\tau}{\pi} +$$
$$\int_{|\tau|>V} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s}\mathrm{Ci}(1-s, 2\pi xv)(2\pi)^{s-1}(x^s + x^{1-s})\,\frac{d\tau}{\pi} - \int_{|\tau|>V} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s(1-s)} x^s \frac{d\tau}{2\pi}, \tag{102}$$

avec $V = 2\pi xv$.

Démonstration

En utilisant l'identité (87), on a

$$\begin{aligned} xI(x,v) + I(1/x, x^2v) &= \int_{\Re s = \frac{1}{2}} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s}\mathrm{Ci}(1-s, 2\pi xv)(2\pi)^{s-1}(x^s + x^{1-s})\,\frac{d\tau}{\pi} \\ &= \int_{|\tau|\leqslant V} + \int_{|\tau|>V}, \end{aligned}$$

où V est un paramètre positif arbitraire ; cela étant, la proposition 40 nous incite à poser sans attendre $V = 2\pi xv$.

L'intégrale $\int_{|\tau|>V}$ est la deuxième intervenant dans $\eta(x,v)$. Quant à l'intégrale $\int_{|\tau|\leqslant V}$, elle vaut d'après (92)

$$\int_{|\tau|\leqslant V} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s}\Big(\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} - 2(2\pi)^{s-1}\mathrm{ci}(1-s,V)\Big)(x^s + x^{1-s})\,\frac{d\tau}{2\pi} = J_1 - J_2,$$

où

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{|\tau|\leqslant V} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{1-s}(x^s + x^{1-s})\,\frac{d\tau}{2\pi}\,; \\ J_2 &= \int_{|\tau|\leqslant V} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s}(2\pi)^{s-1}\mathrm{ci}(1-s,V)(x^s + x^{1-s})\,\frac{d\tau}{\pi}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{|\tau|\leqslant V} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{1-s} x^s \frac{d\tau}{2\pi} + \int_{|\tau|\leqslant V} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s} x^s \frac{d\tau}{2\pi} \\ &= \int_{|\tau|\leqslant V} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s(1-s)} x^s \frac{d\tau}{2\pi} \\ &= A(x) - \int_{|\tau|>V} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s(1-s)} x^s \frac{d\tau}{2\pi}, \end{aligned}$$

d'après (84). Cela donne bien (101). $\square$

En appliquant (97) aux couples (x,v) et $(1/x, x^2v)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\psi_1(x,v) - x\psi_1(1/x, x^2v)\\
&\qquad = -xI(x,v) + A(x) - \frac{1}{2}(\log x + \log 2\pi - \gamma) + \varepsilon(x,v)\\
&\qquad\quad + x\Big(- x^{-1}I(1/x, x^2v) + A(1/x) - \frac{1}{2}(\log(1/x) + \log 2\pi - \gamma) + \varepsilon(1/x, x^2v)\Big)\\
&\qquad = -xI(x,v) - I(1/x, x^2v) + 2A(x) + \frac{x-1}{2}\log x - \frac{x+1}{2}\big(\log(2\pi) - \gamma\big) +\\
&\qquad\quad + \varepsilon(x,v) + x\varepsilon(1/x, x^2v)\\
&\qquad = -\frac{1}{2}\log x - F(x) + \varepsilon(x,v) + x\varepsilon(1/x, x^2v) - \eta(x,v),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (101) et la définition (39) de la fonction F.

Pour conclure la démonstration de la proposition 35, il nous reste à estimer les fonctions ε et η. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 43 *Pour* $0 < x < 1$ *et* $x^2v \geqslant 2$, *on a*

$$\varepsilon(x,v) + x\varepsilon(1/x, x^2v) \ll (x^2v)^{-1/2}.$$

Démonstration

Nous commençons par estimer $\varepsilon(x,v)$ sous la seule hypothèse $v \geqslant 2$. Rappelons que

$$\varepsilon(x,v) = -\int_v^\infty \frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t}(\log t + 2\gamma)dt + \frac{\sin(2\pi vx)}{\pi v}\Delta(v) - \int_v^\infty \Delta(t)\frac{\sin(2\pi tx)}{\pi t^2}dt.$$

Par le second théorème de la moyenne, la première intégrale est $\ll (\log v)/xv$. En utilisant l'estimation de Dirichlet $\Delta(v) \ll v^{1/2}$, on voit que les autres termes sont $\ll v^{-1/2}$.

On en déduit, si $0 < x < 1$ et $x^2v \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x,v) + x\varepsilon(1/x, x^2v) &\ll (\log v)/xv + v^{-1/2} + x\log(x^2v)/xv + x(x^2v)^{-1/2}\\
&\ll (x^2v)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 44 *Pour* $0 < x < 1$ *et* $x^2v \geqslant 2$, *on a*

$$\eta(x,v) \ll (x^2v)^{-1/2}\log^2(x^2v).$$

Démonstration

Pour $0 < x < 1$ et $x^2 v \geqslant 2$, on a $V = 2\pi x v > 12$. En utilisant la proposition 40, on voit sur la définition (102) de $\eta(x, v)$ que

$$\eta(x,v) \ll x^{1/2} \int_0^\infty \frac{|\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)|^2}{1+\tau} \min(1, V^{1/2}\big|V-\tau\big|^{-1}) d\tau. \tag{103}$$

Une estimation du type

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau\right) \ll (1+|\tau|)^\delta$$

(cf. par exemple le corollaire 3.7, p. 234 de [30]) conduit à

$$\int_0^\infty \frac{|\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)|^2}{1+\tau} \min(1, V^{1/2}\big|V-\tau\big|^{-1}) d\tau \ll V^{2\delta-1/2} \log V,$$

ce qui fournit un terme d'erreur admissible dans (47) dès que $\delta < 1/4$. Cependant, on aboutit à un meilleur résultat en utilisant une estimation des fonctions $I_2(T)$ et $E(T)$ définies par

$$I_2(T) = \int_0^T |\zeta(1/2+i\tau)|^2 d\tau = T\log T - (\log 2\pi + 1 - 2\gamma)T + E(T) \quad (T > 0).$$

La fonction $E(T)$ est l'objet d'une abondante littérature (cf. par exemple [17], chapters 4, 15) ; nous nous contenterons de l'estimation classique d'Ingham : $E(T) \ll T^{1/2}\log T$ pour $T \geqslant 2$ (cf. [16], Theorem A', p. 294).

La contribution de l'intervalle $|\tau - V| \leqslant \sqrt{V}$ à l'intégrale de (103) est

$$\begin{aligned} &\ll V^{-1} \int_{V-\sqrt{V}}^{V+\sqrt{V}} |\zeta(1/2+i\tau)|^2 d\tau \\ &\ll V^{-1/2} \log V, \end{aligned}$$

d'après l'estimation d'Ingham.

La contribution des $\tau \geqslant 2V$ est

$$\begin{aligned} &\ll V^{1/2} \int_{2V}^\infty \frac{|\zeta(1/2+i\tau)|^2}{\tau^2} d\tau \\ &\ll V^{-1/2} \log V, \end{aligned}$$

en utilisant simplement l'estimation $I_2(T) \ll T\log T$ pour $T \geqslant 2$ et une intégration par parties.

De même la contribution des $\tau \leqslant V/2$ est

$$\begin{aligned} &\ll V^{-1/2} \int_0^{V/2} \frac{|\zeta(1/2+i\tau)|^2}{1+\tau} d\tau \\ &\ll V^{-1/2} \log^2 V. \end{aligned}$$

Maintenant, la contribution de l'intervalle $V+\sqrt{V}<\tau<2V$ est

$$\begin{aligned}
&\ll V^{-1/2}\int_{V+\sqrt{V}}^{2V}\frac{|\zeta(1/2+i\tau)|^2}{\tau-V}d\tau\\
&\leqslant V^{-1/2}\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{V}}\frac{1}{k\sqrt{V}}\int_{V+k\sqrt{V}}^{V+(k+1)\sqrt{V}}|\zeta(1/2+i\tau)|^2d\tau\\
&\ll V^{-1/2}(\log V)\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{V}}\frac{1}{k}\quad\text{(d'après l'estimation d'Ingham)}\\
&\ll V^{-1/2}\log^2 V,
\end{aligned}$$

et on a encore la même estimation pour la contribution de l'intervalle $V/2<\tau<V-\sqrt{V}$.

En conclusion, on a pour $0<x\leqslant 1$ et $x^2v\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\eta(x,v)&\ll x^{1/2}\cdot\frac{\log^2(xv)}{\sqrt{xv}}\\
&\ll\frac{\log^2(x^2v)}{\sqrt{x^2v}}.
\end{aligned}$$

□

9 Conclusion de la preuve du théorème 2

D'après la proposition 18, la série $\varphi_1(x)$ converge si seulement la série $\mathcal{W}(x)$ converge, et dans ce cas,

$$\varphi_1(x)=-\frac{1}{2}\mathcal{W}(x)+G(x)+\delta(x).$$

Par ailleurs la somme partielle $\psi_1(x,v)$ de la série $\psi_1(x)$ satisfait aux points i), ii) et iii) énoncés dans le paragraphe 4.2.2. En effet, le point i) avec les paramètres $a=2$, $b=1/2-\varepsilon$ (quel que soit $\varepsilon>0$) résulte de la proposition 35. Le point ii) est trivial. En ce qui concerne le point iii), on dispose de la majoration de Walfisz (cf. [34], (25_{VI}), p. 566)

$$\sum_{n\leqslant v}\frac{\tau(n)}{n}\sin(2\pi nx)=\sum_{m\leqslant v}\frac{1}{m}\sum_{k\leqslant v}\frac{1}{k}\sin(2\pi kmx)\ll\log(v)$$

uniformément pour $x\in\mathbb{R}$ et $v\geqslant 2$.

On obtient donc, d'après la proposition 20, que les séries $\psi_1(x)$ et $\mathcal{W}(x)$ convergent simultanément et qu'en cas de convergence on a

$$\psi_1(x)=-\frac{1}{2}\mathcal{W}(x)+G(x)+\delta(x).$$

Cela achève la preuve du théorème 2.

Remerciements

Outre leurs laboratoires respectifs, les auteurs remercient les institutions ayant favorisé leur travail sur cet article : le laboratoire franco-russe Poncelet (CNRS, Université Indépendante de Moscou), et l'Institut Mittag-Leffler (Djursholm).

Références

[1] C. Aistleitner, I. Berkes et K. Seip – « Gcd sums from Poisson integrals and systems of dilated functions », *http ://arxiv.org/abs/1210.0741*.

[2] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias – « Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » », *Ramanujan J.* **9** (2005), p. 215–240.

[3] M. Balazard et B. Martin – « Comportement local moyen de la fonction de Brjuno », *Fund. Math.* **218** (2012), p. 193–224.

[4] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum – « Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques », *J. Anal. Math.* **92** (2004), p. 1–79.

[5] X. Buff et A. Chéritat – « The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks », *Ann. of Maths.* **164** (2006), p. 265–312.

[6] H. S. Carslaw et G. H. Hardy – « Obituary : John Raymond Wilton », *J. London Math. Soc.* **20** (1945), p. 58–64.

[7] A. Cayley – « Eisenstein's geometrical proof of the fundamental theorem for quadratic residues », *Quarterly J. pure appl. Maths* **1** (1857), p. 186–192.

[8] H. Davenport – « On some infinite series involving arithmetical functions (I) », *Quart. J . Math. Oxford* **8** (1937), p. 8–13.

[9] — , « On some infinite series involving arithmetical functions (II) », *Quart. J . Math. Oxford* **8** (1937), p. 313–320.

[10] K. Dickman – « On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude », *Ark. Math. Astr. Fys.* **22** (1930), p. 1–14.

[11] R. J. Duffin – « Representation of Fourier integrals as sums. III », *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), p. 272–277.

[12] G. Eisenstein – « Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste. », *J. Reine Angew. Math.* **28** (1844), p. 246–248.

[13] É. Fouvry et G. Tenenbaum – « Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmetiques », *Proc. London Math. Soc. (3)* **63** (1991), no. 3, p. 449–494.

[14] C. F. Gauss – « Theorematis arithmetici demonstratio nova », *Comm. Soc. regiae Sci. Gottingensis Class. Math.* **16** (1808), p. 69–74.

[15] G. H. Hardy et J. E. Littlewood – « Some problems of diophantine approximation », *Acta Math.* **37** (1914), p. 155–239.

[16] A. E. Ingham – « Mean-value theorems in the theory of the Riemann Zeta-function », *Proc. London Math. Soc. (2)* **27** (1927), p. 273–300.

[17] A. Ivić – *The Riemann zeta-function*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003.

[18] S. Jaffard – « On Davenport expansions », Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot. Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 72, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 273–303.

[19] L. Kronecker – « Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes », *C.R.A.S. Paris* **103** (1887), p. 980–987.

[20] E. Landau – « Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel. », *Gott. Nachr.* (1924), p. 202–206.

[21] S. Marmi, P. Moussa et J.-C. Yoccoz – « The Brjuno functions and their regularity properties », *Comm. Math. Phys.* **186** (1997), p. 265–293.

[22] B. Martin – *Contribution à la théorie des entiers friables*, Thèse, Université de Lorraine, 2005, disponible sur *tel.archives-ouvertes.fr*.

[23] C. Nasim – « On the summation formula of Voronoi », *Trans. Amer. Math. Soc.* **163** (1972), p. 35–45.

[24] N. Nielsen – *Handbuch der Theorie der Gammafunktionen.*, B. G. Teubner, Leipzig, 1906.

[25] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert et C. W. Clark (éds.) – *NIST handbook of mathematical functions*, U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, DC, 2010.

[26] T. Rivoal et J. Roques – « Convergence and modular type properties of a twisted riemann series », *Uniform Distribution Theory* **8** (2013), p. 97–119.

[27] C. Ryll-Nardzewski – « On the ergodic theorems. II. Ergodic theory of continued fractions », *Studia Math.* **12** (1951), p. 74–79.

[28] J. Schoissengeier – « On the convergence of a series of Bundschuh », *Unif. Distrib. Theory* **2** (2007), no. 1, p. 107–113.

[29] J. J. Sylvester – « Sur la fonction $E(x)$ », *C.R.A.S. Paris* **50** (1860), p. 732–734.

[30] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3e éd., Belin, Paris, 2008.

[31] E. C. Titchmarsh – *Introduction to the theory of Fourier integrals*, third éd., Chelsea Publishing Co., New York, 1986.

[32] G. Voronoï – « Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques », *J. reine angew. Math* **126** (1903), p. 241–282.

[33] G. Voronoï – « Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **21** (1904), p. 207–267, 459–533.

[34] A. Walfisz – « Über einige trigonometrische Summen », *Math. Z.* **33** (1931), p. 564–601.

[35] J. Wilton – « An approximate functional equation with applications to a problem of diophantine approximation », *J. reine angew. Math* **169** (1933), p. 219–237.

BALAZARD, Michel
Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS, Université de la Méditerranée
Campus de Luminy, Case 907
13288 Marseille Cedex 9
FRANCE
Adresse électronique : `balazard@iml.univ-mrs.fr`

MARTIN, Bruno
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
CNRS, Université du Littoral Côte d'Opale
50 rue F. Buisson, BP 599
62228 Calais Cedex
FRANCE
Adresse électronique : `martin@lmpa.univ-littoral.fr`