RÉSULTAT OMÉGA POUR LE RESTE DE LA FONCTION SOMMATOIRE DU NOMBRE DE DIVISEURS

1. Notations et définitions

(1) Pour x réel on écrit $e(x) = e^{2\pi i x}$.

(2) Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\|x\|$ la distance entre x et $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\|x\| = \inf\{|x-n|\,;n \in \mathbb{Z}\}$.

(3) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions. On écrit

$$f = \Omega_+(g)$$

s'il existe une constante $c > 0$ et une suite (x_n) croissant strictement vers l'infini telles que

$$f(x_n) > cg(x_n) \forall n \geq 1;$$

on écrit $f = \Omega(g)$ si $|f| = \Omega_+(g)$. C'est donc la négation de $f = o(g)$. On écrit

$$f = \Omega_-(g)$$

s'il existe une constante $c > 0$ et une suite (x_n) tendant vers l'infini telles que

$$f(x_n) < -cg(x_n) \forall n \geq 1.$$

(4) Pour tout entier $n \geq 1$ on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n ; ainsi

$$d(n) = \sum_{k|n} 1.$$

On écrit

$$D(x) := \sum_{n \leq x} d(n) \tag{1.1}$$

pour tout réel $x \geq 0$ ($D(x) = 0$ pour $x < 1$).

2. Terme principal

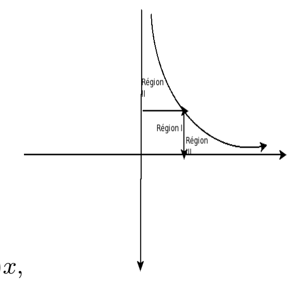
Si l'on dévéloppe la somme (1.1) on voit que

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{n \leq x} \sum_{k|n} 1 \\ &= \sum_{mn \leq x} 1, \end{aligned}$$

d'où l'on voit que $D(x)$ compte le nombre de points du réseau $\mathbb{Z}^2$ dans le premier quadrant sous l'hyperbole $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = x\}$. On divise cette région en trois parties, Région I qui est le carré $\{(x_1, x_2) : 1 \leq x_1, x_2 \leq \sqrt{x}\}$ qui contient $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2$ points du réseau $\mathbb{Z}^2$, et Région II= $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 < \sqrt{x}, \sqrt{x} < x_2 \leq x/x_1\}$, Région

III= $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_2 < \sqrt{x}, \sqrt{x} < x_1 \leq x/x_2\}$ qui contiennent toutes les deux $\sum_{n \leq \sqrt{x}, \sqrt{x} < m \leq x/n} 1 = \sum_{n \leq \sqrt{x}} (\lfloor \frac{x}{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor)$ points du réseau $\mathbb{Z}^2$. Donc la somme vaut

$$\begin{aligned}
D(x) &= \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 + 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} (\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor) \\
&= 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \\
&= 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \big(\frac{x}{n} + O(1) \big) - (\sqrt{x} + O(1))^2 \\
&= 2x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} + O(\sqrt{x}) - x + O(\sqrt{x}) \\
& \quad 2x(\log \sqrt{x} + \gamma + O(\frac{1}{\sqrt{x}})) - x + O(\sqrt{x}) \\
&= x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$



De cette manière on voit que, si l'on définit $\Delta(x) := D(x) - x \log x - (2\gamma - 1)x$,

$$\Delta(x) = O(\sqrt{x})$$

ce qui est une majoration de $\Delta(x)$.

3. Résultats Omégas

On se demande si $\Delta(x)$ peut devenir arbitrairement grand. En effet Hardy a montré dans [GHH] que

$$\Delta(x) = \Omega_+((x \log x)^{\frac{1}{4}} \log \log x)$$

et

$$\Delta(x) = \Omega_-(x^{\frac{1}{4}}).$$

Hafner a amélioré ce résultat dans [JLH] en montrant que

$$\Delta(x) = \Omega_+\big((x \log x)^{\frac{1}{4}} (\log \log x)^{\frac{3+2\log 2}{4}} \exp(-c\sqrt{\log \log \log x}) \big) \tag{3.1}$$

pour une certaine constante $c > 0$.

Dans cet exposé on va montrer une amélioration de (3.1) donnée par K. Soundararajan dans [KSr], où il a montré que

$$\Delta(x) = \Omega\big((x \log x)^{\frac{1}{4}} (\log \log x)^{\frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}} - 1)} (\log \log \log x)^{-\frac{5}{8}} \big)$$

en utilisant la série tronquée de Voronoï pour $\Delta(x)$, à savoir

$$\Delta(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X^3} \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}) + O(X^{\epsilon}) \forall X \leq x \leq X^3$$

pour X grand. L'idée de Soundararajan consiste à donner une minoration omégatique pour les séries de la forme

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cos(2\pi\lambda_n x + \beta)$$

où $f(n) \geq 0$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$, qui est effectivement la forme que prend la série de Voronoï pour $\Delta(x)$. On suppose désormais que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ et $\sum_n f(n) < +\infty$.

4. Le Lemme principal

Lemma 1. *Soient $L \geq 2, N \geq 1$ deux entiers et $\mathcal{M}$ un ensemble de M entiers tel que $\lambda_m \in [\frac{\lambda_N}{2}, \frac{3\lambda_N}{2}]$ pour tout $m \in \mathcal{M}$. Alors pour tout réel $X \geq 2$ il existe un point $x \in \left[\frac{X}{2}, (6L)^{M+1}X\right]$ tel que*

$$|F(x)| \geq \frac{1}{8}\sum_{m\in\mathcal{M}} f(m) - \frac{1}{L-1}\sum_{n,\lambda_n\leq 2\lambda_N} f(n) - \frac{4}{\pi^2 X\lambda_N}\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Démonstration. Soit $K(u) := \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2$ le noyau de Fejér, alors on rappelle que $k(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} K(u)e(-uy)du = \max(1-|y|, 0)$. Considérons l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_N K(\lambda_N u)e(-\lambda_N u)F(x+u)du &= \frac{e^{i\beta}}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)e(\lambda_n x)k\left(\frac{\lambda_N-\lambda_n}{\lambda_N}\right) \\ &=: e^{i\beta}g(x), \end{aligned}$$

vu que $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et que $k\left(\frac{\lambda_N+\lambda_n}{\lambda_N}\right) = 0$. Soit $F_1(x)$ la partie réelle de $g(x)$, ainsi

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cos(2\pi\lambda_n x)k\left(\frac{\lambda_N-\lambda_n}{\lambda_N}\right) \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_N K(\lambda_N u)\,|F(x+u)|\,du \\ &\leq \int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} \lambda_N K(\lambda_N u)\,|F(x+u)|\,du + \int_{|u|>\frac{X}{2}} \lambda_N K(\lambda_N u)\,|F(x+u)|\,du. \end{aligned}$$

Maintenant, on a $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \pi$, donc $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_N K(\lambda_N u)du = 1$ d'où l'on obtient

$$\begin{aligned} F_1(x) &\leq \max_{|u|\leq\frac{X}{2}} |F(x+u)| + \int_{|u|>\frac{X}{2}} \frac{1}{\lambda_N \pi^2 u^2}\sum_n f(n)du \\ &\leq \max_{|u|\leq\frac{X}{2}} |F(x+u)| + \frac{4}{\pi^2\lambda_N X}\sum_n f(n). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donc pour trouver une bonne minoration de $F(x)$, il nous suffira de trouver une grande valeur de F_1. Par le théorème d'approximation de Dirichlet on peut trouver un $x_0 \in$

$[X,(6L)^M X]$ tel que $\|x_0\lambda_m\| \leq \frac{1}{6L} \forall m \in \mathcal{M}$. [1] Considérons la somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=-L}^{L} F_1(nx_0)k(\frac{n}{L}) &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} f(r)k\left(\frac{\lambda_N-\lambda_r}{\lambda_N}\right)\sum_{n=-L}^{L}\cos(2\pi\lambda_r n x_0)k(\frac{n}{L}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} f(r)k\left(\frac{\lambda_N-\lambda_r}{\lambda_N}\right)\frac{1}{L}\left(\frac{\sin(\pi L\lambda_r x_0)}{\sin(\pi\lambda_r x_0)}\right)^2\end{aligned}$$

comme $f(r) \geq 0 \forall r$ on constate que tous les termes sont positifs ; maintenant pour $r \in \mathcal{M}$, on a $\cos(2\pi\lambda_r n x_0) = \cos(2\pi n \|\lambda_r x_0\|) \geq \cos(\frac{2\pi n}{6L}) \geq \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, de sorte que $\sum_{n=-L}^{L}\cos(2\pi\lambda_r n x_0)k(\frac{n}{L}) \geq \frac{L}{2}$ pour chaque $r \in \mathcal{M}$. Donc on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=-L}^{L} F_1(nx_0)k(\frac{n}{L}) &\geq \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathcal{M}} f(r)k\left(\frac{\lambda_N-\lambda_r}{\lambda_N}\right)\frac{L}{2} \\ &\geq \frac{L}{8}\sum_{r\in\mathcal{M}} f(r)\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que $\lambda_r \in \left[\frac{\lambda_N}{2}, 3\frac{\lambda_N}{2}\right] \forall r \in \mathcal{M}$. Comme $F_1(nx_0) = F_1(-nx_0)$ on peut écrire

$$F_1(0) + 2\sum_{n=1}^{L-1} F_1(nx_0)k(\frac{n}{L}) \geq \frac{L}{8}\sum_{r\in\mathcal{M}} f(r);$$

comme $\frac{1}{L-1}\sum_{n=1}^{L-1} F_1(nx_0)k(\frac{n}{L})$ est la moyenne de $F_1(nx_0), n = 1, ..., L-1$ il existe au moins un $n_0, 1 \leq n_0 \leq L-1$ tel que $F_1(n_0x_0)k(\frac{n_0}{L}) \geq \frac{1}{L-1}\sum_{n=1}^{L-1} F_1(nx_0)$, donc

$$\begin{aligned}F_1(n_0x_0) &\geq \frac{L}{8(L-1)}\sum_{r\in\mathcal{M}} f(r) - \frac{1}{L-1}F_1(0) \\ &\geq \frac{1}{8}\sum_{r\in\mathcal{M}} f(r) - \frac{1}{L-1}\sum_{n,\lambda_n\leq 2\lambda_N} f(n).\end{aligned}$$

Un utilisant cette inégalité dans (4.1) on obtient

$$\max_{|u|\leq\frac{X}{2}} |F(n_0x_0+u)| \geq \frac{1}{8}\sum_{r\in\mathcal{M}} f(r) - \frac{1}{L-1}\sum_{n,\lambda_n\leq 2\lambda_N} f(n) - \frac{4}{\pi^2\lambda_N X}\sum_n f(n); \tag{4.2}$$

donc pour un certain x avec $-\frac{X}{2} + n_0x_0 \leq x \leq n_0x_0 + \frac{X}{2}$ on a

$$|F(x)| \geq \frac{1}{8}\sum_{r\in\mathcal{M}} f(r) - \frac{1}{L-1}\sum_{n,\lambda_n\leq 2\lambda_N} f(n) - \frac{4}{\pi^2\lambda_N X}\sum_n f(n);$$

comme $X \leq x_0 \leq (6L)^M X$ et $1 \leq n_0 \leq L-1 < L$ on a $X \leq n_0x_0 \leq L(6L)^M X$ donc $\frac{X}{2} \leq x \leq L(6L)^M X + \frac{X}{2} < (6L)^{M+1}M$ et la démonstration est achevé.

□

1. **Théorème d'approximation de Dirichlet :** *Étant donné n réels $\alpha_1, ..., \alpha_n$ et un entier positif N, on peut trouver n entiers relatifs $p_1, ..., p_n$ et un entier positif $q \leq N$ tels que $\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{1}{qN^{\frac{1}{n}}}$ pour tout $i = 1, ..., n$.*

5. Application du lemme

On fixe $\epsilon > 0$; on a, pour $X \geq 2$

$$\Delta(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X^3} \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}) + O(X^{\epsilon}) \forall X \leq x \leq X^3$$

donc $\forall \sqrt{X} \leq x \leq X^{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} \Delta(x^2) &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq X^3} \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos(4\pi\sqrt{n}x - \frac{\pi}{4}) + O(X^{\epsilon}) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\pi\sqrt{2}} F(x) + O(X^{\epsilon}) \end{aligned}$$

où $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cos(2\pi\lambda_n x + \beta)$, où $f(n) = \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}}$ pour $n \leq X^3$, $f(n) = 0$ pour $n > X^3$, $\lambda_n = 2\sqrt{n} \forall n$ et $\beta = -\frac{\pi}{4}$.

Démonstration. Soient L, M, N trois entiers tels que $(6L)^{M+1} \leq \sqrt{X}$ et $\mathcal{M}$ une partie de $\left[\frac{N}{4}, \frac{9N}{4}\right]$ de cardinal M. Alors notre lemme garantit l'existence d'un $x \in \left[\frac{X}{2}, X^{\frac{3}{2}}\right]$ tel que

$$\begin{aligned} |F(x)| &\geq \frac{1}{8} \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{d(m)}{m^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{L-1} \sum_{n, \lambda_n \leq 2\lambda_N} \frac{d(m)}{m^{\frac{3}{4}}} - \frac{4}{\pi^2 X \lambda_N} \sum_{n \leq X^3} \frac{d(m)}{m^{\frac{3}{4}}} \\ &\geq \frac{1}{18N^{\frac{3}{4}}} \sum_{m \in \mathcal{M}} d(m) - \frac{1}{L-1} \sum_{n \leq 4N} \frac{d(m)}{m^{\frac{3}{4}}} - \frac{2}{\pi^2 X \sqrt{N}} \sum_{n \leq X^3} \frac{d(m)}{m^{\frac{3}{4}}}. \end{aligned}$$

On a la formule

$$\sum_{n \leq y} \frac{d(n)}{n^{\alpha}} = \frac{y^{1-\alpha} \log y}{1-\alpha} + \zeta(\alpha)^2 + O(y^{1-\alpha})$$

pour $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Donc

$$-\frac{1}{L-1} \sum_{n \leq 4N} \frac{d(m)}{m^{\frac{3}{4}}} = O(\frac{N^{\frac{1}{4}} \log N}{L})$$

et

$$\frac{2}{\pi^2 X \sqrt{N}} \sum_{n \leq X^3} \frac{d(m)}{m^{\frac{3}{4}}} = O(\frac{\log X}{X^{\frac{1}{4}}})$$

donc

$$|F(x)| \geq \frac{1}{18N^{\frac{3}{4}}} \sum_{m \in \mathcal{M}} d(m) + O(\frac{N^{\frac{1}{4}} \log N}{L} + \frac{\log X}{X^{\frac{1}{4}}}).$$

Maintenant, on choisit $L = (\log\log X)^{10}$ et soit $\lambda > 0$. Jusqu'à maintenant l'ensemble $\mathcal{M}$ est arbitraire ; on va maintenant choisir ses éléments pour que la somme $\sum_{m \in \mathcal{M}} d(m)$ soit assez grand, de la façon suivante : $\mathcal{M}$ est l'ensemble composé de tous les entiers m dans $\left[\frac{N}{4}, \frac{9N}{4}\right]$ qui ont exactement $r := \lfloor \lambda \log\log N \rfloor$ facteurs premiers distincts, de sorte que [2]

$$\begin{aligned} M &= |\mathcal{M}| \asymp \frac{N}{\log N} \cdot \frac{(\log\log N)^{\lfloor \lambda \log\log N \rfloor - 1}}{(\lfloor \lambda \log\log N \rfloor - 1)!} \\ &\asymp \frac{N}{\sqrt{\log\log N}} (\log N)^{\lambda - 1 - \lambda \log \lambda} \end{aligned}$$

2. *On a* $|\{n \leq x; \omega(n) = k\}| \asymp \frac{x}{\log x} \cdot \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}$ *lorsque* $x \to \infty$.

où nous avons utilisé la formule de Stirling $k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$. En choisissant $N = c\log X(\log\log X)^{1-\lambda+\lambda\log\lambda}(\log\log\log X)^{-}$
avec c assez petit pour garantir $(6L)^{M+1} \leq \sqrt{X}$, on a montré l'existence d'un $x \in \left[\frac{X}{2}, X^{\frac{3}{2}}\right]$
tel que

$$\begin{aligned}
|F(x)| \quad &\gg \quad \frac{1}{N^{\frac{3}{4}}} M(2^r) + O\left(\frac{N^{\frac{1}{4}}}{(\log\log X)^9} + 1\right) \\
&\gg \quad \frac{M(\log N)^{\lambda\log 2}}{N^{\frac{3}{4}}} + O\left(\frac{N^{\frac{1}{4}}}{(\log\log X)^9} + 1\right) \\
&\gg \quad \frac{(\log X)^{\frac{1}{4}}}{(\log\log\log X)^{\frac{5}{8}}} (\log\log X)^{\lambda\log 2 + \frac{3}{4}(\lambda - 1 - \lambda\log\lambda)} + O((\log X)^{\frac{1}{4}} (\log\log X)^{\frac{(1-\lambda+\lambda\log\lambda)}{4} - 9};
\end{aligned}$$

la quantité $\lambda\log 2 + \frac{3}{4}(\lambda - 1 - \lambda\log\lambda)$ étant maximale quand $\lambda = 2^{\frac{4}{3}}$ on voit que

$$|F(x)| \gg \frac{(\log X)^{\frac{1}{4}}}{(\log\log\log X)^{\frac{5}{8}}} (\log\log X)^{\frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}}-1)} + O((\log X)^{\frac{1}{4}} (\log\log X)^{\frac{(1-2^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{4}{3}}\frac{4}{3}\log 2)}{4} - 9}$$

d'où on obtient

$$\Delta(x^2) \quad \gg \quad \sqrt{x} \frac{(\log X)^{\frac{1}{4}}}{(\log\log\log X)^{\frac{5}{8}}} (\log\log X)^{\frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}}-1)}$$

donc

$$\Delta(x) = \Omega\big((x\log x)^{\frac{1}{4}} (\log\log x)^{\frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}}-1)} (\log\log\log x)^{-\frac{5}{8}}\big),$$

et la démonstration est achevée.

□

Références

[JLH] J.L. Hafner, *New omega results for two classical lattice point problems,* Invent. Math. 63 (1981), 181-186.

[GHH] G.H. Hardy, *On Dirichlet's divisor problem*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 15 (1916), 1-25.

[KSr] K. Soundararajan, *Omega results for the divisor and circle problems,* Int. Math. Res. Not. 1987–1998 (2003).