MODÈLES LOCAUX ET EFFETS DE CRIBLE

Olivier Ramaré

Le lecteur pourra consulter [*Halberstam & Richert*, 1974] qui reste la première référence. La seconde référence, en français, est le très beau livre [*Bombieri*, 1987/1974]. La partie “modèle local” se trouve dans [*Ramaré*, 2009] et est la suite de la théorie de pseudo caractères dont on trouvera des élémets dans [*Bombieri*, 1987/1974], [*Motohashi*, 1978], [*Motohashi*, 1983], [*Ramaré & Ruzsa*, 2001], [*Kowalski & Michel*, 2002], [*Ramaré & Schlage-Puchta*, 2008], [*Ramaré*, 2007] and [*Ramaré*, 2012]. Voir aussi [*Montgomery*, 1971], [*Huxley*, 1972], [*Kobayashi*, 1973] et [*Elliott*, 1992].

1. Prétexte

Nous démontrons ici le théorème suivant.

Théorème $\mathscr{A}$

Le nombre de nombres premiers $p \le X$ et tels que $p+2$ est aussi premier est majoré par

$$4\,(1+o(1))\,\mathfrak{S}_2 X/(\log X)^2, \quad \mathfrak{S}_2 = 2\prod_{p\ge 3}\Bigl(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Bigr).$$

Ce théorème est classiquement démontré en combinant le crible de Selberg et le théorème de Bombieri-Vinogradov. Il est aussi possible de remplacer le crible de Selberg par le crible combinatoire linéaire. Nous utilisons ici une troisième voie, essentiellement nouvelle, et fortement inspirée d'idées autour de l'inégalité du grand crible.

Voir aussi [*Cai & Lu*, 2003], [*Wu*, 2004] et [*Wu*, 2008].

2. Préliminaires sur des fonctions arithmétiques

Nous definissons la fonction ϕ_2 par

$$\phi_2(q) = \prod_{p^\alpha \| q} (p-2)p^{\alpha-1}. \tag{1}$$

Si nous remplaçons le -2 par un -1, nous obtiendrions la fonction ϕ d'Euler.

Nous nous intéressons à la famille de fonctions arithmétiques définie par

$$G_d(Q/d) = \sum_{\substack{q \le Q/d,\\ (q,2d)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\phi_2(q)}, \quad G(Q) = G_1(Q). \tag{2}$$

Voici une jolie propriété découverte dans [*van Lint & Richert*, 1965] et valable pour un paramètre d impair :

$$\boxed{\frac{\phi(d)}{\phi_2(d)} G_d(Q/d) \le G(Q).} \tag{3}$$

Démonstration. Voici une preuve simple :

$$\begin{aligned} G(D) &= \sum_{\delta|d} \sum_{\substack{q \le Q,\\ (q,2)=1,\\ (q,d)=\delta}} \frac{\mu^2(q)}{\phi_2(q)} = \sum_{\delta|d} \frac{\mu^2(\delta)}{\phi_2(\delta)} \sum_{\substack{q \le Q/\delta,\\ (q,2)=1,\\ (q,d)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\phi_2(q)} \\ &\ge \sum_{\delta|d} \frac{\mu^2(\delta)}{\phi_2(\delta)} \sum_{\substack{q \le Q/d,\\ (q,2)=1,\\ (q,d)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\phi_2(q)} \ge \frac{\phi(d)}{\phi_2(d)} G_d(Q/d). \end{aligned}$$

□

Il nous faut aussi minorer $G(Q)$, ce qui est réalisé dans le lemme qui suit.

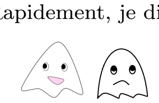
Lemme 1 *Il vient, pour tout $Q \ge 1$,*

$$G(Q) \ge \tfrac{1}{2} \prod_{p \ge 3} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \left(\log Q - \sum_{p \ge 3} \frac{\log p}{p^2 - p + 1} \right).$$

Voici une preuve originale. Il est possible et guère difficile de montrer que $G(Q)$ est bien équivalent au membre de droite lorsque Q tend vers l'infini mais le second terme n'est pas tout à fait correct [∗]. Voir [*Berment & Ramaré*, 2012] pour une méthode plus précise, ou [*Ramaré*, 1995, Lemma 3.2]. L'approche proposée à l'avantage d'être tout à fait explicite. Sur cet aspect explicite, voir [*Siebert*, 1976]. Le script Pari-GP

```
res=0.0; forprime(p = 3, 100000, res += log(p)/(p^2-p+1)); res
```

∗. Rapidement, je dirais qu'il manque un "+γ".



donne la valeur

$$\sum_{p\geq 3}\frac{\log p}{p^2-p+1}=0.377\cdots$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}G(D)=\sum_{\substack{q\leq Q,\\(q,2)=1}}\frac{\mu^2(q)}{\phi_2(q)}&=\sum_{\substack{q\leq Q,\\(q,2)=1}}\frac{\mu^2(q)}{\phi(q)}\prod_{p|q}\frac{1}{1-\frac{1}{p-1}}\\&=\sum_{\substack{q\leq Q,\\(q,2)=1}}\frac{\mu^2(q)}{\phi(q)}\prod_{p|q}\Bigl(1+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}+\cdots\Bigr)\geq\sum_{\substack{q\leq Q,\\(q,2)=1}}\frac{1}{\phi(q)}.\end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite

$$\frac{d}{\phi(d)}=\sum_{\ell|d}\frac{\mu^2(\ell)}{\phi(\ell)}$$

et l'estimation $\sum_{\substack{n\leq x,\\(n,2)=1}}1/n\geq\frac12\log x$ qui est valable pour tout $x>0$ *. Il vient

$$\begin{aligned}G(D)&\geq\sum_{\substack{\ell\geq 1,\\(\ell,2)=1}}\frac{\mu^2(\ell)}{\phi(\ell)\ell}\sum_{\substack{q\leq Q/\ell,\\(q,2)=1}}\frac{1}{q}\geq\tfrac12\sum_{\substack{\ell\geq 1,\\(\ell,2)=1}}\frac{\mu^2(\ell)}{\phi(\ell)\ell}\log(Q/\ell)\\&\geq\tfrac12\prod_{p\geq 3}\Bigl(1+\frac{1}{p(p-2)}\Bigr)\log Q-\tfrac12\sum_{\substack{\ell\geq 1,\\(\ell,2)=1}}\frac{\mu^2(\ell)\log\ell}{\phi(\ell)\ell}.\end{aligned}$$

Nous pouvons donner une autre expression à la constante qui apparaît. Commençons par poser

$$D(s)=\sum_{\substack{\ell\geq 1,\\(\ell,2)=1}}\frac{\mu^2(\ell)\log\ell}{\phi(\ell)\ell^s}=\prod_{p\geq 3}\Bigl(1+\frac{1}{(p-1)p^s}\Bigr).$$

La constante ci-dessus (signe moins compris) est $D'(1)$. Or, D'/D admet une expression assez simple :

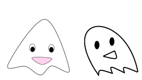
$$\frac{-D'(s)}{D(s)}=\sum_{p\geq 3}\frac{\log p}{p^s(p-1)+1}$$

d'où le résultat. □

*. C'est classique pour $x\geq 1$, via une comparaison à une intégrale

$$\sum_{\substack{n\leq x,\\(n,2)=1}}\frac{2}{n}\geq\sum_{n\leq x}\int_n^{n+2}\frac{dt}{t}\geq\log x$$

mais c'est aussi vrai pour x entre 0 et 1 puisque $\log x$ est négatif dans ce domaine.



3. Sommes de Ramanujan multiplicatives

Voici la fonction qui nous intéresse ici :

$$\mathrm{C}_q(m) = \sum_{\substack{d|q,\\ d|m-1}} \phi(d)\mu(q/d). \tag{4}$$

Lemme 2 *Si nul nombre premier p divisant q ne vérifie $p|m-1$, alors $\mathrm{C}_q(m) = \mu(q)$.*

Démonstration. En effet, les deux conditions $d|q$ et $d|m-1$ sont équivalentes à $d|(q, m-1)$ où $(q, m-1)$ est le pgcd de q et de $m-1$, qui vaut 1. □

Quelques explications complémentaires

Détaillons à présent l'environnement de cette fonction. Premièrement, nous avons

$$\sum_{q|h} \mathrm{C}_q(m) = \sum_{\substack{d|h,\\ d|m-1}} \phi(d) \sum_{d|q|h} \mu(q/d) = \begin{cases} \phi(h) & \text{si } h|m-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, en introduisant des caractères de Dirichlet, et lorsque m est premier à h, nous avons aussi

$$\sum_{q|h} \sum_{\chi \bmod^* q} \chi(m) = \begin{cases} \phi(h) & \text{si } h|m-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la somme porte sur les caractères primitifs modulo q. Il n'est pas difficile de conclure que, lorsque m est premier à q, nous avons

$$\mathrm{C}_q(m) = \sum_{\chi \bmod^* q} \chi(m). \tag{5}$$

Voilà qui est effectivement analogue à l'expression classique des sommes de Ramanujan additives :

$$c_q(n) = \sum_{a \bmod {}^* q} e(na/q) = \sum_{d|q} d\mu(q/d). \tag{6}$$

4. Effet de crible par approximation locale

Considérons le produit hermitien defini par

$$[g|h] = \sum_{\sqrt{X}<p\le X} g(p)\overline{h(p)} \tag{7}$$

où la somme porte sur les nombres premiers de l'intervalle $]\sqrt{X}, X]$. Ce produit hermitien n'est peut être pas *défini*, au sens où il a peut être un noyau, mais il est positif. Considérons alors la fonction caractéristique f des nombres premiers p l'intervalle $]\sqrt{X}, X]$ qui sont tels que $p+2$ est aussi premier. Nous recherchons une approximation *calculable* de f, où le terme approximation est à prendre au sens de la semi-norme induite par le produit hermitien ci-dessus.

Regardons la fonction

$$\mathscr{F}(n) = \frac{1}{G} \sum_{\substack{q\le Q,\\ (q,2)=1}} \frac{\mu(q)\, \mathrm{C}_q(n+3)}{\phi_2(q)} \tag{8}$$

où Q est un paramètre réel positif et $\le \sqrt{X}$ et G est donné par

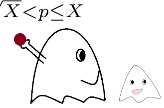
$$G = G(Q) = \sum_{\substack{q\le Q,\\ (q,2)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\phi_2(q)} \tag{9}$$

et minorée au lemme 1. Nous avons la propriété fondamentale suivante :

$$\forall n \quad \Big[\forall q \le Q, q \nmid n+2 \Longrightarrow \mathscr{F}(n) = 1\Big].$$

Nous commençons la preuve en évaluant la norme de $f - \mathscr{F}$. Il vient

$$\begin{aligned}
\|f-\mathscr{F}\|^2 &= \sum_{\sqrt{X}<p\le X} |f(p)-\mathscr{F}(p)|^2 \\
&= \sum_{\sqrt{X}<p\le X} f(p)^2 - 2 \sum_{\sqrt{X}<p\le X} f(p)\,\mathscr{F}(p) + \sum_{\sqrt{X}<p\le X} \mathscr{F}(p)^2 \\
&= Z - 2Z + \sum_{\sqrt{X}<p\le X} \mathscr{F}(p)^2
\end{aligned}$$



où nous avons utilisé $Q \leq \sqrt{X}$ et

$$Z = \sum_{\sqrt{X} < p \leq X} f(p) = \sum_{\substack{\sqrt{X} < p \leq X, \\ p+2 \text{ premier}}} 1. \tag{10}$$

Nous utilisons le fait que $\left\| f - \mathscr{F} \right\|^2 \geq 0$ et déduisons de l'inégalité ci-dessus que

$$\begin{aligned} Z &\leq \sum_{\sqrt{X} < p \leq X} \mathscr{F}(p)^2 \\ &\leq \frac{1}{G^2} \sum_{\substack{q, q' \leq Q, \\ (qq', 2) = 1}} \frac{\mu(q)\mu(q')}{\phi_2(q)\phi_2(q')} \sum_{d|q, d'|q'} \phi(d)\phi(d')\mu(q/d)\mu(q'/d') \sum_{\substack{\sqrt{X} < p \leq X, \\ [d,d'] | p+2}} 1, \end{aligned}$$

où $[d, d']$ est le ppcm de d et de d'. Nous utilisons l'approximation

$$\sum_{\substack{\sqrt{X} < p \leq X, \\ [d,d'] | p+2}} 1 = \frac{Y}{\phi([d, d'])} + R_{[d,d']}(X), \qquad Y = \int_2^X \frac{dt}{\log t}. \tag{11}$$

Nous nous occuperons du terme d'erreur plus tard et regardons le terme principal.

Lemme 3 *Nous avons*

$$\sum_{d|q, d'|q'} \frac{\phi(d)\phi(d')}{\phi([d, d'])} \mu(q/d)\mu(q'/d') = \begin{cases} \phi_2(q) & si\ q = q', \\ 0 & si\ q \neq q'. \end{cases}$$

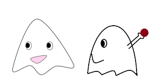
Démonstration. Remarquons tout d'abord que

$$\frac{\phi(d)\phi(d')}{\phi([d, d'])} = \phi((d, d'))$$

qui ne dépend donc que du pgcd (d, d'). Nous vérifions ensuite que, lorsque q et q' sont sans facteur carré, nous avons

$$\begin{aligned} &\sum_{d|q, d'|q'} \phi((d, d'))\mu(q/d)\mu(q'/d') \\ &\qquad = \prod_{p|q, p\nmid q'} (-1+1) \prod_{p|q, p|q'} (1 - 2 + p - 1) \prod_{p\nmid q, p|q'} (-1+1) \end{aligned}$$

qui vaut par conséquent 0 lorsque $q \neq q'$ et $\phi_2(q)$ lorsque $q = q'$, comme annoncé. □



Revenons à la preuve principale. Nous avons obtenu

$$Z \leq \frac{Y}{G^2} \sum_{\substack{q \leq Q,\\ (q,2)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\phi_2(q)} + \frac{1}{G^2} \sum_{\substack{q,q' \leq Q,\\ (qq',2)=1}} \frac{\mu^2(q)\mu^2(q')}{\phi_2(q)\phi_2(q')} \sum_{d|q,d'|q'} \phi(d)\phi(d')|R_{[d,d']}(X)|$$

soit encore

$$Z \leq \frac{Y}{G} + \sum_{\substack{d,d' \leq Q,\\ (dd',2)=1}} \frac{\mu^2(d)\phi(d)G_d(Q/d)}{\phi_2(d)G} \frac{\mu^2(d')\phi(d')G_{d'}(Q/d')}{\phi_2(d')G} |R_{[d,d']}(X)|$$

et en utilisant (3), cela donne

$$\boxed{Z \leq \frac{Y}{G} + \sum_{\substack{d,d' \leq Q,\\ (dd',2)=1}} \mu^2(d)\mu^2(d')|R_{[d,d']}(X)|} \tag{12}$$

5. Gestion du terme d'erreur

Commençons par remarquer que $h = [d,d']$ est sans facteurs carrés, puis que

$$\sum_{\substack{d,d',\\ [d,d']=h}} \mu^2(d)\mu^2(d') \leq 3^{\omega(h)}$$

où $\omega(h)$ est le nombre de facteurs premiers de h, comptés sans multiplicité (précision sans intérêt ici puisque h est sans facteur carré !).

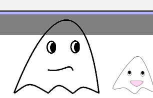
Concernant $R_h(X)$, nous disposons tout d'abord de la majoration triviale lorsque h est inférieur à X

$$R_h(X) \ll X/h.$$

(Ce n'est pas tout à fait ... trivial ! Ce qui est clair, c'est que $R_h(X) \ll X/h + Y/\phi(h)$. Par ailleurs $Y \ll X/\log X$ et $\phi(h)\log X \gg h$ d'où le résultat). L'outil essentiel est le théorème de Bombieri-Vinogradov prouvé indépendamment dans [*Bombieri*, 1965] et dans [*Vinogradov*, 1965] (voir aussi [*Gallagher*, 1968]).

Théorème 4 *Pour toute constante $B > 0$, il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\sum_{h \leq \sqrt{X}/(\log X)^A} |R_h(X)| \ll_B \frac{X}{(\log X)^B}.$$



Toutefois, la quantité qui nous préoccupe est $\sum_{h\le Q^2} 3^{\omega(h)}|R_h(X)|$ qui contient un facteur arithmétique. Nous pouvons nous en sortir en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et la majoration triviale annoncée.

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{h\le Q^2} 3^{\omega(h)}|R_h(X)|\Big)^2 &\le \sum_{h\le Q^2} 9^{\omega(h)}|R_h(X)| \sum_{h\le Q^2}|R_h(X)| \\ &\ll X\sum_{h\le Q^2}\frac{9^{\omega(h)}}{h}\sum_{h\le Q^2}|R_h(X)| \\ &\ll X\Big(\sum_{h\le Q^2}\frac{1}{h}\Big)^9\sum_{h\le Q^2}|R_h(X)| \ll X(\log Q)^9\sum_{h\le Q^2}|R_h(X)|.\end{aligned}$$

Nous utilisons alors le théorème 4 avec $B=15$. Nous prenons $Q=X^{1/4}(\log X)^{-A/2}$ et obtenons

$$\boxed{\sum_{h\le Q^2} 3^{\omega(h)}|R_h(X)| \ll X/(\log X)^3.} \tag{13}$$

6. Fin de la preuve

En reportant (13) dans (12), nous obtenons

$$Z\le \frac{Y}{G}+\mathcal{O}\big(X/(\log X)^3\big).$$

Nous avons bien sûr $Y\le X(1+o(1))/\log X$. Il vient

$$Z\le \mathfrak{S}_2\frac{X(1+o(1))}{\log Q\log X}+\mathcal{O}\big(X/(\log X)^3\big).$$

Comme $\log Q\sim\frac14\log X$, le théorème $\mathscr{A}$ est démontré.

References

2011. *PARI/GP, version* `2.5.2`. The PARI Group, Bordeaux. `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

Berment, P., & Ramaré, O. 2012. Ordre moyen d'une fonction arithmétique par la méthode de convolution. *Revue de Mathématique Spéciale*, **212**(1), 1–15.

Bombieri, E. 1965. On the large sieve method. *Mathematika*, **12**, 201–225.

Bombieri, E. 1987/1974. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. *Astérisque*, **18**, 103pp.

Cai, Yingchun, & Lu, Minggao. 2003. On the upper bound for $\pi_2(x)$. *Acta Arith.*, **110**(3), 275–298.

Elliott, P.D.T.A. 1992. On maximal variants of the Large Sieve. II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA*, **39**(2), 379–383.

Gallagher, P.X. 1968. Bombieri's mean value theorem. *Mathematika*, **15**, 1–6.

Halberstam, H., & Richert, H.E. 1974. Sieve methods. *Academic Press (London)*, 364pp.

Huxley, M.N. 1972. *The distribution of prime numbers. Large sieves and zero-density theorems.* Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford. x+128 pp.

Kobayashi, I. 1973. A note on the Selberg sieve and the large sieve. *Proc. Japan Acad.*, **49**(1), 1–5.

Kowalski, E., & Michel, P. 2002. Zeros of families of automorphic L-functions close to 1. *Pacific J. Math.*, **207**(2), 411–431.

Montgomery, H.L. 1971. Topics in Multiplicative Number Theory. *Lecture Notes in Mathematics (Berlin)*, **227**, 178pp.

Motohashi, Y. 1978. Primes in arithmetic progressions. *Invent. Math.*, **44**(2), 163–178.

Motohashi, Y. 1983. Sieve Methods and Prime Number Theory. *Tata Lectures Notes*, 205.

Ramaré, O. 1995. On Snirel'man's constant. *Ann. Scu. Norm. Pisa*, **21**, 645–706. `http://math.univ-lille1.fr/~ramare/Maths/Article.pdf`.

Ramaré, O. 2007. An explicit result of the sum of seven cubes. *Manuscripta Math.*, **124**(1), 59–75.

Ramaré, O. 2009. *Arithmetical aspects of the large sieve inequality.* Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes, vol. 1. New Delhi : Hindustan Book Agency. With the collaboration of D. S. Ramana.

Ramaré, O. 2012. On long κ-tuples with few prime factors. *Proc. of the London Math. Soc.*, **104**(1), 158–196.

Ramaré, O., & Ruzsa, I.M. 2001. Additive properties of dense subsets of sifted sequences. *J. Théorie N. Bordeaux*, **13**, 559–581.

Ramaré, O., & Schlage-Puchta, J.-C. 2008. Improving on the Brun-Titchmarsh theorem. *Acta Arith.*, **131**(4), 351–366.

Siebert, H. 1976. Montgomery's weighted sieve for dimension two. *Monatsh. Math.*, **82**(4), 327–336.

van Lint, J.E., & Richert, H.E. 1965. On primes in arithmetic progressions. *Acta Arith.*, **11**, 209–216.

Vinogradov, A.I. 1965. The density hypothesis for Dirichet L-series. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **29**.

Wu, Jie. 2004. Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem. *Acta Arith.*, **114**(3), 215–273.

Wu, Jie. 2008. Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem. II. *Acta Arith.*, **131**(4), 367–387.