SINGULARITÉS SUR LE CERCLE DE CERTAINES SÉRIES LACUNAIRES

AHMED SEBBAR

,

Nous voulons étudier les singularités, sur le cercle unité, des deux séries

$$\chi_+(z) = \sum_{n\geq 0} z^{2^n}, \quad \chi_-(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^{2^n}, \ |z| < 1.$$

A cet fin, nous établissons des relations entre $\chi_\pm$ et certaines séries dont les singularités sont mieux connues. Notre résultat principal dans cet exposé se résume ainsi: La première série entière est reliée à la puissance quatrième de la fonction theta de Jacobi et la seconde est reliée à un produit de fonctions eta de Dedekind. Cela peut paraître surprenant car plusieurs différences existent entre la fonction χ_+ et la fonction theta $\theta(z) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} z^{n^2}$.
Parmi celles-ci il y a d'abord la lacunarité qui est plus forte pour $\chi_+(z)$ que pour la fonction theta et le comportement au point d'abscisse 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\log x}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \sim -\frac{\log(1-x)}{\log 2}.$$

Une autre différence fondamentale relève de l'analyse algébrique. Les fonctions $\chi_+(z)$, $\chi_-(z)$ ne sont pas différentiellement algébriques alors que la fonction theta vérifie l'équation différentielle de Jacobi

$$\left(y^2y''' - 15yy'y'' + 30y'^3\right)^2 + 32\left(yy'' - 3y'^2\right)^3 = y^{10}\left(yy'' - 3y'^2\right)^2.$$

Les fonctions $\chi_+(z)$, $\chi_-(z)$ ont été rencontrées dans un problème de pliage de papier alors que la fonction theta joue une role de tout premier plan dans de nombreuses branches de Mathématiques (fonction zeta de Riemann, équation de la chaleur, etc.). L'analyse des singularités de la fonction theta est connue depuis Ramanujan, Hardy et Littelwood et est contenue dans l'égalité suivante, de type Mittag-Leffler

$$\theta^4(\tau) = \frac{4}{\pi^2}\sum_k \sum_{h\equiv k+1 \pmod 2} \frac{(-1)^k}{(h-k\tau)^2}. \tag{1}$$

On introduit la fonction η de Dedekind $\eta(\tau) = e^{\frac{2i\pi\tau}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{2i\pi n\tau}\right)$. Elle est différentiellement algébrique et le produit $S(\tau) = \eta(\tau)\eta(2\tau)\eta(7\tau)\eta(14\tau)$, d'une grande signification géométrique, permet d'analyser les singularités de $\chi_-(z)$.
Certaines équations fonctionnelles et certaines questions de presque-périodicité seront aussi abordées.