Théorèmes d'oscillation à partir de la transformée de Mellin

O. Ramaré

1er mars 2011

Résumé

`File TheoremeDOscillation.tex`

1 Introduction

Nous présentons ici deux théorèmes d'oscillation concernant, dans l'esprit, des fonctions sommatoires de fonctions multiplicatives mais, dans la pratique, des transformées de Mellin. Le premier résultat que nous présentons est dû à Landau en 1905 et donne un premier résultat avec des hypothèses relativement faibles. Disons rapidement que ce théorème est capable de détecter qu'une fonction admet une infinité d'oscillation. Le second théorème que nous présentons est dû à (Kaczorowski & Szydło, 1997) et propose une version quantitative du théorème précédent, mais sous des hypothèses assez fortes. Nous démontrerons ce théorème et en établirons même une version améliorée.

Nous devons ici mettre le lecteur en garde : si notre introduction présente ces deux résultats dans un même cadre, le théorème de Kaczorowski & Szydło fonctionne avec des hypothèses "taubériennes", qui sont donc d'une certaine façon plus faibles que celles du théorème de Landau.

2 Le théorème de Landau

Une fonction sur le segment réel $[a, b]$ est dite analytique réelle si elle admet une représentation par une série entière au voisinage de chaque point de cet intervalle. Un argument de compacité nous garantit alors qu'il existe

AMS Classification: , secondary :
Keywords:

un réel $r > 0$ tel que la fonction s'étende en une fonction analytique dans la demi-bande $-r \leq \Im s \leq r$ et $a \leq \Re s$.

Une fonction sur le segment réel $]a, b]$ est dite analytique réelle si elle est analytique réelle sur tout intervalle compact inclus dans $]a, b]$.

Voici alors le théorème de (Landau, 1905).

Théorème 2.1 *Soit $A(x)$ une fonction positive ou nulle et localement intégrable sur $[1, \infty[$. Soit b un réel tel que l'intégrale*

$$F(s) = \int_1^\infty \frac{A(x)dx}{x^{s+1}} \tag{1}$$

soir définie pour $\Re s > b$. Nous supposons en outre que cette fonction peut être étendue de façon analytique réelle sur le segment $]a, b]$ où $a < b$. Alors l'intégrale (1) *qui définit $F(s)$ est absolument convergente pour $\Re s > a$.*

Ce qui nous donne en particulier que $|F(\sigma + it)| \leq F(\sigma)$ pour tout $\sigma > a$.

Preuve : Soit $c \in]a, b]$. Nous voulons étendre la réprésentation intégrale (1) jusqu'en c. Soit $r > 0$ tel que la fonction F s'étende en une fonction analytique dans la demi-bande $|\Re s| \leq s$ et $\Im s \geq c$. Considérons les points $\alpha_0 = b+(r/4)$, $\alpha_1 = \alpha_0 - (r/2)$, $\alpha_2 = \alpha_1 - (r/2)$ jusqu'en disons $\alpha_K = \alpha_{K-1} - (r/2)$ qui vérifie $c \geq \alpha_K - (r/2)$. Les séries entières représentant F et centrée en chaque α_k admettent un raoyn de convergence $\geq r$. Nous avons construit ces points de sorte que α_k appartiennent au disque de convergence de la série centrée en α_{k-1}.

Soit $X \geq 1$ un réel (qui va tendre vers l'infini). Nous considérons la fonction

$$R_X(s) = \int_X^\infty \frac{A(x)dx}{x^{s+1}}$$

que nous développons en série au voisinage de chaque point α_k avec ce même rayon de convergence r (puisque la fonction $F_X(s) = F(s) - R_X(s)$ est bien évidemment une fonction entière). Nous écrivons chaque série sous la forme

$$S_{X,k}(s) = \sum_{n \geq 0} a_{n,k}(X)(\alpha_k - s)^n$$

et nous montrons que chaque coefficient $a_{n,k}(X) \geq 0$. Nous avons

$$a_{n,k}(X) = \frac{(-1)^n d^n}{n! dx^n} R_X(s)\Big|_{s=\alpha_k} \tag{2}$$

$$= \sum_{m \geq n} a_{m,k-1}(X) \frac{m!}{(m-n)!n!} (\alpha_{k-1} - \alpha_k)^{m-n}. \tag{3}$$

La seconde expression montre que cette propriété de positivité sera héritée de proche en proche (lorsque k varie), mais il nous faut encore montrée qu'elle est vraie pour $k = 0$. Dans ce cas, nous disposons de la représentation intégrale qui nous donne

$$\frac{(-1)^n d^n}{n! dx^n} R_X(s) = \int_X^\infty \frac{A(x)(\operatorname{Log} x)^n dx}{x^{s+1}}$$

ce qui nous garantit bien la positivité demandée.

Nous en concluons donc que $R_X(c) \geq 0$ et donc

$$F_X(c) \leq F(c).$$

Comme elle est majorée, cette intégrale de fonction positive est donc convergente lorsque X tend vers l'infini. Cette intégrale étant égale à $F(s)$ pour $\Re s > b$, elle lui est aussi égale pour $\Re s \geq c$ et la preuve est terminée ! ⋄⋄⋄

Nous présentons une application classique à la fonction $Z = -\zeta'/\zeta$. Notons tout d'abord que

$$Z(s)/s = \int_1^\infty \frac{\phi(x) dx}{x^{s+1}}.$$

Soit alors $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro de la fonction ζ, avec $\beta > 0$, et disons de multiplicité $m \geq 1$. Nous allons montrer que

$$\psi(x) - x = \Omega_\pm(x^\beta).$$

Supposons en effet le contraire, et disons que, pour tout $B > 0$ il existe un C assez grand de telle sorte que nous avons

$$\psi(x) - x \geq -Bx^\beta - C.$$

Dans ce cas, nous regardons la fonction

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{Z(s)}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{B}{s-\beta} + \frac{C}{s} \\ &= \int_1^\infty (\psi(x) - x + Bx^\beta + C) \frac{dx}{x^{s+1}}. \end{aligned}$$

La première expression et les propriétés connues de la fonction ζ de Riemann montre que nous pouvons prolonger analytiquement F sur le segment $]\beta, 1]$. Le théorème de Landau s'applique alors et nous garantit que

$$|F(\sigma + i\gamma)| \leq F(\sigma) \quad (\sigma > \beta)$$

qui est donc plus petit que $B/(\sigma-\beta)+\mathcal{O}(1)$ lorsque σ s'approche de β (par valeurs supérieures). Mais la présence d'un pole d'ordre 1 et de résidu m/ρ en ρ (et avec $\gamma \neq 0$) nous assure que cette quantité est équivalente à $m/|\rho(\sigma-\beta)|$ ce qui mène à une contradiction dès que B est $< m/|\rho|$. La preuve est terminée.

Remarquons que cette preuve ne nous assure que de $\psi(x) = x + \Omega(\sqrt{x})$. Mais comme il y a beaucoup de zéros sur la droite $\Re s = 1/2$, nous pouvons en fait faire mieux et (Littlewood, 1914) montre en fait que $\psi(x) = x + \Omega(\sqrt{x}\operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)$. Monach & Montgomery se sont posés la question de faire mieux, voir (Monach, 1980) (ou (Montgomery & Vaughan, 2006, Section 15.3)) où ils proposent une conjecture concernant une indépendance linéaire quantitative des abscisses des zéros de la fonction ζ de Riemann qui permet de montrer que $\psi(x) = x + \Omega(\sqrt{x}(\operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^2)$.

Si l'hypothèse de Riemann est fausse, nous pouvons faire mieux dans la puissance de x. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, la fonction $(\psi(x) - x)/\sqrt{x}$ possède des propriétés remarquables, voir l'article d'exposition (Kaczorowski, 1994) et (Kaczorowski & Ramaré, 2003). J'ai appris ensuite que Jan-Christoph Schlage-Puchta a en fait démontré des résultats similaires à ceux de (Kaczorowski & Ramaré, 2003) dans sa thèse. Il dispose à présent, mais ce n'est pas encore publié, d'une preuve de la conjecture principale de cet article. À ce propos, je recommende aussi la lecture de (Bochner & Jessen, 1934).

3 Le théorème de Kaczorowski & Szydło

Le théorème précédent est capable d'établir l'existence d'une infinité de changements de signe d'un ordre de grandeur donné d'un terme d'erreur, mais pas de montrer que ces changements de signes apparaissent souvent. C'est à ce problème que nous nous attaquons maintenant. La lectrice trouvera un autre résultat de ce genre dans (Kaczorowski, 1994, Theorem 11), mais avec des hypothèses plus fortes (quoique incomparables en toute généralité ; disons plus fortes « dans les conditions usuelles d'application »).

Il nous faut une hypothèse supplémentaire. Nous considérons

$$R(s) = \int_1^\infty \frac{B(x)dx}{x^{s+1}} \tag{4}$$

où $B(x)$ est une fonction localement intégrable à valeurs réelles et telle que, pour un certain paramètre θ, nous avons

$$\forall U \geq 1, \quad \int_U^{2U} B(x)^2 dx \leq U^{2\theta-1}\eta(U) \tag{5}$$

pour une certaine fonction positive, croissante et continue η qui vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \eta(x) \ll_\varepsilon x^\varepsilon. \tag{6}$$

Il est alors facile de montrer dans ce cas que l'intégrale définissant $R(s)$ en (4) converge absolument pour tout complexe s tel que $\Re s > \theta$.

Preuve : Il suffit d'utiliser une décomposition diadique. $\diamond\diamond\diamond$

Il nous faut à présent une hypothèse qui produise le même effet qu'une singularité. Supposons donc l'existence de deux réels r et t_0, et nous supposons de plus ce dernier non nul, tels que

$$\limsup_{\sigma\to\theta^+} (\sigma-\theta)|F(\sigma+it_0)| \geq r. \tag{7}$$

Nous allons alors établir le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Sous* (5), (6) *et* (7), *et pour tout a tel que*

$$a < r + \liminf_{\sigma\to\theta^+}(\sigma-\theta)F(\sigma)$$

et tout b tel que

$$b > -r + \limsup_{\sigma\to\theta^+}(\sigma-\theta)F(\sigma)$$

nous avons

$$\mu\{x\in[1,T],: B(x) > ax^\theta\} = \Omega(T/\eta(T)), \tag{8}$$

ainsi que

$$\mu\{x\in[1,T],: B(x) < bx^\theta\} = \Omega(T/\eta(T)), \tag{9}$$

où $\mu(A)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble A.

Remarquons tout de même que rien ne nous garantit que la borne supérieure pour a ne vaille pas $-\infty$, ni que la borne inférieure pour b ne vaille pas ∞.

Preuve : Nous remarquons tout d'abord que (9) correspond à (8) appliquée à $-B$ au lieu de B. Nous considérons les fonctions auxiliaires

$$g(x) = B(x) - ax^\theta, \quad G(s) = \int_1^\infty \frac{g(x)dx}{x^{s+1}} = F(s) - \frac{a}{s-\theta},$$

ainsi que

$$g_+(x) = \max(g(x),0), \quad g_-(x) = \max(-g(x),0), \quad (x\geq 1),$$

et les transformées de Mellin correspondantes

$$G_+(s) = \int_1^\infty \frac{g_+(x)dx}{x^{s+1}}, \quad G_-(s) = \int_1^\infty \frac{g_-(x)dx}{x^{s+1}}.$$

Les trois transformées G, G_+ et G_- convergent encore absolument pour $\Re s > \theta$ et nous avons $G(s) = G_+(s) - G_-(s)$.

Nous abordons à présent la preuve à proprement parler. Supposons que (8) soit fausse. Définissons encore

$$A = \{x \geq 1, : g(x) > 0\}, \quad M(T) = \mu(A \cap [1, T]).$$

Notre hypothèse signifie que

$$M(T) = o(T/\eta(T)) \quad (T \longrightarrow \infty). \tag{10}$$

Soit alors un réel t et $\sigma = \theta + \delta$ pour un $\delta > 0$. Nous allons majorer $(\sigma - \theta)|G_+(\sigma + it)|$ et montrer qu'il est petit parce que $M(T)$ est petit. De façon précise, nous écrivons

$$\begin{aligned}(\sigma - \theta)|G_+(\sigma + it)| &\leq \delta\, G_+(\sigma) = \delta \int_A \frac{g(x)dx}{x^{\theta+\delta+1}} \\ &\leq \delta \int_A \frac{g(x)}{x^{\theta+\frac{1}{2}(\delta+1)}\sqrt{\eta(x)}} \frac{\sqrt{\eta(x)}dx}{x^{\frac{1}{2}(\delta+1)}} \\ &\leq \delta \left(\int_1^\infty \frac{g(x)^2dx}{x^{2\theta+\delta+1}\eta(x)}\right)^{1/2} \left(\int_A \frac{\eta(x)dx}{x^{\delta+1}}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Il est facile, en utilisant une décomposition diadique de majorer la première intégrale par $\mathcal{O}(1/\delta)$. Notons β la seconde. Une intégration par parties de cette intégrale de Riemann-Stieltjes nous donne

$$\begin{aligned}\beta &= \int_1^\infty \eta(x)x^{-1-\delta}dM(x) \\ &= \left[\eta(x)x^{-1-\delta}M(x)\right]_1^\infty - \int_1^\infty M(x)d(\eta(x)x^{-1-\delta}).\end{aligned}$$

Remarquons que, pour $1 \leq x_1 \leq x_2$, nous avons

$$\begin{aligned}-M(x_1)\big(\eta(x_2)x_2^{-1-\delta} - \eta(x_1)x_1^{-1-\delta}\big) &\leq M(x_1)\eta(x_1)(1+\delta)\int_{x_1}^{x_2} x^{-2-\delta}dx, \\ &\leq (1+\delta)\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)x^{-2-\delta}dx,\end{aligned}$$

car les fonctions M et η sont croissantes. Les propriétés de l'intégrale de Riemann-Stieltjes nous garantissent alors que

$$\beta \leq (1+\delta)\int_1^\infty M(x)\eta(x)x^{-2-\delta}dx. \tag{11}$$

Il est facile d'introduire des majorations de $M(x)$ dans cette inégalité. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, pour $x \geq 1$, il existe une constante $c(\varepsilon)$ telle que

$$\eta(x)M(x) \leq \varepsilon^2 x + c(\varepsilon) \quad (x \geq 1)$$

et par conséquent

$$\beta \leq c(\varepsilon) + \epsilon^2/\delta.$$

Retournons à $G_+(\sigma + it)$. Tout cela nous donne, pour tout ε fixé,

$$(\sigma - \beta)|G_+(\sigma + it)| \ll \sqrt{\delta c(\varepsilon)} + \varepsilon.$$

Nous laissons d'abord tendre δ vers 0, ce qui nous donne

$$\limsup_{\sigma \to \theta^+} (\sigma - \beta)|G_+(\sigma + it)| \ll \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons bien démontré que

$$\lim_{\sigma \to \theta^+} (\sigma - \beta)|G_+(\sigma + it)| = 0.$$

Concernant $G_-(\sigma + it)$, nous nous contentons de

$$\forall \sigma > \theta, \quad |G_+(\sigma + it)| \leq G_-(\sigma).$$

À ce niveau, nous avons déduit des majorations des transformées de Mellin à partir de nos hypothèses, et il nous reste à utiliser notre hypothèse concernant une « singularité ». Pour une certaine sous-suite de σ tendant vers θ par valeurs supérieures, nous avons

$$\begin{aligned} r &\leq (\sigma - \theta)|F(\sigma + it_0)| + o(1) \\ &\leq (\sigma - \theta)\left|G(\sigma + it_0) + \frac{a}{\sigma + it_0 - \theta}\right| + o(1) \leq (\sigma - \theta)|G(\sigma + it_0)| + o(1) \end{aligned}$$

parce que $t_0 \neq 0$. Nous majorons alors $|G(\sigma + it_0)|$ par $|G(\sigma)|$ qui vaut $-G(\sigma)$ à $o(1/(\sigma - \delta))$ près, qui lui vaut $-F(\sigma) + a/(\sigma - \theta)$. Par conséquent

$$r \leq a - \liminf_{\sigma \to \theta^+} (\sigma - \theta)F(\sigma) + o(1)$$

ce qui est contraire à nos hypothèses. La démonstration est terminée. ◇ ◇ ◇

Sous les hypothèses du théorème de Kaczorowski & Szydło de la section précédente, et en supposant que l'on peut prendre $a > 0$ ou $b < 0$, nous avons

$$\int_1^U B(x)^2 dx \gg U^{2\theta+1}/\eta(U).$$

Preuve :

◇ ◇ ◇

4 Une amélioration

Le théorème de Kaczorowski & Szydło que nous venons de présenter a un défaut : nous ne savons pas si les changements de signe détectés ne s'accumulent pas par petits paquets. Nous nous proposons de modifier la preuve ci-dessus pour montrer que cette possibilité n'a pas lieu.

Nous introduisons

$$m^{\#}(T) = \mu\{T \le x \le 2T, :\ B(x) > ax^\theta\}/(T\eta(T)) \tag{12}$$

et souhaitons montrer que

$$\sum_{\ell \le L} m^{\#}(2^\ell) = \Omega(L) \tag{13}$$

au lieu de (8). Nous supposons le contraire, i.e.

$$\sum_{\ell \le L} m^{\#}(2^\ell) = o(L) \tag{14}$$

au lieu de (10), et reprenons la majoration de $(\sigma-\theta)|G_+(\sigma+it)|$ et introduisons la décomposition diadique *avant* d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Il vient

$$\begin{aligned}(\sigma-\theta)|G_+(\sigma+it)| &\le \delta\, G_+(\sigma) = \delta \int_A \frac{g(x)dx}{x^{\theta+\delta+1}} \\ &\le \delta \sum_{k\ge 0} \int_{A\cap[2^k,2^{k+1}]} \frac{g(x)dx}{x^{\theta+\delta+1}} \\ &\le \delta \sum_{k\ge 0} \left(\eta(2^k) \int_{A\cap[2^k,2^{k+1}]} \frac{dx}{x^{2\delta+1}}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant simplement $\int_{A\cap[2^k,2^{k+1}]} \frac{dx}{x^{2\delta+1}} \le \int_{A\cap[2^k,2^{k+1}]} \frac{dx}{2^{(2\delta+1)k}}$, nous obtenons

$$(\sigma-\theta)|G_+(\sigma+it)| \le \delta \sum_{k\ge 0} \frac{\sqrt{m^{\#}(2^k)}}{2^{k\delta}}. \tag{15}$$

Nous modifions maintenant le membre de droite, disons ϑ, de cette inégalité. Une sommation par parties nous donne

$$\vartheta \le \delta\Big(1 - \frac{1}{2^\delta}\Big) \sum_{k\ge 0} \frac{\sum_{\ell\le k} \sqrt{m^{\#}(2^\ell)}}{2^{k\delta}} \le \frac{\delta^2}{\operatorname{Log} 2} \sum_{k\ge 0} \frac{\sum_{\ell\le k} \sqrt{m^{\#}(2^\ell)}}{2^{k\delta}} \tag{16}$$

en invoquant
$$1-\frac{1}{2^\delta}=\frac{1}{\operatorname{Log} 2}\int_0^\delta \frac{1}{2^t}_{,}\,dt\le \delta/\operatorname{Log} 2.$$
Nous utilisons alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour éliminer la racine carré autour de $m^{\#}$. Il est alors facile de conclure comme dans la preuve du théorème initial, puisque
$$\sum_{k\le 0} k/2^{k\delta}\asymp \delta^{-2}.$$
Remarquons ici que nous pourrions utiliser une (ou successivement plusieurs !) intégration par parties dans (16), et ainsi montrer que
$$\sum_{\ell\le L} m^{\#}(2^\ell)\Big(1-\frac{\ell}{L}\Big)=\Omega(L), \tag{17}$$
qui est encore un peu plus fort que (14) (puisque la négation de (14) implique la négation de (17), qui en est une moyenne de Cesaro). En essayant d'aller le plus loin dans ce genre de raisonnement, il est facile de voir que le mieux que nous puissions supposer avec la preuve présente, et si nous souhaitons nous passer de racine carré autour de $m^{\#}$, est que
$$\sum_{\ell\ge 0}\frac{m^{\#}(2^\ell)}{2^{\delta\ell}}=\Omega(\delta^{-1}) \tag{18}$$
lorsque δ reste >0. Cette hypothèse est un peu « brute ». Nous pouvons la convertir en
$$\int_0^\infty m^{\#}(e^t)e^{-\delta t}dt=\Omega(\delta^{-1}) \tag{19}$$
pourvu que
$$\eta(2x)\ll\eta(x) \tag{20}$$
ce que nous pouvons aisément supposer. Soit encore
$$\int_1^\infty m^{\#}(u)\frac{du}{u^{1+\delta}}=\Omega(\delta^{-1}) \tag{21}$$
Preuve : En effet, nous vérifions tout d'abord que
$$\begin{aligned}\int_{\ell-1}^{\ell} m^{\#}(2^u)du &= \int_{\ell-1}^{\ell}\int_{\substack{2^u\le t\le 2^{u+1},\\ B(t)>at^\theta}}\frac{dt}{2^u\eta(2^u)}du\\ &= \int_{\substack{2^{\ell-1}\le t\le 2^{\ell+1},\\ B(t)>at^\theta}}\int_{t/2\le 2^u\le t}\frac{du}{2^u\eta(2^u)}dt\\ &\ge \int_{\substack{2^{\ell-1}\le t\le 2^{\ell+1},\\ B(t)>at^\theta}}\int_{t/2\le 2^u\le t}\frac{du}{2^u}\frac{dt}{\eta(2^{\ell+1})}\gg m^{\#}(2^\ell).\end{aligned}$$

Une fois cela établi (et c'est ici que nous utilisons notre hypothèse supplémentaire (20)), il n'y a plus de problème pour transformer notre condition en une condition intégrale. $\diamond \diamond \diamond$

5 Compléments

Concernant la localisation des changements de signes, la lectrice pourra consulter (Montgomery & Vaughan, 2006, Theorem 15.8).

References

Bochner, S., & Jessen, B. 1934. Distribution functions and positive-definite functions. *Ann. of Math. (2)*, **35**(2), 252–257.

Kaczorowski, J. 1994. Results on the distribution of primes. *J. Reine Angew. Math.*, **446**, 89–113.

Kaczorowski, J., & Ramaré, O. 2003. Almost periodicity of some error terms in prime number theory. *Acta Arith.*, **106**(3), 277–297.

Kaczorowski, J., & Szydło, B. 1997. Some Ω-results related to the fourth power moment of the Riemann zeta-function and to the additive divisor problem. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **9**(1), 41–50.

Landau, E. 1905. Über einen Satz von Tschebyshef. *Math. Ann.*, **61**, 527–550.

Littlewood, J.E. 1914. Sur la distribution des nombres premiers. *C. R.*, **158**, 1869–1872.

Monach, W.R. 1980. *Numerical investigation of several problems in number theory.* Ph.D. thesis, Ann Harbor : University of Michigan.

Montgomery, H.L., & Vaughan, R.C. 2006. *Multiplicative Number Theory : I. Classical Theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97. Cambridge University Press.