

# La méthode de Balasubramanian pour obtenir une région sans zéros

O. Ramaré

11 janvier 2011

## Résumé

Balasubramanian a obtenu en 1976 la région sans zéros classique pour la fonction  $\zeta$  de Riemann *sans* comparer les valeurs en  $1 + it$  et en  $1 + 2it$ . Nous présentons ici cette méthode.

## 1 Introduction

Voici les articles de base : (Balasubramanian & Ramachandra, 1976) et (Balasubramanian & Ramachandra, 1982). Nous démontrons ici que

**Théorème 1.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, si  $\rho = \beta + i\gamma$  est un zéro de la fonction  $\zeta$  de Riemann, avec  $\beta$  et  $\gamma$  réel, alors*

$$\beta \leq 1 - \frac{c}{\text{Log}(|\gamma| + 10)}.$$

Les premiers zéros de  $\zeta$  ont été calculés numériquement (Riemann avait déjà fait certains de ces calculs à la main!), ils sont tous de partie réelle  $= 1/2$  et voici les valeurs des premières ordonnées :

$$14.134725 + \mathcal{O}^*(10^{-6}), 21.022040 + \mathcal{O}^*(10^{-6}), 25.010858 + \mathcal{O}^*(10^{-6}), \\ 30.424876 + \mathcal{O}^*(10^{-6}), 32.935062 + \mathcal{O}^*(10^{-6}), 37.586178 + \mathcal{O}^*(10^{-6}).$$

La conjecture de Riemann dit que tout zéro de  $\zeta$  dont la partie réelle se situe dans la bande dite « critique » se trouve en fait sur la droite  $\Re s = 1/2$ . Cette hypothèse a été vérifiée jusqu'à de larges hauteurs (actuellement jusqu'à

---

AMS Classification: , secondary :

Keywords:

$2.445 \cdot 10^{12}$ , notamment par (Gourdon, 2004), (voir aussi (Wedeniwski, 2009) et (Odlyzko, 2001)).

Ceci nous permet donc de supposer que  $|\gamma|$  est assez grand. Par ailleurs, l'équation fonctionnelle alliée au principe de réflexion de Schwartz nous permet d'affirmer que si  $\beta + i\gamma$  est un zéro avec  $\beta \in [0, 1]$ , alors  $1 - \beta + i\gamma$ ,  $\beta - i\gamma$  et  $1 - \beta - i\gamma$  sont eux aussi des zéros de  $\zeta$ . Nous pouvons en conséquence supposer  $\gamma > 0$ .

Pur une version explicite du théorème précédent, consulter (Kadiri, 2005). Pour une version explicite asymptotiquement meilleure, consulter (Ford, 2000).

## 2 Utiliser le théorème de Brun-Titchmarsh pour minorer une somme sur des nombres premiers

Commençons par rappeler le théorème de Brun-Titchmarsh.

**Théorème 2.1** *Soit  $q \geq 1$  un module, et  $M \geq 0$  et  $N > q \geq 1$  deux bornes réelles. Donnons-nous aussi une classe  $a$  inversible modulo  $q$ . Le nombre  $Z$  de nombres premiers de l'intervalle  $[M + 1, M + N]$  et qui sont congrus à  $a$  modulo  $q$  vérifie*

$$Z \leq \frac{2N}{\phi(q) \operatorname{Log}(N/q)}.$$

Cette version complètement explicite est due à (Montgomery & Vaughan, 1973), les versions antérieures ayant un  $2 + o(1)$  au lieu de simplement 2. La dénomination « Théorème de Brun-Titchmarsh » a été introduite dans (Linnik, 1961) parce que, d'une part, Titchmarsh a établi un théorème du même style  $q = 1$  avec  $\mathcal{O}(\operatorname{Log} \operatorname{Log}(N/q))$  au lieu 2 alors qu'il obtenait l'asymptotique pour le nombre moyen de diviseurs des  $p + 1$  (où  $p$  parcourt la suite des nombres premiers); d'autre part, Titchmarsh utilisait le crible de Brun à cette fin. La constante 2 (avec un  $+o(1)$ ) est apparu pour la première fois dans (Selberg, 1949). Il est maintenant assez facile de démontrer ce théorème, au moins avec une constante  $(2 + o(1))$ , et nous renvoyons le lecteur à (Ramaré, 2009, Theorem 2.2) et à (Ramaré, 2009, Chapter 6).

La force essentielle de ce théorème lorsque  $q = 1$  vient de ce que  $M$  peut être très grand par rapport à  $N$ . Dans ce cas, nous savons établir que  $Z = (1 + o(1))N/\operatorname{Log} M$  lorsque  $N \gg M \exp(-c(\operatorname{Log} M)^{3/5}(\operatorname{Log} \operatorname{Log} M)^{-1/5})$  pour une certaine constante  $c > 0$ , et ce, à l'aide du théorème des nombres premiers. Donnons une version explicite de ce genre de résultats, version tirée de (Ramaré & Rumely, 1996, Theorem 1 and 2) :

**Lemme 2.1** Nous avons  $\vartheta(x) = x + \mathcal{O}^*(\sqrt{2x})$  lorsque  $1 \leq x \leq 10^{10}$  et  $\vartheta(x) = x + \mathcal{O}^*(0.000213x)$  pour  $x \geq 10^{10}$ .

Et donc, en particulier,  $\vartheta(x) = x + \mathcal{O}^*(0.000213x)$  pour  $x \geq 44\,082\,965$ , ce qui implique que

$$\vartheta(2P) - \vartheta(P) \geq P(1 - 3 \times 0.000213) \quad (P \geq 44\,082\,965).$$

Pour  $P$  plus petit

$$\vartheta(2P) - \vartheta(P) \geq P(1 - (\sqrt{4} + \sqrt{2})/\sqrt{P})$$

ce qui nous donne

$$\vartheta(2P) - \vartheta(P) \geq 0.996P \quad (P \geq 10^6). \quad (1)$$

Voici la conséquence qui nous intéresse :

**Lemme 2.2** Nous avons, pour  $P \geq \gamma^2 \geq 1000^2$ ,

$$\sum_{P < p \leq 2P} (1 + \cos(\gamma \operatorname{Log} p)) \operatorname{Log} p \geq 0.0089 P.$$

Nous conjecturons que la somme en question est équivalente à  $P$ . \* Notons que nous pouvons remplacer  $1 - \cos x$  par  $|\theta - \cos x|$  pour n'importe quel nombre réel  $\theta$ .

*Preuve* : Soit  $P_0 = \exp((1 + 2k_0)\pi/\gamma)$  où  $k_0$  est l'entier défini par

$$k_0 = \left\lfloor \frac{\gamma \operatorname{Log} P}{2\pi} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$$

tant et si bien que  $\gamma \operatorname{Log} P_0$  est un entier  $\equiv \pi[2\pi]$  et  $P_0 \geq P$ . Nous considérons ensuite les points  $P_j = P_0 \exp(2\pi j/\gamma)$ , pour  $j = 0, \dots, J$ , où  $J$  est l'entier défini par

$$P_0 \exp(2\pi J/\gamma) < 2P \leq P_0 \exp(2\pi(J+1)/\gamma)$$

i.e.

$$J = \left\lfloor \frac{\gamma \operatorname{Log}(2P/P_0)}{2\pi} \right\rfloor$$

où  $\lfloor x \rfloor$  désigne le plus petit entier strictement en dessous de  $x$ . Nous considérons l'intervalle élémentaire (centré multiplicativement autour de 1), pour un paramètre  $\alpha \in [0, 1]$  que nous choisirons plus tard,

$$I(\alpha, \gamma) = \left[ \exp -\frac{c(\alpha)}{\gamma}, \exp \frac{c(\alpha)}{\gamma} \right], \quad c(\alpha) = \pi - \arccos(\alpha - 1)$$

---

\*. La théorie des formes bilinéaires sur les nombres premiers ne s'applique pas ici car  $\cos(\gamma \operatorname{Log} p) = \Re p^{i\gamma}$  est essentiellement une fonction multiplicative.

puis tous les intervalles  $I_j = P_j \cdot I(\alpha, \gamma)$ , tant et si bien que si  $t$  est dans  $]P, 2P]$  mais dans aucun des  $I_j$ , nous avons

$$1 + \cos(\gamma \operatorname{Log} t) \geq \alpha.$$

L'intervalle  $I_j$  est de longueur au plus (en supposant  $c(\alpha) \leq 1$ )

$$\begin{aligned} P_j \left( \exp \frac{c(\alpha)}{\gamma} - \exp -\frac{c(\alpha)}{\gamma} \right) &= 2P_j \sinh \frac{c(\alpha)}{\gamma} \\ &\leq \frac{2P_j c(\alpha)}{\gamma} 1000 \sinh \frac{1}{1000} \leq \frac{2.0000004 P_j c(\alpha)}{\gamma} \end{aligned}$$

(par convexité de  $\sinh$ ) nombres entiers. Grâce au théorème 2.1 de Brun-Titchmarsh, cet intervalle contient au plus

$$\begin{aligned} \frac{4.0000008 P_j c(\alpha)}{\gamma \operatorname{Log} \frac{2.0002 P_j c(\alpha)}{\gamma}} &\leq \frac{P_j}{\operatorname{Log} P} \frac{4.0000008 c(\alpha)}{\gamma} \frac{\operatorname{Log} P}{\operatorname{Log}(2c(\alpha)\sqrt{P})} \\ &\leq \frac{P_j}{\gamma \operatorname{Log} P} \frac{8.0000016 c(\alpha)}{1 + \frac{\operatorname{Log}(2c(\alpha))}{\operatorname{Log} 1000}} \end{aligned}$$

nombres premiers. En sommant sur  $j = 0, \dots, J$ , nous obtenons que les nombres premiers contenus dans la collection des  $I_j$  sont au plus au nombre de

$$\begin{aligned} \frac{\exp(2\pi(J+1)/\gamma) - 1}{\exp(2\pi/\gamma) - 1} \frac{P_0/\gamma}{\operatorname{Log} P} \frac{8.0000016 c(\alpha)}{1 + \frac{\operatorname{Log}(2c(\alpha))}{\operatorname{Log} 1000}} \\ \leq \frac{2 \exp(2\pi/\gamma)}{\exp(2\pi/\gamma) - 1} \frac{P/\gamma}{\operatorname{Log} P} \frac{8.0000016 c(\alpha)}{1 + \frac{\operatorname{Log}(2c(\alpha))}{\operatorname{Log} 1000}} \\ \leq \frac{P}{\operatorname{Log} P} \frac{\exp(2\pi/1000)2/1000}{\exp(2\pi/1000) - 1} \frac{8.0000016 c(\alpha)}{1 + \frac{\operatorname{Log}(2c(\alpha))}{\operatorname{Log} 1000}} \end{aligned}$$

car la fonction  $x \mapsto xe^x/(e^x - 1)$  est croissante. En choisissant  $\alpha = 0.03014$ , nous obtenons qu'il y a au plus  $0.700\,646\,628 P/\operatorname{Log} P$  nombres premiers qu'il faut exclure. Par conséquent

$$\sum_{P < p \leq 2P} (1 + \cos(\gamma \operatorname{Log} p)) \operatorname{Log} p \geq \left( \vartheta(2P) - \vartheta(P) - 0.700\,646\,628 \frac{P \operatorname{Log}(2P)}{\operatorname{Log} P} \right) \alpha$$

ce qui nous donne le lemme en invoquant (1). ◇◇◇

### 3 Du théorème de Brun-Titchmarsh à la fonction $\zeta$ de Riemann

Commençons par rappeler la deuxième moitié de (Ford, 2000, Lemma 2.3) (aussi démontrer bien antérieurement, mais j'ai oublié où!!).

**Lemme 3.1** *Nous avons, pour  $\sigma > 1$ ,*

$$|\zeta'/\zeta(\sigma + it)| \leq 1/(\sigma - 1).$$

L'expression de  $-\zeta'/\zeta$  en série de Dirichlet et une simple sommation par parties permet de prouver le lemme suivant :

**Lemme 3.2** *Pour  $t \geq 1000$  et  $\sigma > 1$ , nous avons*

$$\frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \Re \frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \geq \frac{0.00641}{(2t^2)^{\sigma-1}(\sigma - 1)}.$$

*Preuve :* Nous partons de

$$\begin{aligned} \frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \Re \frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)(1 + \cos(t \operatorname{Log} n))}{n^\sigma} \\ &\geq \sum_{p \geq t^2} \frac{(1 + \cos(t \operatorname{Log} p)) \operatorname{Log} p}{p^\sigma}. \end{aligned}$$

Nous employons alors une décomposition diadique puis le lemme 2.2. Le membre de droite est par conséquent minoré par

$$\sum_{k \geq 0} \frac{0.0089}{2^\sigma (2^k t^2)^{\sigma-1}} \geq \frac{0.0089}{2^\sigma t^{2(\sigma-1)}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\sigma-1}}} \geq \frac{0.0089}{2^\sigma t^{2(\sigma-1)} \operatorname{Log} 2 (\sigma - 1)}$$

toujours parce que la fonction  $x \mapsto x/(1 - e^{-x})$  est croissante. Par conséquent

$$\frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \Re \frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \geq \frac{0.00641}{(2t^2)^{\sigma-1}(\sigma - 1)}$$

comme annoncé. ◇◇◇

### 4 Exprimer $-\Re \zeta'/\zeta(s)$ en fonction des zéros proches de $s$ : la méthode locale de Landau

Il existe d'autres façons de procéder, notamment via le lemme suivant, dont on trouve une première trace dans (Landau, 1908), entre les équations

(92) et (93), voir la définition de  $F$ . Cette approche va évoluer jusqu'à (Landau, 1926, Lemma 1) pour donner une borne de  $\zeta'/\zeta(s)$  proche de la droite  $\Re s = 1$ . Gronwall et Landau ont aussi échangé des améliorations successives. Voir aussi (Titchmarsh, 1951, section 3.9, Lemma  $\alpha$ ). La preuve est basé sur un résultat à la paternité tout aussi délicate, nommément le théorème dit de la partie réelle de Borel-Caratheodory. Caratheodory ne l'a publié nulle part, mais Landau déclare qu'il lui doit des résultats de ce types au cours d'échanges de lettres. Voir en particulier (Landau, 1908, Satz I, section 5) and (Landau, 1926, Lemma 1). (Titchmarsh, 1932, section 5.5) attribue ce théorème à (Borel, 1897, page 365)\* et à Caratheodory.

**Lemme 4.1** *Supposons connue une borne supérieure  $M$  pour la fonction  $F$  holomorphe dans  $|s - s_0| \leq R$ . Supposons encore que l'on connaisse une borne inférieure  $m$  pour  $|F(s_0)|$ . Alors*

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{|\rho - s_0| \leq R/2} \frac{1}{s - \rho} + \mathcal{O}^* \left( 8 \frac{\text{Log}(M/m)}{R} \right)$$

pour  $|s - s_0| \leq \frac{1}{4}R$ .

(Heath-Brown, 1992, Lemma 3.2) propose encore une autre façon de faire. D'un point de vue explicite, il semble que ce soit une technique de Stechkin (dont le lecteur trouvera l'origine dans l'article de de la Vallée-Poussin cité ci-dessous) qui soit le plus efficace. Voir les articles de (Rosser, 1941), (de la Vallée Poussin, 1956), (Stechkin, 1970), (Stechkin, 1989), (Ramaré & Rumely, 1996), (Kadiri, 2005).

## Conséquence pour la fonction zeta de Riemann

Voici la conséquence qui nous intéresse du lemma 4.1 :

**Lemme 4.2** *Soit  $t_0 \geq 4$ . Nous avons*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\rho - 1 - it_0| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + \mathcal{O}(\text{Log } t_0) \quad (|s - 1 - it_0| \leq 1/2) \quad (2)$$

Nous prenons  $F = \zeta$ ,  $s_0 = 1 + it_0$  et  $R = 2$ . Il nous suffit d'obtenir une borne supérieure polynomiale en l'ordonnée pour  $|\zeta(s)|$  lorsque  $-1 \leq \Re s \leq 3$  et  $\Im s \geq 2$ , de même qu'une borne inférieure pour  $|\zeta(s_0)|$ . Voici une façon rapide pour acquérir la borne supérieure :

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty [t] \frac{dt}{t^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^\infty B_1(t) \frac{dt}{t^{s+1}}$$

---

\*. Il faut un peu modifier la preuve pour nos besoins.

où  $[t]$  désigne la partie entière de  $t$ , puis  $\{t\}$  sa partie fractionnaire et  $B_1(t)$  est la première fonction de Bernoulli, soit  $B_1(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$ . Nous considérons les fonctions de Bernoulli d'ordre supérieures  $B_2$  et  $B_3$  :

$$\frac{1}{2}B_2(t) = \int_1^t B_1(u)du + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\{t\}^2 - \frac{1}{2}\{t\} + \frac{1}{12}.$$

Cette fonction est périodique de période 1  $t \geq 1$  et a 0 comme valeur moyenne sur une période (i.e.  $\int_1^2 B_2(u)du = 0$ ). En conséquence

$$\frac{1}{3}B_3(t) = \int_1^t B_2(u)du = \frac{1}{3}\{t\}^3 - \frac{1}{2}\{t\}^2 + \frac{1}{6}\{t\}$$

est bornée et donc périodique de période 1. Il se trouve que sa valeur moyenne sur une période est encore nulle. Il vient alors

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^\infty B_1(t) \frac{dt}{t^{s+1}} \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} + \frac{s}{12} + \frac{s(s+1)}{2} \int_1^\infty B_2(t) \frac{dt}{t^{s+2}} \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} + \frac{s}{12} - \frac{s(s+1)(s+2)}{6} \int_1^\infty B_3(t) \frac{dt}{t^{s+3}} \end{aligned}$$

ce qui donne une expression pour le prolongement analytique de  $\zeta$  sur le demi-plan  $\Re s > -2$ . En particulier, lorsque  $|s| \geq 2$  et  $\Re s \geq -1$ , nous avons

$$|\zeta(s)| \leq \frac{13}{12}|s| + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \frac{|s|^3}{2} \leq \frac{2}{5}|s|^3.$$

De meilleurs bornes sont accessibles, (en fait  $|\zeta(s)| \ll |s|^{3/2}$  dans notre domaine), mais celle-ci nous suffira.

Il nous faut aussi une borne supérieure pour  $1/|\zeta(1+it_0)|$ , ce que nous obtenons rapidement de la façon qui suit. Nous modifions tout d'abord la preuve que nous venons d'écrire pour montrer que

$$|\zeta'(s)| \ll (\text{Log } t)^2 \quad (\Re s \geq 1, t = \Im s \geq 2).$$

Nous utilisons cette borne pour bouger  $\zeta(1 + it_0)$  en  $\zeta(\sigma + it_0)$  au prix de  $\mathcal{O}((\sigma - 1)(\text{Log } t_0)^2)$ . Nous rappelons ensuite l'inégalité classique de Mertens\* :

$$1 \leq |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it_0)|^4 |\zeta(\sigma + 2it_0)|.$$

Comme  $|\zeta(\sigma)| \ll 1/(\sigma - 1)$  et  $|\zeta(\sigma + 2it_0)| \ll \text{Log } t_0$ , nous obtenons

$$(\sigma - 1)^{3/4} (\text{Log } t_0)^{-1/4} \ll |\zeta(\sigma + it_0)|.$$

Nous choisissons alors  $\sigma = 1 + C(\text{Log } t_0)^{-9}$  où  $C$  est une constante que nous choisissons assez grande et obtenons

$$|\zeta(\sigma + it_0)| \gg 1/(\text{Log } t_0)^7.$$

Cette borne a priori est suffisante, mais nous savons faire bien mieux, voire par exemple (Ramaré, 2010).

Le lecteur dispose à présent de tous les éléments pour clore la preuve du lemme 4.2. Remarquons ici qu'une preuve de

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\rho - 1 - (\text{Log } t_0)^{-1} - it_0| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + \mathcal{O}(\text{Log } t_0) \quad (|s - 1 - it_0| \leq 1/2)$$

aurait été légèrement plus simple puisque la borne inférieure

$$|\zeta(1 + (\text{Log } t_0)^{-1} + it_0)|^{-1} \leq |\zeta(1 + (\text{Log } t_0)^{-1})| \ll (\text{Log } t_0)$$

aurait suffi. L'expression que nous donnons est toutefois plus simple à écrire !

## 5 Obtenir la région sans zéros

Soit  $\beta + i\gamma$  un zéro de  $\zeta$  avec  $\beta \geq 1/2$  et  $\gamma \geq 1000$ . Nous utilisons le lemme 4.2 avec  $t_0 = \gamma$  et  $s = \sigma + i\gamma$  pour un  $\sigma \in ]1, 3/2]$  que nous choisirons plus tard. Il vient

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\rho - 1 - i\gamma| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + \mathcal{O}(\text{Log } \gamma)$$

---

\*. Que l'on prouve en remarquant que  $-\zeta'/\zeta$  a une série de Dirichlet à coefficients positifs ou nuls. Comme  $3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0$ , nous obtenons

$$0 \leq 3\Re \frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\Re \frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma + it_0) + \Re \frac{-\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it_0).$$

Nous intégrons ensuite cette inégalité en  $\sigma$  parcourant la demi-droite de  $\sigma_0$  à  $\infty$ . Nous pourrions aussi utiliser le développement en série de Dirichlet de  $\text{Log } \zeta$ , qui a aussi des coefficients positifs ou nuls.



dont nous prenons la partie réelle. Comme  $\Re 1/(s - \rho) \geq 0$ , nous pouvons restreindre la somme sur les zéros à  $\beta + i\gamma$  si nous nous contentons d'une minoration, i.e.

$$\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \geq \frac{1}{\sigma - \beta} + \mathcal{O}(\text{Log } \gamma).$$

D'un autre côté, en combinant les lemme 2.2 et 3.1, nous obtenons

$$\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \leq \frac{1}{\sigma - 1} - \frac{0.00641}{(2\gamma^2)^{\sigma-1}(\sigma - 1)}.$$

En combinant les deux, nous atteignons

$$\frac{\sigma - 1}{\sigma - \beta} \leq 1 - \frac{0.00641}{(2\gamma^2)^{\sigma-1}} + \mathcal{O}((\sigma - 1) \text{Log } \gamma).$$

Soit  $A = 157$ , de sorte que  $1/(A + 1) < 0.00641$ . Nous posons  $\delta = 1 - \beta$  et choisissons  $\sigma - 1 = A(1 - \beta)$ . L'inégalité du dessus s'écrit alors

$$\frac{A}{A + 1} \leq 1 - \frac{0.00641}{e^{A\delta \text{Log}(2\gamma^2)}} + \mathcal{O}(\delta \text{Log } \gamma)$$

soit encore

$$\frac{0.00641}{e^{A\delta \text{Log}(2\gamma^2)}} + \mathcal{O}(\delta \text{Log } \gamma) \leq \frac{1}{A + 1}.$$

Lorsque  $\delta \text{Log } \gamma$  tend vers zero, le membre de gauche de cette inégalité tend vers une quantité  $> 1/(A + 1)$ , ce qui impose donc que  $\delta \text{Log } \gamma$  doive rester supérieur à une constante  $> 0$ .

## References

- Balasubramanian, R., & Ramachandra, K. 1976. The place of an identity of Ramanujan in prime number theory. *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A*, **83**(4), 156–165.
- Balasubramanian, R., & Ramachandra, K. 1982. On the zeros of the Riemann zeta function and  $L$ -series. II. *Hardy-Ramanujan J.*, **5**, 1–30.
- Borel, É. 1897. Sur les zéros des fonctions entières. *Acta Math.*, **20**, 357–396.
- de la Vallée Poussin, Ch. 1956. *Sur la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*. Centre Belge Rech. Math., Colloque Theorie des Nombres, Bruxelles 19-21 dec. 1955, 9-66 (1956).
- Ford, K. 2000. Zero-free regions for the Riemann zeta function. *Proceedings of the Millenial Conference on Number Theory, Urbana, IL*.

- Gourdon, X. 2004. The  $10^{13}$  first zeros of the Riemann Zeta Function and zeros computations at very large height. <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>.
- Heath-Brown, D.R. 1992. Zero-free regions for Dirichlet  $L$ -functions and the least prime in an arithmetic progression. *Proc. London Math. Soc., III Ser.*, **64**(2), 265–338.
- Kadiri, H. 2005. Une région explicite sans zéros pour la fonction  $\zeta$  de Riemann. *Acta Arith.*, **117**(4), 303–339.
- Landau, E. 1908. Beiträge zur analytischen Zahlentheorie. *Palermo Rend.*, **26**, 169–302.
- Landau, E. 1926. Über die Riemannsche Zetafunktion in der Nähe von  $s = 1$ . *Rendiconti Palermo*, **50**, 423–427.
- Linnik, Yu.V. 1961. The dispersion method in binary additive problems. *Leningrad*, 208pp.
- Montgomery, H.L., & Vaughan, R.C. 1973. The large sieve. *Mathematika*, **20**(2), 119–133.
- Odlyzko, A.M. 2001. The  $10^{22}$ -nd zero of the Riemann zeta function. *Contemporary Math. series, Proc. Conference on Dynamical, Spectral and Arithmetic Zeta-Functions*, **290**, 139–144.
- Ramaré, O. 2009. *Arithmetical aspects of the large sieve inequality*. Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes, vol. 1. New Delhi : Hindustan Book Agency. With the collaboration of D. S. Ramana.
- Ramaré, O. 2010. Comparing  $L(s, \chi)$  with its truncated Euler product and generalization. *Functiones et Approximatio*, **42**, 145–151.
- Ramaré, O., & Rumely, R. 1996. Primes in arithmetic progressions. *Math. Comp.*, **65**, 397–425.
- Rosser, J.B. 1941. Explicit bounds for some functions of prime numbers. *American Journal of Math.*, **63**, 211–232.
- Selberg, A. 1949. On elementary problems in prime number-theory and their limitations. *C.R. Onzième Congrès Math. Scandinaves, Trondheim, Johan Grundt Tanums Forlag*, 13–22.
- Stechkin, S.B. 1970. Zeros of Riemann zeta-function. *Math. Notes*, **8**, 706–711.
- Stechkin, S.B. 1989. Rational inequalities and zeros of the Riemann zeta-function. *Trudy Mat. Inst. Steklov (english translation : in Proc. Steklov Inst. Math. 189 (1990))*, **189**, 127–134.

Titchmarsh, E.C. 1932. *The theory of functions*. X + 454p. Oxford, Clarendon Press .

Titchmarsh, E.C. 1951. *The Theory of Riemann Zeta Function*. Oxford Univ. Press, Oxford 1951.

Wedeniwski, S. 2009. On the Riemann hypothesis. <http://www.zetagrid.net>.