# Notes sur un résultat d'Erdös de 1946

Bruno Martin

13 mai 2011

Dans cette note, je fournis un corrigé détaillé de l'exercice 3 page 80 de [2] : il s'agit de démontrer le théorème 3 de [1].

Pour $x > 0$, on définit $E_k(x)$ par la formule

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ (n,k)=1}} 1 = \frac{\varphi(k)}{k} x + E_k(x).$$

Il résulte directement de cette définition que $E_k$ est une fonction $k$-périodique. Notons* $B_1$ la première fonction de Bernoulli, autrement dit, $B_1(x) = \{x\} - 1/2$.

**Proposition 1** *Pour $k > 1$, on a*

$$E_k(x) = -\sum_{d|k} \mu(d) B_1(x/d)$$

**Démonstration** On a pour $k > 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ (n,k)=1}} 1 &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{d|k} \mu(d) \\
&= \sum_{d|k} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \\
&= k \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d|k} \mu(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} \\
&= k \frac{\varphi(d)}{d} - \sum_{d|k} \mu(d) B_1(x/d).
\end{aligned}$$

∗. Attention, dans [2], cette notation est réservée au polynôme de Bernoulli d'ordre 1.

La dernière égalité résulte de la formule d'inversion de Möbius et du fait que $k > 1$. $\square$

De là, on peut obtenir une majoration triviale.

**Proposition 2** *On a pour $k > 1$,*

$$|E_k(x)| \leqslant 2^{\omega(k)-1}.$$

**Démonstration** D'après la proposition 1, on a

$$|E_k(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{d|k} |\mu(d)| = 2^{\omega(k)-1}. \qquad \square$$

On peut également montrer facilement que $E_k$ est de moyenne nulle.

**Proposition 3** *Pour $k > 1$, on a*

$$\int_0^k E_k(x)dx = 0.$$

**Démonstration** On a

$$\begin{aligned}
\int_0^k E_k(x)dx &= \sum_{d|k} \mu(d) \int_0^k B_1(x/d)dx \quad \text{(d'après la proposition 1)} \\
&= \sum_{d|k} d\mu(d) \int_0^{k/d} B_1(u)du \quad \text{(changement de variables } u = x/d\text{)} \\
&= k \sum_{d|k} \mu(d) \int_0^1 B_1(u)du \quad (\ B_1 \text{ est 1-périodique}) \\
&= 0 \quad \text{(car } B_1 \text{ est de moyenne nulle sur } [0;1]\text{)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Erdös obtient une minoration de $E_k(x)$. Nous aurons l'usage de quelques lemmes.

**Lemme 1** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $q \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{a=0}^{q-1} B_1\Big(x + \frac{a}{q}\Big) = B_1(qx).$$

**Démonstration** Par 1-périodicité, on peut toujours supposer que $0 \leqslant x < 1$. Observons tout d'abord que par 1-périodicité de $B_1$, on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{a=j}^{j+q-1} B_1\Big(x + \frac{a}{q}\Big) = \sum_{a=0}^{q-1} B_1\Big(x + \frac{a}{q}\Big). \tag{1}$$

Un calcul élémentaire montre que si $0 \leqslant x < 1/q$,

$$\sum_{a=0}^{q-1} B_1\Big(x + \frac{a}{q}\Big) = \sum_{a=0}^{q-1} x + \frac{a}{q} + \frac{1}{2} = qx - \frac{1}{2} = B_1(qx). \tag{2}$$

Si $j/q \leqslant x < (j+1)/q$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{a=0}^{q-1} B_1\Big(x + \frac{a}{q}\Big) &= \sum_{a=0}^{q-1} B_1\Big(x - \frac{j}{q} + \frac{a+j}{q}\Big) \\
&= \sum_{a=0}^{q-1} B_1\Big(x - \frac{j}{q} + \frac{a}{q}\Big) \quad \text{(d'après (1))} \\
&= B_1(q(x - j/q)) \quad \text{(d'après (2))} \\
&= B_1(qx) \quad \text{(par 1-périodicité de } B_1\text{)}.
\end{aligned}$$

□

**Lemme 2** *Pour* $a, b \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\int_0^1 B_1(at)B_1(bt) = \frac{(a,b)^2}{12ab}.$$

**Démonstration** Traitons d'abord le cas $(a,b)=1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_1(at)B_1(bt) &= \sum_{r=0}^{a-1}\int_0^{1/a} B_1\big(a(t+r/a)\big)B_1\big(b(t+r/a)\big)dt \\
&= \int_0^{1/a} B_1(at)\sum_{r=0}^{a-1} B_1\big(bt+br/a\big)dt \\
&= \int_0^{1/a} B_1(at)\sum_{r=0}^{a-1} B_1\big(bt+r/a\big)dt \quad \text{(car (a,b)=1)} \\
&= \int_0^{1/a} B_1(at)B_1(abt)dt \quad \text{(d'après le lemme 1)} \\
&= \sum_{r=0}^{b-1}\int_0^{1/ab} B_1\big(a(t+r/ab)\big)B_1\big(ab(t+r/ab)\big)dt \\
&= \int_0^{1/ab} B_1(abt)\sum_{r=0}^{b-1} B_1\big(at+r/b\big)dt \\
&= \int_0^{1/ab} B_1(abt)^2 \quad \text{(d'après le lemme 1).} \\
&= \frac{1}{ab}\int_0^1 B_1(u)^2du \quad \text{( changement de variables } abt=u\text{)} \\
&= \frac{1}{12ab}.
\end{aligned}$$

On peut à présent traiter le cas général :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 B_1(at)B_1(bt) \\
&= \frac{1}{(a,b)}\int_0^{(a,b)} B_1\Big(\frac{a}{(a,b)}t\Big)B_1\Big(\frac{b}{(a,b)}t\Big)dt \quad \text{(changement de variables } t=x/(a,b)\text{)} \\
&= \int_0^1 B_1\Big(\frac{a}{(a,b)}t\Big)B_1\Big(\frac{b}{(a,b)}t\Big)dt \quad \text{(par 1-périodicité de } B_1\text{)} \\
&= \frac{(a,b)^2}{12ab} \quad \text{(d'après le cas } (a,b)=1\text{)}
\end{aligned}$$

□

**Lemme 3** *Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $d|k$, $e|k$, on a*

$$\int_0^k B_1(x/d)B_1(x/e)dx = \frac{(d,e)^2}{12de}k.$$

**Démonstration** On peut commencer par traiter le cas $(d,e)=1$. Dans ce cas, on a $de \mid k$.

$$\begin{aligned}
\int_0^k B_1(x/d)B_1(x/e)dx &= de\int_0^{k/de} B_1(dt)B_1(et)dt \quad \text{(changement de variable } x=edt\text{)}\\
&= de.\frac{k}{de}\int_0^1 B_1(dt)B_1(et)dt \quad \text{(on intègre une fonction 1-périodique)}\\
&= k\frac{1}{12de} \quad \text{(d'après le lemme 2).}
\end{aligned}$$

Pour le cas général, on se ramène au cas précédent en posant $e'=e/(e,d)$ et $d'=d/(e,d)$ : il suffit d'effectuer le changement de variables $x=(e,d)u$, de remarquer que $d'$ et $e'$ divisent $k/(e,d)$, et que l'on est donc bien ramené au cas précédent. Nous omettons les détails. □

**Lemme 4** *Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a*

$$\sum_{d|k,e|k}\frac{\mu(d)\mu(e)}{de}(d,e)^2 = 2^{\omega(k)}\frac{\varphi(k)}{k}.$$

**Démonstration** Posons $f(k)=\sum_{d|k,e|k}\frac{\mu(d)\mu(e)}{de}(d,e)^2$ et $g(k)=2^{\omega(k)}\frac{\varphi(k)}{k}$. Les fonctions $f$ et $g$ sont multiplicatives. C'est évident en ce qui concerne $g$. Pour $f$, il suffit d'utiliser que si $(k,k')=1$, alors les diviseurs de $kk'$ sont de la forme $uu'$ avec $u\mid k$, $u'\mid k'$ et $(u,u')=1$. La conclusion provient alors du calcul $f(p^\nu)=f(p)=2(1-1/p)$ (Au passage, $f$ et $g$ sont fortement multiplicatives). □

**Théorème 1** *On a pour $k>1$,*

$$\max_x |E_k(x)| \gg 2^{\omega(k)/2}\Big(\frac{\varphi(k)}{k}\Big)^{1/2}.$$

**Démonstration** On a

$$\begin{aligned}
\int_0^k E_k(x)^2dx &= \sum_{d|k,e|k}\mu(d)\mu(e)\int_0^k B_1(x/d)B_1(x/e)dx \quad \text{(d'après la proposition 1)}\\
&= \frac{k}{12}\sum_{d|k,e|k}\frac{\mu(d)\mu(e)}{de}(d,e)^2 \quad \text{(d'après le lemme 3)}\\
&= \frac{1}{12}2^{\omega(k)}\varphi(k) \quad \text{(d'après le lemme 4).}
\end{aligned}$$

On en déduit
$$\frac{1}{12}2^{\omega(k)}\varphi(k) = \int_0^k E_k(x)^2 dx \leqslant k(\max_x |E_k(x)|)^2,$$
et nous obtenons bien le résultat annoncé. $\square$

Nous démontrons maintenant un résultat du à Lehmer [4] et Vijayaraghavan [3]

**Lemme 5** *Soit $k$ un entier sans facteur carré dont les facteurs premiers sont en nombre pair, et tous congrus à 3 modulo 4. Alors si $d \mid k$, on a*
$$\mu(d)B_1\Big(\Big\{\frac{k}{4d}\Big\}\Big) = -\frac{1}{4}.$$

**Démonstration** Si $\omega(d)$ est pair, alors il en est de même pour $\omega(k/d)$. Par conséquent, on a $\frac{k}{d} \equiv 1 \bmod 4$, et par suite,
$$\mu(d)B_1\Big(\Big\{\frac{k}{4d}\Big\}\Big) = -1.\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{4}.$$
Un calcul similaire conduit au résultat lorsque $\omega(d)$ est impair. $\square$

**Théorème 2** *Il existe une infinité d'entiers $k$ pour lesquels*
$$\max_x |E_k(x)| \geqslant 2^{\omega(k)-2}.$$

**Démonstration**

Soit $k$ un entier satisfaisant aux propriétés énoncées dans le lemme 5. On a d'après ce même lemme,
$$E_k\Big(\frac{k}{4}\Big) = -\frac{1}{4}\sum_{d|k} 1 = -\frac{1}{4}\tau(k) = -2^{\omega(k)-2},$$
ce qui entraîne le résultat escompté.

$\square$

# Références


[1] Erdős, On the coefficients of the cyclotomic polynomial, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 179-184.

[2] H. Montgomery, R. Vaughan, *Multiplicative number theory. I. Classical theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 97. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xviii+552 pp.

[3] T. Vijayaraghavan, On a problem in elementary number theory, *J. Indian. Math. Soc.* (N.S), **15** (1951), 51-56.

[4] D.H Lhemer, The distribution of totatives, *Canad. J. Math.*, **7** (1955), 347-357.