# Série thêta

F. Cléry

**Résumé**

Nous démontrons les formules d'inversion de séries thêta avec ou sans caractère. Cela nous permet d'obtenir la modularité de la fonction $\eta$ de Dedekind. La référence principale de cette note est l'ouvrage de N. Koblitz *Introduction to Ellipitic Curves and Modular Forms.* ([Ko]).

# 1 Rappels

## 1.1 Transformée de Fourier

Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions réelles à valeurs complexes indéfiniment dérivables à décroissance rapide au voisinage de l'infini :

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall N \in \mathbb{N} \lim_{x \to \pm\infty} |x|^N f(x) = 0 \right\}.$$

La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est un élément de cet espace.

La transformée de Fourier est l'opérateur suivant :

$$\left( \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array} \right)$$

où

$$\hat{f} : \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi xy} \mathrm{d}x \end{array} \right).$$

**Proposition 1.1** *Soit $f \in \mathcal{S}$.*

*1) Si $a \in \mathbb{R}$ et $g(x) = f(x+a)$ alors $\hat{g}(y) = e^{2i\pi ay}\hat{f}(y)$.*

*2) Si $a \in \mathbb{R}$ et $g(x) = e^{2i\pi ax} f(x)$ alors $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-a)$.*

*3) Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $g(x) = f(ax)$ alors $\hat{g}(y) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{y}{a})$.*

**Lemme 1.2** $\boxed{\text{Si } f(x) = e^{-\pi x^2} \text{ alors } f = \hat{f}.}$

*Preuve.*
Par définition de la transformée de Fourier, on a $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi xy}\mathrm{d}x$ donc $\hat{f}(y)' = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\pi x(2iy+x)}\mathrm{d}x$. On intègre alors par parties et on obtient $\hat{f}(y)' = -2\pi y\hat{f}(y)$ donc $\hat{f}(y) = \hat{f}(0)e^{-\pi y^2}$ et $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1$ (pour obtenir cette égalité, on considère le carré et on passe en coordonnées polaires). □

### 1.2 Formule de sommation de Poisson

**Théorème 1.3** *Si $f \in \mathcal{S}$ alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$.*

*Preuve.* Soit $h(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$.
Cette fonction est 1-périodique et possède donc un développement en série de Fourier de la forme :

$$h(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m)e^{2i\pi mx} \quad \text{où} \quad c(m) = \int_0^1 h(x)e^{-2i\pi mx}\mathrm{d}x.$$

On a donc

$$\begin{aligned} c(m) &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi mx}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{-2i\pi mx}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi mx}\mathrm{d}x \\ &= \hat{f}(m). \end{aligned}$$

On se place alors en $x = 0$ pour obtenir le résultat :

$$h(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m).$$

□

## 2 Séries thêta

### 2.1 La plus simple...

Pour tout $t > 0$, on note

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi tn^2}.$$

C'est une fonction analytique réelle dans $\mathbb{R}^{+*}$.

**Proposition 2.1** *On a*
$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t}).$$

*Preuve.* Soit $g(x) = e^{-\pi t x^2} = f(\sqrt{t}x)$ où $f(x) = e^{-\pi x^2}$. En utilisant le troisième point de la proposition 1.1 et $f = \hat{f}$, on obtient
$$\hat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{f}(\frac{y}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}}f(\frac{y}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\frac{y^2}{t}}.$$
La formule de sommation de Poisson permet alors de conclure. $\square$

## 2.2 Les tordues

Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $N$, primitif, non trivial et pair ($\chi(-1) = 1$). Pour tout $t > 0$, on note
$$\theta(\chi, t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \chi(n)e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi(n)e^{-\pi t n^2}.$$
On peut réécrire cette somme de la manière suivante :
$$\theta(\chi, t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{n\equiv 1 \bmod N\\ n\in\mathbb{Z}}} \chi(n)e^{-\pi t n^2} + \cdots + \sum_{\substack{n\equiv N \bmod N\\ n\in\mathbb{Z}}} \chi(n)e^{-\pi t n^2}\right). \quad (1)$$
La dernière somme de cette expression est nulle puisque, par définition du caractère $\chi$, on a $\chi(n) = 0$ si $(n, N) \neq 1$. Pour $1 \leqslant a \leqslant N$, on a
$$\sum_{\substack{n\equiv a \bmod N\\ n\in\mathbb{Z}}} \chi(n)e^{-\pi t n^2} = \sum_{\substack{n=a+kN\\ k\in\mathbb{Z}}} \chi(a)e^{-\pi t(a+kN)^2} = \chi(a)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi N^2 t(k+\frac{a}{N})^2}.$$
Notons, pour $t > 0$ et $a \in [0; 1]$,
$$\theta_a(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t(k+a)^2}.$$

**Remarque 2.2** $\theta_0 = \theta_1 = \theta$

La somme (1) se réécrit alors
$$\theta(\chi, t) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} \chi(a)\theta_{\frac{a}{N}}(N^2 t). \quad (2)$$
Pour $t > 0$ et $a \in [0; 1]$, notons $\theta^a(t)$ la série suivante
$$\theta^a(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi k a}e^{-\pi t k^2}.$$

**Remarque 2.3** $\theta^0 = \theta^1 = \theta$

**Proposition 2.4** *On a* $\theta_a(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta^a(\frac{1}{t})$.

*Preuve.* Pour $a \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = e^{-\pi t(x+a)^2}$ est donnée par (on utilise les points 1 et 3 de la proposition 1.1) :

$$\hat{h}(y) = e^{2i\pi ay}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\frac{y^2}{t}}.$$

On applique alors la formule de sommation de Poisson :

$$\theta_a(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi an}e^{-\pi\frac{n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta^a(\frac{1}{t}).$$

□

Nous aurons besoin du résultat suivant sur les sommes de Gauss, dont une preuve se trouve dans [Mi] pp.80-81 :

**Lemme 2.5** *Soit* $g(\chi) = \sum_{a=1}^{N}\chi(a)e^{2i\pi\frac{a}{N}}$. *Alors, pour tout entier* $k$, *on a*

$$\sum_{a=1}^{N}\chi(a)e^{2i\pi\frac{ak}{N}} = \bar{\chi}(k)g(\chi).$$

**Proposition 2.6** *On a*

$$g(\chi)\theta(\bar{\chi}, t) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\theta^{\frac{a}{N}}(N^2t).$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\theta^{\frac{a}{N}}(N^2t) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi k\frac{a}{N}}e^{-\pi tk^2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{a=1}^{N}\chi(a)e^{2i\pi k\frac{a}{N}}\right)e^{-\pi tk^2}.\end{aligned}$$

Or $\sum_{a=1}^{N}\chi(a)e^{2i\pi k\frac{a}{N}} = \bar{\chi}(k)g(\chi)$, la proposition est donc démontrée. □

**Proposition 2.7** *On a*

$$\theta(\chi, t) = \frac{g(\chi)}{\sqrt{N^2t}}\theta(\bar{\chi}, \frac{1}{N^2t}).$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned}\theta(\chi, t) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\theta_{\frac{a}{N}}(N^2t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{N^2t}}\left(\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\chi(a)\theta^{\frac{a}{N}}(\frac{1}{N^2t})\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{N^2t}}g(\chi)\theta(\bar{\chi}, \frac{1}{N^2t}).\end{aligned}$$

La première égalité est due à la formule (2), la deuxième à la proposition 2.4 et la dernière à la proposition 2.6. □

## 2.3 Application à la fonction $\eta$ de Dedekind

La fonction $\eta$ de Dedekind est définie pour tout $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ par

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geqslant 1} (1 - q^n) \quad \text{où} \quad q = e^{2i\pi\tau}. \tag{3}$$

En utilisant l'identité d'Euler ($\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}}$), on obtient la fonction êta comme une série infinie :

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} \tag{4}$$

Soit $\chi$ l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\{\pm 1\}$ définie par

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv \pm 1 \bmod 12 \\ -1 & \text{si } n \equiv \pm 5 \bmod 12 \\ 0 & \text{si } (n, 12) \neq 1 \end{cases}.$$

Cette application est un caractère de Dirichlet modulo 12, il est primitif, non trivial, pair et quadratique. On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\chi(n) = \left(\frac{12}{n}\right).$$

**Proposition 2.8** *Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, on a*

$$\theta(\chi, -i\frac{\tau}{12}) = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{12}{n}\right) q^{\frac{n^2}{24}} = \eta(\tau).$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'utiliser l'écriture de $\eta$ sous forme de série (voir (3)) et la définition du caractère $\chi$. Les propriétés de caractère $\chi$ nous permettent d'appliquer la proposition 2.7 à la fonction $\eta$. On obtient ainsi la célèbre formule d'inversion :

$$\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\eta(\tau) \tag{5}$$

(on choisit la branche de la racine carrée ayant un argument appartenant à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$). En effet, la proposition 2.7 implique que

$$\eta(\tau) = \theta(\chi, -i\frac{\tau}{12}) = \frac{g(\chi)}{\sqrt{12^2(-i\frac{\tau}{12})}}\theta(\bar{\chi}, \frac{1}{12^2(-i\frac{\tau}{12})})$$

or $\bar{\chi} = \chi$ ($\chi$ est réel) et $g(\chi) = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) - \cos(\frac{5\pi}{6})) = \sqrt{12}$. L'écriture de $\eta$ sous forme de produit implique que

$$\eta(\tau + 1) = e^{\frac{i\pi}{12}}\eta(\tau). \tag{6}$$

Les formules (5) et (6) font de $\eta$ une forme modulaire de poids $\frac{1}{2}$ pour le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ avec un système de multiplicateur traditionellement noté $v_\eta$.

## Références

[Ko] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* Graduate Texts in Mathematics, Second Edition, Springer, **97** (1993).

[Mi] T. Miyake, *Modular forms.* Springer, 1976.