Sur les séries de Dirichlet, leur produit de convolution et la valeur en 1 des fonctions L de Dirichlet

Olivier Ramaré

8 janvier 2010

Résumé

...

1 Fonctions arithmétiques et série de Dirichlet

Donnons-nous une fonction

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}.$$

Dans le contexte qui nous intéresse, on dit que f est une fonction *arithmétique*.

À toute fonction arithmétique f, nous associons sa *série de Dirichlet*

$$D(f, s) = \sum_{n \geq 1} f(n)/n^s. \tag{1}$$

La variable s est complexe a priori, mais, a priori aussi, cette série est seulement formelle. Supposons dans la suite qu'il existe s_0 pour lequel $D(f, s_0)$ converge. Ceci implique en particulier que $n \mapsto f(n)/n^{s_0}$ est bornée et par conséquent $D(f, s_0 + c)$ est absolument convergent dès que $c > 1$. La série $D(f, s)$ converge alors absolument le demi-plan $\Re s > \Re s_0 + 1$.

Le plus petit σ réel tel que $D(f, s)$ soit absolument convergent pour $\Re s > \sigma$ est appelé l'*abscisse de convergence absolue* de $D(f, s)$. L'abscisse de convergence absolue de la fonction ζ de Riemann est égale à 1.

Pour la théorie générale des séries de Dirichlet, voir l'excellente monographie [13]. Ce livre contient beaucoup de la théorie générale des séries de Dirichlet. Les livres [1] et [29] en contiennent des parties substantielles plus spécifiques aux séries de Dirichlet que nous considérons. Signalons ici le théorème d'unicité qui dit que, si les deux séries de Dirichlet $D(f,s)$ et $D(g,s)$ sont absolument convergente pour $\Re s > \sigma$, et si $D(f,s) = D(g,s)$, alors $f = g$.

À partir de deux séries de Dirichlet $D(f,s)$ et $D(g,s)$ absolument convergentes pour $\Re s > \sigma$, nous en construisons une troisième $D(f \star g, s)$ qui est elle aussi absolument convergente pour $\Re s > \sigma$ via

$$\begin{cases} \forall s/\Re s > \sigma, \quad D(f \star g, s) = D(f,s)D(g,s), \\ \forall n \geq 1, (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d). \end{cases} \tag{2}$$

Le lecteur comprendra peut être mieux ce résultat en écrivant le produit de convolution de façon symétrique i.e.

$$(f \star g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2). \tag{3}$$

La relation exprimée en (14) s'établit alors simplement en en réarrangeant les termes du produit des deux séries absolument convergentes $D(f,s)$ et $D(g,s)$. L'opération $\star$ définit ci-dessus sur les fonctions arithmétiques est appelé le *produit de convolution arithmétique*.

2 Série de Dirichlet et multiplicativité

Une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est dite *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{si } n \text{ et } m \text{ sont premiers entre eux.} \end{cases} \tag{4}$$

De façon équivalente, nous pouvons écrire

$$f\big(\prod_p p^{\alpha_p}\big) = \prod_p f\big(p^{\alpha_p}\big) \tag{5}$$

où le produit porte sur tous les nombres premiers et où les α_p sont des entiers positifs ou nuls, dont tous sauf un nombre fini sont nuls. Cette expression montre clairement que la fonction f est complètement déterminée par sa valeur sur les entiers qui sont des puissances de nombres premiers. Réciproquement la donnée de telles valeurs détermine bien une fonction multiplicative, tout simplement en la définissant à partir de l'égalité ci-dessus.

Cette notion de multiplicativité va s'avérer fondamentale. Nous constaterons en particulier que beaucoup de fonctions arithmétiques a priori mystérieuses se comprennent beaucoup mieux lorsque l'on regarde leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers. Avant d'examiner des exemples, notons le lemme suivant que nous utiliserons très souvent :

Lemma 2.1 *Soit f une fonction multiplicative et m et n deux entiers. Nous avons*

$$f([m,n])f((m,n)) = f(m)f(n)$$

où $[m,n]$ et (m,n) désigne respectivement le ppcm et le pgcd des entiers m et n.

3 Exemples

Voici un bréviaire des fonctions usuelles

1. La fonction de Moebius $\mu(n)$ vaut -1 sur chaque nombre premier et 0 sur toutes leurs puissances. La fonction de Liouville $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ en est assez proche : en effet cette dernière est la fonction multiplicative qui vaut $(-1)^\alpha$ sur chaque p^α.
2. $\mu^2(n)$ vaut 0 si n est divisible par un carré > 1 et 1 sinon.
3. $\phi(n)$ est l'indicateur d'Euler, c'est à dire le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers à n, ou encore le cardinal du groupe multiplicatif $\mathcal{U}_n$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous montrons qu'elle est multiplicative grace au lemme chinois. Nous avons $\phi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.
4. $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs (positifs) de n.
5. $d(n)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n.
6. $d(n^2)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n^2. Il s'agit aussi d'une fonction multiplicative de n.

Ces exemples sont de trois natures : tout d'abord, les fonctions que l'on définit directement sur les puissances de nombres premiers. Nosu verrons plus tard que les fonctions μ et λ restent très mytérieuses, comme à peu près toutes les fonctions que l'on définit de cette façon. La fonction μ^2 est mieux connue, mais ceci parce qu'elle appartient en fait à la troisième catégorie !

La seconde catégorie est celle des quantités géométriques. Nous en utiliserons beaucoup dès que nous aborderons la théorie du crible. Leur multiplivativité vient en général du théorème chinois. L'exemple donné est classique, mais nous pouvons aussi considérer

1. la fonction ϕ_2 qui à chaque entier n associe le nombre d'entiers modulo n qui sont premiers à n et tels que $n+2$ qui le sont aussi,
2. la fonction qui à chaque entier n associe le nombre de carrés modulo n.

La troisième catégorie provient des ensembles de diviseurs et nous leur consacrons une section entière.

4 Multiplicativité et produit de convolution arithmétique

Commençons par détailler ce pourquoi la fonction qui à n associe son nombre de diviseurs est multiplicative. Ceci repose en fait sur la structure de l'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des diviseurs de n. Tout d'abord

$$\mathcal{D}(p^\alpha) = \bigl\{1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1} bigr\}. \tag{6}$$

Ensuite, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, chaque diviseur du produit $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ est de la forme $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$ avec $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$ et $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$. Par ailleurs, chaque entier de cette forme est bien un diviseur de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Ceci nous donne

$$\mathcal{D}\bigl(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\bigr) = \mathcal{D}\bigl(p_1^{\alpha_1}\bigr) \cdot \mathcal{D}\bigl(p_2^{\alpha_2}\bigr). \tag{7}$$

Nous montrons de la même façon que $\mathcal{D}(mn) = \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n)$ si m et n sont premiers entre eux. De façon explicite la fonction suivante est une bijection :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}(mn) & \rightarrow & \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n) \\ d & \mapsto & \bigl((d,m),(d,n)\bigr). \end{array} \tag{8}$$

Il s'agit là d'une forme de multiplicativité au niveau des ensembles, et que nous allons exploiter sous la forme suivante : pour toute fonction F, l'identité suivante a lieu dès que m et n sont deux entiers premiers entre eux

$$\sum_{d|mn} F(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} F(d_1 d_2). \tag{9}$$

En notant 1 la fonction qui vaut 1 sur tous les entiers, nous avons $d(n) = 1 \star 1$. Le théorème général suivant nous donne la multiplicativité de toute une kyrielle de fonctions :

Theorem 4.1 *Si f et g sont deux fonctions multiplicatives, il en est de même de $f \star g$.*

Preuve : La valeur en 1 est aisée : $f \star g(1) = f(1)g(1) = 1$. Soit ensuite deux entiers m et n premiers entre eux. Nous avons

$$(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f(mn/d)g(d)$$

et appliquons (9) :

$$\begin{aligned}(f \star g)(mn) &= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f\Big(\frac{mn}{d_1 d_2}\Big) g(d_1 d_2)\\ &= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f\Big(\frac{m}{d_1}\Big) f\Big(\frac{n}{d_2}\Big) g(d_1)g(d_2) = (f \star g)(m)(f \star g)(n)\end{aligned}$$

comme requis. ◇◇◇

Ceci nous donne d'un seul coup la multiplicativité de beaucoup de fonctions, en partant des exemples simples que sont les fonctions 1 et plus généralement $X^a : n \mapsto n^a$. En particulier, le lecteur vérifiera que

$$d(n) = (1 \star 1)(n), \quad \sigma(n) = (1 \star X)(n).$$

Cette convolution nous permet aussi d'exprimer simplement certaines relations, comme

1. $d(n^2) = (1 \star 2^{\omega(X)})(n)$.
2. $\mu^2(n) = (1 \star 1_{X^2})(n)$ où 1_{X^2} est la fonction caractéristique des carrés.

5 Série de Dirichlet et multiplicativité

Nous nous donnons ici une fonction arithmétique multiplicative f que nous supposerons bornée en valeur absolue par 1. Nous pouvons dans tous les cas pratiques nous ramener à ce cas, quitte à considérer une fonction auxiliaire de la forme $f(n)/n^a$ qui est, elle aussi, multiplicative (dès lors que f l'est).

Soit $y \geq 1$ un paramètre réel. Nous considérons la fonction multiplicative f_y définie par

$$\begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1, f_y(p^a) = f(p^a), \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1, f_y(p^a) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

(p est ici un nombre premier) et, de façon symétrique,

$$\begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = 0, \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = f(p^a). \end{cases} \tag{11}$$

Notons que nous avons l'équation

$$f = f_y \star f^y \tag{12}$$

Preuve : En effet, les sommants de la somme

$$\sum_{d_1 d_2 = n} f_y(d_1) f^y(d_2)$$

sont presque tous nuls puisque l'entier n admet une unique écriture sous la forme $n = \ell m$ où tous les facteurs premiers de ℓ sont inférieurs y et tous ceux de m sont strictement supérieurs à y. La somme ci-dessus se réduit donc à $f_y(\ell)f^y(m)$ qui vaut bien $f(n)$. ⋄⋄⋄

Nous posons alors

$$D_y^\flat(f,s) = D(f_y,s), \quad D_y^\sharp(f,s) = D(f^y,s) \tag{13}$$

de telle sorte que $D(f,y) = D_y^\flat(f,s) D_y^\sharp(f,s)$. La série de Dirichlet $D_y^\flat(f,s)$ se réduit à un produit, pour $\Re s > 1$:

$$D_y^\flat(f,s) = \prod_{p \leq y} \Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots \Big). \tag{14}$$

La série $D_y^\sharp(f,s)$ tend à dévenir petite lorsque y tend vers l'infini. En effet, avec $\sigma = \Re s$,

$$|D_y^\sharp(f,s) - 1| \leq \sum_{n>y} 1/n^\sigma \leq y^{-\sigma} + \int_y^\infty dt/t^\sigma \leq \frac{\sigma}{(\sigma-1)y^{\sigma-1}}. \tag{15}$$

En laissant y tendre vers l'infini, nous obtenons donc l'expression de $D(f,s)$ sous forme d'un produit dit *eulérien*

$$D(f,s) = \prod_{p \geq 2} \Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots \Big), \quad (\Re s > 1), \tag{16}$$

où chaque facteur est dit le facteur *local*, ou *eulérien*, en p.

Convergence et produit convergent

Nous ouvrons ici une parenthèse sur la signification de (16). La suite $1/2$, $(1/2) \times (1/2)$, $(1/2) \times (1/2) \times (1/2)$, et de terme général $(1/2)^n$, est convergente, et de limite 0. Ici, rien de neuf. Toutefois, par une maladresse terminologique, on dit qu'un produit (formel) infini

$$\prod_{n \geq 1} a_n$$

est convergent si et seulement

1. La suite des produits partiels converge vers une limite, disons P ;
2. $P \neq 0$.

L'equation (16) donne donc une écriture sous forme de produit, c'est à dire comme la limite d'une suite de produits partiels qui converge vers une limite, mais il faut en général vérifier la condition 2 ci-dessus. Parfois on dit que le produit *converge strictement* lorsque cette condition est vérifiée.

Convergence et produit convergent : le point de vue de Godement

En cours d'exposé, Hervé Queffelec nous a présenté le point de vue suivant, qui est efficace et limpide.

Godement dit que le produit $\prod_{n\geq 1} a_n$ est absolument convergent en tant que produit si $\sum_{n\geq 1} |a_n - 1| = M < \infty$. Ceci à cause du théorème suivant :

Theorem 5.1 *Supposons que* $\sum_{n\geq 1} |u_n| = M < \infty$. *Alors*

1. $P_n = \prod_{1\leq j\leq n}(1+u_j) \to P \in \mathbb{C}$.
2. *Si* $1+u_j \neq 0$ *pour tout* j *alors* $P \neq 0$.

Preuve : Nous avons $P_n - P_{n-1} = u_n P_{n-1}$ et donc

$$|P_n - P_{n-1}| \leq |u_n||P_{n-1}| \leq |u_n| \prod_{1\leq j\leq n-1} e^{|u_j|} \leq |u_n| e^M.$$

Il en résulte que la série $\sum_n (P_n - P_{n-1})$ est absolument convergente, et donc la suite P_n converge, disons vers $P \in \mathbb{C}$.

Pour montrer que $P \neq 0$, on exhibe Q tel que $PQ = 1$. Quoi de plus naturel que de chercher Q sous la forme d'un autre produit infini $Q = \prod_{j\geq 1}(1+v_j)$, avec $\sum_{j\geq 1} |v_j| < \infty$? L'idéal serait d'ajuster v_j pour avoir $(1+u_j)(1+v_j) = 1$ pour tout j. Or c'est possible car $1+u_j \neq 0$. Et ça donne

$$v_j = \frac{1}{1+u_j} - 1 = \frac{-u_j}{1+u_j}, \quad \text{d'où } |v_j| \sim |u_j|$$

et tout est dit. $\diamond\diamond\diamond$

Les logarithmes sont cachés dans les majorations $1+x \leq e^x$ et $P_{n-1} \leq e^M$. Mais leur présence reste discrète.

Un détour historique

La décomposition (12) a été beaucoup exploitée, notamment par [2] (voir aussi [3] et [4]) et permet dans l'article cité de donner une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. Cette décomposition est au cœur du travail récent [8] où les auteurs développent la philosophie suivante : le comportement de la fonction f_y est très bien décrit par son produit eulérien alors que le comportement de f^y est lui décrit par des équations fonctionnelles (ce que nous ne décrivons pas ici). Essayer de réduire la compréhension d'une fonction multiplicative f à la composante f_y est l'essence des méthode dites probabilistes, notoirement développées par Kubilius.

6 Fonctions L de Dirichlet

Nous pouvons maintenant définir la fonction L de Dirichlet associée à un caractère de Dirichlet χ :

$$L(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n)/n^s. \tag{17}$$

Comme χ est une fonction multiplicative, la série L associée possède un produit eulérien

$$\begin{aligned}
L(s,\chi) &= \prod_{p\geq 2}\Big(1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\frac{\chi(p^3)}{p^{3s}}+\cdots\Big)\\
&= \prod_{p\geq 2}\Big(1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p)^2}{p^{2s}}+\frac{\chi(p)^3}{p^{3s}}+\cdots\Big)\\
&= \prod_{p\geq 2}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \qquad (\Re s>1).
\end{aligned}$$

Exercice : Supposons que χ soit équivalent au caractère primitif χ^*. Montrer que $L(s,\chi)$ et $L(s,\chi^*)$ ne diffère que d'un facteur très simple.

Le produit eulérien ci-dessus converge en tant que produit i.e. ne s'annule pas. Tout simplement parce que la série $\sum_{p\geq 2}\mathrm{Log}(1-\chi(p)/p^s)$ converge, et ce parce que

$$\mathrm{Log}(1-\chi(p)/p^s) = -\chi(p)/p^s + \mathcal{O}(1/p^{2s}).$$

Continuons notre investigation.

Lemma 6.1 *Soit χ un caractère non principal modulo q. Nous avons*

$$\sum_{n \mod q} \chi(n) = 0.$$

Nous n'imposons pas à χ d'être primitif modulo q.

Preuve : En effet, il existe un m dans $\mathcal{U}_q = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ tel que $\chi - m) \neq 1$ (et ne s'annule pas non plus !). La fonction sur $\mathcal{U}_q$ qui à n associe mn est une bijection et donc

$$\sum_{n \mod q} \chi(n) = \sum_{n \mod q} \chi(mn) = \chi(m) \sum_{n \mod q} \chi(n).$$

Cela nous donne par conséquent

$$(1 - \chi(m)) \sum_{n \mod q} \chi(n) = 0$$

d'où le résultat. $\diamond\diamond\diamond$

Ce lemme implique que la fonction $L(s, \chi)$ associée à un caractère non principal se prolonge au demi-plan $\Re s > 0$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \sum_{1 \leq n \leq N} \chi(n) n^{-s} + s \sum_{1 \leq n \leq N} \chi(n) \int_n^\infty dt/t^{s+1} \\ &= \sum_{1 \leq n \leq N} \chi(n) n^{-s} + \int_N^\infty \sum_{N < n \leq t} \chi(n) dt/t^{s+1}. \end{aligned}$$

La somme à l'intérieurde l'intégrale est bornée, ce qui nous donne donc un prolongement de $L(s, \chi)$ au demi-plan $\Re s > 0$. En prenant $N = q(2 + |t|)$ où $t = \Im s$, nous obtenons

$$|L(s, \chi)| \leq \operatorname{Log}(q(2 + |t|)) + \mathcal{O}(1) \qquad (\Re s \geq 1, \Im s = t).$$

Nous obtenons en particulier $|L(1, \chi)| \leq \operatorname{Log} q + \mathcal{O}(1)$. Cette estimation peut s'améliorer assez facilement en $|L(1, \chi)| \leq \frac{1}{2} \operatorname{Log} q + \mathcal{O}(\operatorname{Log} \operatorname{Log} q)$. Le lecteur trouvera dans [28] [24] [25] [11] [12] [10] [9]

7 Minoration de $L(s, \chi)$ sur $\Re s = 1$

Minoration des $L(s, \chi)$ sur $\Re s = 1$.

Concernant la valeur en 1 des fonctions L de Dirichlet, il convient de citer la série d'articles [15], [16], [17], [18], [20], [21], [22], [19] et [23]. Ces articles traitent simplement de beaucoup de problèmes concernant ces valeurs et permettent donc d'avoir une vue d'ensemble. On trouvera une minoration de $L(1, \chi)$ légèrement meilleure à la minoration commune dans [26].

Concernant la valeur en 1 des fonctions L de Dirichlet associées à des caractères quadratiques, lire [5], [6], [14], [27] et [7].

Références

[1] T.M. Apostol. *Introduction to analytic number theory.* Springer-Verlag, New York, 1976. Undergraduate Texts in Mathematics.

[2] H. Daboussi. Sur le théorème des nombres premiers. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*, 298 :161–164, 1984.

[3] H. Daboussi. Effective estimates of exponential sums over primes. *Analytic number theory. Vol. 1. Proceedings of a conference in honor of Heini Halberstam, May 16-20, 1995, Urbana, IL, USA. Boston, MA: Birkhaeuser. Prog. Math.*, 138 :231–244, 1996.

[4] H. Daboussi and J. Rivat. Explicit upper bounds for exponential sums over primes. *Math. Comp.*, 70(233) :431–447, 2001.

[5] D. Goldfeld. The Class Number of Quadratic Fields and the Conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 4 :623–663, 1975.

[6] D. Goldfeld. Gauss's class number problem for imaginary quadratic fields. *Bull. Amer. Math. Soc. (1)*, 13 :23–37, 1985.

[7] D. Goldfeld and A. Schinzel. On Siegel's zero. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 4 :571–575, 1975.

[8] A. Granville and K. Soundararajan. The spectrum of multiplicative functions. *Ann. of Math. (2)*, 153(2) :407–470, 2001.

[9] A. Granville and K. Soundararajan. Upper bounds for $|L(1,\chi)|$. *Q. J. Math.*, 53(3) :265–284, 2002.

[10] A. Granville and K. Soundararajan. Decay of mean values of multiplicative functions. *Can. J. Math.*, 55(6) :1191–1230, 2003.

[11] A. Granville and K. Soundararajan. The distribution of values of $L(1,\chi)$. *Geom. Func. Anal.*, 13(5) :992–1028, 2003. `http://www.math.uga.edu/\string~andrew/Postscript/L1chi.ps`.

[12] A. Granville and K. Soundararajan. Errata to : The distribution of values of $L(1,\chi)$, in GAFA 13 :5 (2003). *Geom. Func. Anal.*, 14(1) :245–246, 2004.

[13] G. H. Hardy and M. Riesz. *The general theory of Dirichlet's series.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964. Première édition en 1915.

[14] J. Oesterlé. Nombres de classes des corps quadratiques imaginaires. *Astérisque*, 121/122 :309–323, 1985.

[15] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, I. Hecke's theorem. *Acta Arith.*, 31 :53–60, 1976.

[16] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, II. on the greatest real zero of a real L-function. *Acta Arith.*, 31 :273–289, 1976.

[17] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, III. The Deuring phenomenom. *Acta Arith.*, 31(3) :295–306, 1976.

[18] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, IV. The Heilbronn phenomenon. *Acta Arith.*, 31(4) :419–429, 1976.

[19] J. Pintz. Corrigendum : "elementary methods in the theory of L-functions, VII. Upper bound for $L(1,\chi)$". *Acta Arith.*, 33(3) :293–295, 1977.

[20] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, V. The theorems of Landau and Page. *Acta Arith.*, 32(2) :163–171, 1977.

[21] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, VI. On the least prime quadratic residue (modρ). *Acta Arith.*, 32(2) :173–178, 1977.

[22] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, VII. Upper bound for $L(1,\chi)$. *Acta Arith.*, 32(4) :397–406, 1977.

[23] J. Pintz. Elementary methods in the theory of L-functions, VIII. Real zeros of real L-functions. *Acta Arith.*, 33(1) :89–98, 1977.

[24] O. Ramaré. Approximate Formulae for $L(1,\chi)$. *Acta Arith.*, 100 :245–266, 2001.

[25] O. Ramaré. Approximate Formulae for $L(1,\chi)$, II. *Acta Arith.*, 112 :141–149, 2004.

[26] O. Ramaré. Comparing $L(s,\chi)$ with its truncated Euler product and generalization. *Functiones et Approximatio*, page 7pp, 2009.

[27] O. Ramaré. A purely analytical lower bound for $L(1,\chi)$. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 16(2) :259–265, 2009.

[28] P.J. Stephens. Optimizing the size of $L(1,\chi)$. *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.*, 24 :1–14, 1972.

[29] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, volume 1 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, second edition, 1995.