Exposé du 3 Mai 010

① Motivation : Étude ~~des~~ analytique des séries de Dirichlet $\sum^{\infty} a_n n^{-it}$, $t \in \mathbb{R}$, uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$ (alors $\sum |a_n|^2 < \infty$) ou ~~absolument convergent~~ bornées sur $\mathbb{R}$: pareil. (et $\sum |a_n| < \infty$)

Dans cette étude, le théorème d'approximation simultanée de Kronecker joue un rôle essentiel. Or, ce théorème est très lié à l'analyse harmonique. De même, $f(t) = \sum a_n n^{-it}$ se prolonge continûment à une compactification de $\mathbb{R}$, appelée le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$.

Un cadre raisonnable est celui de l'analyse harmonique sur les groupes abéliens localement compacts.

Le cas le plus important est celui des groupes compacts G, mais alors $\widehat{G}$ est discret ; on pourrait se limiter alors aux groupes compacts ou discrets (cf. définition de l'espace de Schwartz). Mais il y a $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, et la formule sommatoire de Poisson $\sum f(n) = \sum \hat{f}(n)$ vient précisément d'une comparaison entre l'analyse harmonique sur $\mathbb{R}$ et sur son groupe-quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$. Bref, le cas localement compact paraît un degré de généralité raisonnable, et surtout stable :

$$G \text{ galc} \Rightarrow \widehat{G} \text{ galc.}$$

Objet central : G galc, et aussitôt $\widehat{G}$ son dual.

② Mesure de Haar m régulière et algèbre de Banach $L^1(G)$, transformée de Fourier

Existence / Unicité / Symétries : $\iint f(x+y)\, dm_1(x)\, dm_2(y)$.

Caractère diffus : $m(\Omega) > 0$. Sinon, $\forall$ cpt $\Rightarrow m(K) = 0$, puis par régularité E borélien $\Rightarrow m(E) = 0$.

En particulier, $m(E^c) = 0 \Rightarrow E$ dense dans G.

Utilité : isométries translations.

Qui dit m dit algèbre de Banach $L^1(G)$, $*$.

Non-unitaire si G n'est pas compact, mais possède des unités approchées.

$L^1(G)$ involutive $\left(\|\tilde{f}\| = \|f\| \text{ si } \tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}\right)$. Pas une C^*-algèbre : $\|\tilde{f} f\| \neq \|f\|_1^2$.

$f = \tilde{f} = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \to f * f = \max(1-|x|, 0)$, et $\|f * \tilde{f}\| = 1$. Raté !

Thm de Bochner-Riesz-Raikov : A alg. de Banach commutative unitaire. $L \in A^*$ fl positive : $L(\tilde{a}a) \geq 0$. Alors :

1) $|L(a)| \leq L(e)\, \ell(a) \quad \forall a$
2) Si $L(a) \neq 0$, $\exists\, \chi \in Sp A \,/\, \chi(a) \neq 0$.

Preuve : 1) CS $\Rightarrow |L(a\tilde{b})|^2 \leq L(a\tilde{a})\, L(b\tilde{b})$. Avec $b = e$ et en itérant

$$|L(a)| \leq L(e)^{1/2} L(a\tilde{a})^{1/2} \leq L(e)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} |L((a\tilde{a})^2)|^{1/4} \leq \ldots L(e)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} \left[L\left((a\tilde{a})^{2^{n-1}}\right)\right]^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\leq L(e)\, \|L\|^{2^{-n}} \|(a\tilde{a})^{2^{n-1}}\|^{2^{-n}}. \text{ Puis } n \to \infty \Rightarrow$$

$$|L(a)| \leq L(e)\, \ell(a\tilde{a})^{1/2}. \text{ Mais } \chi \in Sp A \Rightarrow$$

$$|\chi(a\tilde{a})| = |\chi(a)|\,|\chi(\tilde{a})| = |\chi(a)|\,|\psi(a)|, \text{ où } \psi(a) = \overline{\chi(\tilde{a})} \in Sp A.$$

D'où $|\chi(a\tilde{a})| \leq \ell(a)^2$, puis $\ell(a\tilde{a}) \leq \ell(a)^2$ et finalement
$|L(a)| \leq L(e)\, \ell(a)$.

2) Si $L(a) \neq 0$, le 1) montre que $\ell(a) > 0$, et donc $\exists\, \chi / \chi(a) \neq 0$. $\square$

Théorème du spectre : $Sp\, L^1(G) = \widehat{G}$, au sens où (1.2.2. page 7)

1) $\gamma \in \widehat{G} \Rightarrow f \mapsto \widehat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\, \gamma(-x)\, dm(x) \in Sp A$.

2) Tout élt de $Sp A$ s'obtient ainsi.

3) Si on munit Γ de la topo de $Sp A$, $\widehat{f} \in C_0(\Gamma)$ (Riemann-Lebesgue).

Pour l'instant, Γ est muni de topo de $Sp\, L^1(G)$, qui le rend localt compact.

Théorème de Stone-Weierstrass :

1) $A(\Gamma)$ sous-algèbre dense de $C_0(\Gamma)$, invariante par translation et rotation (i.e. $F \in A(\Gamma) \Rightarrow \gamma(x) F = \gamma F \in A(\Gamma)\ \forall \gamma \in \Gamma$).

2) $\widehat{f * \gamma} = \gamma \widehat{f}$

Cor : G compact $\Rightarrow \Gamma$ discret. G discret $\Rightarrow \Gamma$ compact.

Théorème sur la topo de Γ : K cpct de G, $\varepsilon > 0$.
$V(K, \varepsilon) = \{\gamma / |\gamma(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall x \in K\}$. Alors :
$V(K, \varepsilon)$ ouvert ds Γ, en translatant, on obtient une base d'ouvert de Γ, qui est un groupe topo loct cpct.
Si C cpct de Γ, $V(C, \varepsilon) = \{x / \quad \}$ = ouvert de G.

Théorème d'unicité

1) $\hat{}$ est injective sur $L^1(G)$: $\hat{f}=0 \Rightarrow f=0$.
2) Γ sépare les pts de G.

Preuve: On plonge $L^1(G)$ dans $M(G)$, unitaire (δ_0). On fixe $\varphi \in \mathcal{K}(G)$

$$L_\varphi(\mu) = \tilde{\varphi} * \varphi * \mu(0) = \int \tilde{\varphi} * \varphi(-x)\,d\mu(x)$$

$L_\varphi(\tilde{\mu} * \mu) = \mu * \varphi * \tilde{\mu} * \varphi(0) = \|\mu * \varphi\|_2^2 \geq 0$, car $f * \tilde{f}(0) = \int |f(t)|^2\,dt$.
Si $\mu \neq 0$, $\exists \varphi \,/\, L_\varphi(\mu * \tilde{\mu}) \neq 0$. Par ~~Bochner~~-Weil-Raikov: $\exists \chi \in Sp\,M(G) /$
$\chi(\mu * \tilde{\mu}) = \chi(\mu)\chi(\tilde{\mu}) \neq 0 \Rightarrow \chi(\mu) \neq 0$. Ainsi
$\mu \neq 0 \Rightarrow \exists \chi \in Sp\,M(G) \,/\, \chi(\mu) \neq 0$. Par restriction à $L^1(G)$:
$f \neq 0 \Rightarrow f\,dx \neq 0 \Rightarrow \exists \chi \in Sp\,M(G) / \chi(f) \neq 0$, par restriction $\exists \gamma / \hat{f}(\gamma) \neq 0$.

2) $x, y \in G$ et $x \neq y$. Par Urysohn, $\exists \varphi \in \mathcal{K}(G) / \varphi(x)=1, \varphi(y)=0$.
$\tau_{+x}\varphi \neq \tau_{+y}\varphi$ $\neq 0$, donc $\exists \gamma /$ $\widehat{\tau_x \varphi}(\gamma) \neq \widehat{\tau_y\varphi}(\gamma)$, i.e.

$\gamma(x)\hat{\varphi}(\gamma) \neq \gamma(y)\hat{\varphi}(\gamma) \Rightarrow \gamma(x) \neq \gamma(y)$. (Avec la déf $\tau_a f(x) = f(x+a)$, on a $\widehat{\tau_a f}(\gamma) = \gamma(a)\hat{f}(\gamma)$)

Corollaire topologique: H sous-groupe de G. LASSE

1) $\overline{H} = G$.
2) $H^\perp = \{1\}$. Comparer à Hahn-Banach.

Preuve. 2) $\Rightarrow$ 1). Si $\overline{H} \neq G$, $G/\overline{H} = \text{galc} \neq \{0\}$.

$G \xrightarrow{\sigma} G/\overline{H} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{T}$. Soit $x \in G$ tel que $\sigma(x) \neq 0$, puis

d'après le théorème d'unicité soit $\gamma \in \widehat{G/\overline{H}}$ tq $\gamma(\sigma(x)) \neq 1$. Alors, $\gamma \circ \sigma \in \hat{G}$,
$\gamma \circ \sigma \in H^\perp$, $\gamma \circ \sigma \neq 1$, contredisant l'hypothèse.

Théorème de pérunicité: $\mu \in M(\Gamma)$, $\mu_\wedge(x) = \int \gamma(-x)\,d\mu(\gamma) = 0 \quad \forall x \in G$.
Alors, $\mu = 0$.

Preuve: $f \in L^1 \Rightarrow \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\,d\mu(\gamma) = \int_G \mu_\wedge(x) f(x)\,dx = 0$. Comme $A(\Gamma)$ dense

dans $C_0(\Gamma)$, $\mu = 0$. $\square$

Théorème de Bochner: $\phi : G \to \mathbb{C}$, continue et de type positif. Alors, $\exists \mu \geq 0$ / $\phi = \mu_\wedge$ (réciproque trivialt vraie).

Preuve: d'abord, $f \in K(G) \Rightarrow \iint \phi(x-y) f(x) \overline{f(y)}\, dx\, dy \geq 0$, et $|\phi(x)| \leq \phi(0)$, en traitant $\sum c_i \overline{c_j}\, \phi(x_i - x_j) \geq 0$ sur $x_1 = 0$, $x_2 = x$
$c_1 \overline{c_1}\, \phi(0) + c_1 \overline{c_2}\, \phi(-x) + c_2 \overline{c_1}\, \phi(x) + c_2 \overline{c_2}\, \phi(0) = 0$, et $\phi(-x) = \overline{\phi(x)}$

$\begin{vmatrix} \phi(0) & \phi(x) \\ \overline{\phi(x)} & \phi(0) \end{vmatrix} \geq 0$, etc..

Soit $L \in L^1(G)^*$ définie par $L(f) = \int_G \phi f\, dx$, en même $L(\mu) = \int \phi\, d\mu$.

$[f, g] \stackrel{\text{déf}}{=} \iint f(x) \overline{g(y)}\, \phi(x-y)\, dx\, dy$ produit scalaire semi ≥ 0 sur L^1

CS $\Rightarrow |L(f)|^2 = |[f, g]|^2 \leq [f, f][g, g]$. En prenant pour g une unité approchée, $g = \frac{1_V}{m(V)}$, V ouvert $\to 0$, on a

$[g, g] - 1 = \frac{1}{m(V)^2} \int_{V \times V} [\phi(x-y) - 1]\, dx\, dy \to 0$, car ϕ est unift continue.

$|\phi(x+h) - \phi(x)|^2 \leq 2(1 - \Re \phi(h))$ si $\phi(0) = 1$. Bref, il vient

$|L(f)|^2 \leq [f, f] = L(\tilde{f} * f)$, soit $|L(f)| \leq L(\tilde{f} * f)^{1/2}$.

Bochner – Weil – Raikov pour algèbre avec unités approchées!
De proche en proche, $|L(f)|^2 \leq |L(h^{2^n})|^{2^{-n}} \leq \| h^{2^n} \|_1^{2^{-n}}$, $h = \tilde{f} * f$.

$|L(f)|^2 \leq \| \hat{h} \|_\infty = \| \hat{f} \|_\infty^2$, $\underline{|L(f)| \leq \| \hat{f} \|_\infty}$, car rlog, $\phi(0) = 1$.

L flc sur $A(\Gamma)$ avec norme sup (Nous, nous savons que $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f = g$), définie par $L(\hat{f}) = \int \phi(x) f(x)\, dx$! Par densité et Riesz, $\exists \mu \in M(\Gamma)$ /

$\int \phi(x) f(x)\, dx = \int \hat{f}(-\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int f(x)\, \mu_\wedge(x)\, dx$, où $\mu_\wedge(x) = \int \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$.

Par suite, $\phi = \mu_\wedge$. $\square$

③ Théorème d'inversion et théorème de Plancherel

$B(G) = \{ \mu_\wedge ; \mu \in M(\Gamma) \}$.

Théorème d'inversion: Si $f \in L^1(G) \cap B(G)$, alors:

1) $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.
2) Si dx est fixée, on peut fixer $d\gamma$ pour avoir $f(x) = \int \hat{f}(\gamma)\gamma(x)\,dx$, $\forall f \in L^1 \cap B$

Nombreuses conséquences:

1) La topo de G est de la UC sur les compacts de Γ.

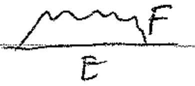
2) $f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \int |\hat{f}|^2 d\gamma = \int |f|^2 dx$, via thm d'inversion, et $f \mapsto \hat{f}$ se prolonge en un opérateur unitaire $L^2 \to L^2$. On applique Bochner à $g = f * \tilde{f}$, continue et définie positive. $g(0) = \int \hat{g}(\gamma)\,d\gamma$, etc.

3) $A(\Gamma) = \{ F_1 * F_2 ; \; F_j \in L^2(\Gamma) \}$.

Car si $f, g \in L^2$ et $\gamma_0 \in \Gamma$, nous avons Plancherel $\int f\bar{g}\,dx = \int \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}\,d\gamma \Rightarrow$
$\int f(x)g(x)\overline{\gamma_0(x)}\,dx = \int \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma_0 - \gamma)\,d\gamma = \hat{f} * \hat{g}(\gamma_0) \Rightarrow \hat{f} * \hat{g} = \widehat{fg} \in A(\Gamma)$.

Réciproquement, $h \in L^1 \Rightarrow h = fg$ avec $f, g \in L^2 \Rightarrow \hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$

4) Si $E \subset \Gamma$ est ouvert non-vide, $\exists\, F = \hat{f} \in A(\Gamma)$, $F \neq 0$, nulle hors de E.



Preuve: K compact $\subset E$ avec $m(K) > 0$, V voisinage compact de 0 / $K + V \subset E$.
$1_K, 1_V \in L^2 \Rightarrow 1_K * 1_V \in A(\Gamma)$, portée par E,

et $\int 1_K * 1_V = \int \left(\int 1_K(x-y) 1_V(y)\,dy \right) dx = \int 1_V(y) \left(\int 1_K(x-y)\,dx \right) dy = \int 1_V(y)\, m(K)\,dy = m(K)m(V) > 0$.

4) pourrait s'appeler le principe de localisation.

(4) Théorème de réflexivité automatique de Pontryagin:

Soit $\alpha : G \longrightarrow \hat{\Gamma}$ définie par $\alpha(x)(\gamma) = \gamma(x)$.

<u>Théorème de Pontryagin:</u> $\alpha : G \longrightarrow \hat{\Gamma}$ isomorphisme <u>surjectif</u>.

$\hat{G} = \Gamma \Rightarrow \hat{\Gamma} = G$.

À comparer au cas des Banach. La preuve se décompose en trois:

(1) $\alpha : G \longrightarrow \hat{\Gamma}$ homéo, en particulier $\alpha(G)$ est localement compact.

(2) $\alpha(G)$ est fermé dans $\hat{\Gamma}$ (pareil avec les Banach).

<u>Lemme:</u> Un sous-gpe loct compact H d'un gpe topo Γ est fermé ds Γ.

<u>Preuve:</u> V voisin de 0 ds Γ tq $V \cap H$ compact, donc fermé ds Γ. Soit $a \in \bar{H}$ et (x_α) un filtre d'élts de H, $x_\alpha \longrightarrow a$. $\exists F \in \mathcal{F}$ tq $\alpha, \beta \in \mathcal{F} \Rightarrow x_\alpha - x_\beta \in V$. Fixons $\beta \in F$, $\alpha \to \infty$, $\alpha \in F \Rightarrow x_\alpha - x_\beta \longrightarrow a - x_\beta$, et $x_\alpha - x_\beta \in V \cap H \Rightarrow$ $a - x_\beta \in V \cap H \Rightarrow a = (a - x_\beta) + x_\beta \in H$. □

(3) $\alpha(G)$ est dense ds H (le scoop!).

Sinon, soit E ouvert non-vide, $\alpha(G) \cap E = \emptyset$. Soit $F \in A(\hat{\Gamma})$, portée par E, $F \neq 0$.
$F(\hat{\gamma}) = \int_\Gamma \phi(\gamma)\, \hat{\gamma}(-\gamma)\, d\gamma$, avec $\phi \in L^1(\Gamma)$. <u>(localisation)</u>

On a $F(\alpha(x)) = \int \phi(\gamma)(-x, \gamma)\, d\gamma = 0 \Longrightarrow \phi_\wedge = 0 \Rightarrow \phi = 0$ (thm d'unicité).

Donc, $F = \hat{\phi} = 0$, ce qui est contradictoire.

<u>Remarque:</u> appeler $\hat{\gamma} = 1$ sur $\alpha(G) \Rightarrow \hat{\gamma} = 1$ plausible, mais prématuré.

Plus dans (5)!

(5) Résultats d'approximation.

$\overline{G} = \widehat{\Gamma_d}$ = groupe de tous les caractères sur Γ = compactifié de Bohr de G.

$B : G \to \overline{G}$ défini par $B(x)(\gamma) = \gamma(x)$.

<u>Théorème 1</u>: B iso continu $G \to B(G)$ sous-groupe dense de $\overline{G}$

<u>Preuve</u>: Il s'agit de montrer que si $\chi \in \widehat{\overline{G}}$ est 1 sur $B(G)$, alors $\chi = 1$.
Mais $\overline{G} = \widehat{\Gamma_d}$. Par Pontryagin, $\widehat{\overline{G}} = \Gamma_d$, et il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que

$\chi(\overline{g}) = \overline{g}(\gamma_0)\ \forall \overline{g} \in \overline{G}$. En testant sur $B(G)$:

$\chi(B(x)) = \gamma_0(B(x)) = \gamma_0(x) = 1$. Donc $\gamma_0 = 1$, $\chi(\overline{g}) = \overline{g}(1) = 1$, et on a la densité.

(Z) $B(G)$ n'est pas une partie loc[alement] c[om]p[ac]te de $\overline{G}$, et B n'est pas un homéo.

<u>Théorème 2</u> (Hewitt-Zuckerman, Ann. of Math. 1950) Soit ϕ un caractère faible sur Γ, $\varepsilon > 0$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$. Alors, $\exists\, \psi$ caractère continu sur Γ ($\psi \in \widehat{\Gamma}$) tq
$(*)\ |\phi(\gamma_i) - \psi(\gamma_i)| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$.

<u>Preuve</u>: $\phi \in \overline{G}$, et $\{\psi \in \overline{G}$ vérifiant $(*)\}$ = ouvert non-vide (contient ϕ !), donc il coupe $B(G)$ d'après le Théorème 1.

<u>Théorème 3</u> (Kronecker): E indépendant fini dans G q[uelconque]. Soit $f \in S(E)$ (unimodulaire continue sur E). (Alors, $\exists \gamma \in \Gamma$)
$|f(x) - \gamma(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E$.

<u>Preuve</u>: $E = \{x_1, \dots, x_2\}$, $H = gp\, E = \{\sum_1^2 n_j x_j\}$, $\phi(\sum n_j x_j) = \prod_{j=1}^{2} f(x_j)^{n_j}$.
ϕ est un caractère sur H. Se prolonge par Zorn en un caractère sur G.
Puis on applique Hewitt-Zuckerman.

<u>Exemple</u>: (faible) $z_j = e^{2i\pi \log p_j}$, p_j 1ers. Ils sont ind. sur $\mathbb{T}$ d'après la transcendance de e.

C'est l'exemple basique pour les séries de Dirichlet.