LE THÉORÈME DE MERTENS SUR LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS EN PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET LA NON-ANNULATION DES FONCTIONS L EN 1

Olivier Ramaré

Abstract. Une preuve qui ne demande que peu de prérequis et démontre de belles choses !

Version du 28 Mars 2000.

I. Résultats.

Soit q un entier ≥ 1 et a un entier premier à q. Nous démontrons le théorème de Mertens qui affirme que

$$\sum_{\substack{d\leq D\\ d\equiv a[q]}} \frac{\Lambda(d)}{d} = \frac{1}{\phi(q)}\operatorname{Log} D + \mathcal{O}(1), \tag{1.1}$$

où le symbole $\mathcal{O}$ dépend de q. Nous n'utiliserons que les propriétés élémentaires des caractères de Dirichlet, une borne supérieure de type Tchebyschef (le lemme 1 ci-dessous) et les identités de convolution $\Lambda\star 1 = \operatorname{Log}$ et $\mu\star\operatorname{Log} = \Lambda$.

Nous en déduirons qu'il existe trois constantes strictement positives $C_1(q)$, $C_2(q)$ et $C_3(q)$ telles que

$$C_1(q)\,\frac{D}{\phi(q)} \leq \sum_{\substack{d\leq D\\ d\equiv a[q]}} \Lambda(d) \leq C_2(q)\,\frac{D}{\phi(q)} \qquad , \quad (D\geq C_3(q)).$$

II. Préliminaires.

Lemme 1 (Tchebyschef). *Il existe une constante strictement positive C telle que*

$$\sum_{d\leq D} \Lambda(d) \leq C\,D \qquad (D\geq 1)$$

Lemme 2. *Nous avons, pour tout caractère χ non principal modulo q :*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{d\le D}\frac{\Lambda(d)}{d} = \operatorname{Log} X + \mathcal{O}(1) \\ \displaystyle\sum_{n\le N}\frac{\chi(n)}{n} = L(1,\chi) + \mathcal{O}(1/N) \\ \displaystyle\sum_{n\le N}\frac{\chi(n)\operatorname{Log} n}{n} = -L'(1,\chi) + \mathcal{O}((\operatorname{Log} N)/N) \\ \displaystyle\sum_{n\le N}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2,\chi) + \mathcal{O}(1/N^{1/2}) \end{cases}$$

Il faut remarquer que dans les égalités ci-dessus, ce qui nous intéresse c'est que $L(1,\chi)$, $L'(1,\chi)$ et $L(1/2,\chi)$ soient des constantes et non leur forme particulière.

Preuve. Nous partons de

$$\sum_{n\le N}\operatorname{Log} n = N\operatorname{Log} N + \mathcal{O}(N).$$

Comme $\operatorname{Log} = 1\star\Lambda$, nous en déduisons

$$\begin{aligned} N\operatorname{Log} N + \mathcal{O}(N) &= \sum_{\substack{d,m\ge 1\\ dm\le N}}\Lambda(d) = \sum_{d\le N}\Lambda(d)\left(\frac{N}{d}+\mathcal{O}(1)\right) \\ &= N\sum_{d\le N}\frac{\Lambda(d)}{d} + \mathcal{O}(N) \end{aligned}$$

grace au lemme 1, ce qui démontre la première égalité. Les suivantes suivent toutes le mêmes schéma et nous ne montrons que la première. Nous avons

$$\sum_{n\le N}\frac{\chi(n)}{n} = L(1,\chi) - \sum_{n>N}\frac{\chi(n)}{n} = L(1,\chi) - \int_N^\infty \frac{\sum_{N<n\le t}\chi(n)}{t^2}dt$$

en utilisant $\frac{1}{n} = \int_n^\infty dt/t^2$, et le résultat provient ensuite de ce que $|\sum_{n\le t}\chi(n)|\le q$.
$\diamond\diamond\diamond$

III. Deux lemmes.

Lemme 3. *Soit χ un caractère modulo q non principal. Nous avons*

$$\left[L(1,\chi)\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{d\le D}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} = \mathcal{O}(1)\right].$$

Preuve. Puisque $\Lambda\star 1 = \operatorname{Log}$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n\le N}\frac{\chi(n)\operatorname{Log} n}{n} &= \sum_{d\le N}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\sum_{m\le N/d}\frac{\chi(m)}{m} \\ &= \sum_{d\le N}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\left\{L(1,\chi)+\mathcal{O}\left(\frac{d}{N}\right)\right\} \\ &= L(1,\chi)\sum_{d\le N}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} + \mathcal{O}\left(\sum_{d\le N}\Lambda(d)/N\right). \end{aligned}$$

Les lemmes 1 et 2 nous permettent de conclure facilement. $\diamond\diamond\diamond$

Lemme 4. *Soit χ un caractère modulo q non principal. Nous avons*

$$\left[L(1,\chi)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{d\le D}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} = -\operatorname{Log} D + \mathcal{O}(1)\right].$$

Preuve. Nous avons

$$\sum_{n|d}\mu(n)\operatorname{Log}\frac{D}{n} = \sum_{n|d}\mu(n)\operatorname{Log}\frac{D}{d} + \sum_{n|d}\mu(n)\operatorname{Log}\frac{d}{n} = \begin{cases}\operatorname{Log} D & \text{si} \quad d=1\\ \Lambda(d) & \text{si} \quad d>1.\end{cases}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\sum_{d\le D}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} &= -\operatorname{Log} D + \sum_{d\le D}\frac{\chi(d)}{d}\sum_{n|d}\mu(n)\operatorname{Log}\frac{D}{n}\\ &= -\operatorname{Log} D + \sum_{n\le D}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n}\operatorname{Log}\frac{D}{n}\sum_{m\le D/n}\frac{\chi(m)}{m}\\ &= -\operatorname{Log} D + \sum_{n\le D}\frac{\mu(n)\chi(n)}{\operatorname{Log}}\frac{D}{n}\left\{L(1,\chi)+\mathcal{O}\left(\frac{n}{D}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Puisque nous supposons que $L(1,\chi)=0$, et moyennant de rappeler que

$$\sum_{n\le D}\operatorname{Log}\frac{D}{n} = \mathcal{O}(D),$$

nous obtenons bien le résultat annoncé. $\diamond\diamond\diamond$

IV. Premières déductions.

Nous avons

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(a)}\chi(d) = \begin{cases}1 & \text{si} \quad d\equiv a[q]\\ 0 & \text{si} \quad d\not\equiv a[q]\end{cases}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{\substack{d\equiv a[q]\\ d\le D}}\frac{\Lambda(d)}{d} = \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(a)}\sum_{d\le D}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}.$$

Définissons $\delta(\chi)$ par

$$\delta(\chi) = \begin{cases}1 & \text{si} \quad \chi=\chi_0\\ -1 & \text{si} \quad \chi\neq\chi_0 \quad \text{et} \quad L(1,\chi)=0\\ 0 & \text{si} \quad \chi\neq\chi_0 \quad \text{et} \quad L(1,\chi)\neq 0\end{cases}$$

(où χ_0 est le caractère principal) de telle sorte que

$$\sum_{d\le D}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}=\delta(\chi)\operatorname{Log}D+\mathcal{O}(1).$$

Nous obtenons alors

$$\sum_{\substack{d\equiv a[q]\\ d\le D}}\frac{\Lambda(d)}{d}=\frac{1}{\phi(q)}\left(\sum_{\chi \mod q}\overline{\chi(a)}\delta(\chi)\right)\operatorname{Log}D+\mathcal{O}(1). \tag{4.1}$$

En spécialisant en $a=1$, et en remarquant que le membre de gauche de l'égalité précédente est positif ou nul, nous obtenons

$$0\le\sum_{\chi \mod q}\delta(\chi)=1-\sum_{\chi/L(1,\chi)=0}1$$

tant et si bien qu'il y a au plus un caractère modulo q pour lequel $L(1,\chi)=0$. Comme $L(1,\overline{\chi})=\overline{L(1,\chi)}$, ce caractère est nécessairement réel.

V. La non-annulation de $L(1,\chi)$ pour χ réel.

Pour montrer que $L(1,\chi)\ne 0$ lorsque χ est réel, remarquons tout d'abord que

$$\sum_{d|n}\chi(d)\ge 0$$

et même ≥ 1 si n est un carré. En effet, comme la fonction $1\star\chi$ est multiplicative, il nous suffit de vérifier ces propriétés sur les puissances de nombres premiers. Si $\chi(p)=1$, alors $1\star\chi(p^\nu)=\nu+1$ et si $\chi(p)=-1$, alors $1\star\chi(p^\nu)=((-1)^\nu+1)/2$, ce qui démontre bien ce que nous avons annoncé.

Donnons-nous deux paramètres $M,D\ge 1$ et tels que $MD=N$. Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n\le N}\frac{\sum_{d|n}\chi(d)}{\sqrt{n}}&=\sum_{d,m/dm\le N}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\frac{1}{\sqrt{m}}\\&=\sum_{d\le D}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\sum_{m\le N/d}\frac{1}{\sqrt{m}}+\sum_{m\le M}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{D<d\le N/m}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\\&=\sum_{d\le D}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\left\{\frac12\sqrt{\frac{N}{d}}+c+\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{d}{N}}\right)\right\}+\sum_{m\le M}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}(1/\sqrt{D})\end{aligned}$$

(car $\sum_{m\le M}m^{-1/2}=M^{1/2}/2+c+\mathcal{O}(M^{-1/2})$), soit finalement

$$\sum_{n\le N}\frac{\sum_{d|n}\chi(d)}{\sqrt{n}}=\frac12\sqrt{N}(L(1,\chi)+\mathcal{O}(1/D))+\mathcal{O}(1+DN^{-1/2}+M^{1/2}D^{-1/2}).$$

Nous prenons alors $D=M=N^{1/2}$, ce qui nous donne

$$\sum_{n\le N}\frac{\sum_{d|n}\chi(d)}{\sqrt{n}}=\frac12\sqrt{N}L(1,\chi)+\mathcal{O}(1).$$

Par ailleurs

$$\sum_{n\leq N}\frac{\sum_{d|n}\chi(d)}{\sqrt{n}}\geq\sum_{\ell^2\leq N}\frac{1}{\sqrt{\ell^2}}\geq\frac{1}{2}\operatorname{Log}N+\mathcal{O}(1).$$

Par conséquent

$$L(1,\chi)\geq\frac{\operatorname{Log}N+\mathcal{O}(1)}{\sqrt{N}}$$

et il suffit de prendre N assez grand pour obtenir $L(1,\chi)\neq 0$.

VI. Conclusion.

L'équation (4.1) allié au fait que $\delta_\chi=0$ pour tout caractère non principal nous donne le théorème de Mertens (1.1).

Pour en déduire des inégalités de type Tchebyschef (1.2), nous procédons comme suit. Donnons-nous un paramètre $\alpha\in]0,1[$. Nous avons

$$\sum_{\substack{\alpha D<d\leq D\\ d\equiv a[q]}}\frac{\alpha D\Lambda(d)}{d}\leq\sum_{\substack{\alpha D<d\leq D\\ d\equiv a[q]}}\Lambda(d)\leq\sum_{\substack{\alpha D<d\leq D\\ d\equiv a[q]}}\frac{D\Lambda(d)}{d}$$

où il nous suffit d'appliquer (1.1) pour obtenir

$$\alpha D\left(\frac{\operatorname{Log}(1/\alpha)}{\phi(q)}+\mathcal{O}(1)\right)\leq\sum_{\substack{\alpha D<d\leq D\\ d\equiv a[q]}}\Lambda(d)\leq D\left(\frac{\operatorname{Log}(1/\alpha)}{\phi(q)}+\mathcal{O}(1)\right)$$

et nous prenons alors α suffisamment petit de sorte que les quantités $\frac{\operatorname{Log}(1/\alpha)}{\phi(q)}+\mathcal{O}(1)$ ci-dessus soient toutes les deux ≥ 1. Nous ajoutons les contributions de D à αD, puis de αD à $\alpha^2 D$, etc, ce qui prouve (1.2).

VII. Commentaires.

Les lignes qui suivent sont empruntées à plusieurs preuves plus ou moins classiques dont je ne saurai reconnaître les auteurs. Il faut remarquer que (4.1) parle déjà de la célèbre constante 2 du théorème de Brun-Tichmarsh : si il existe un zéro exceptionnel, disons ici $L(1,\chi)=0$ dans notre formalisme simplifié, alors certaines classes contiennent deux fois plus de nombres premiers que la valeur espérée. Plus remarquable encore, ces classes forment un sous-groupe...

L'argument de la partie V si il a l'avantage de s'intégrer agréablement au reste du développement donne une piètre minoration de $L(1,\chi)$ en fonction de q dès que l'on explicite la dépendance dans ce paramètre.