MOYENNES DE FONCTIONS MULTIPLICATIVES POSITIVES

Olivier Ramaré

Abstract. Nous présentons ici deux théorèmes généraux qui permettent d'évaluer $G(D) = \sum_{d\le D} g(d)$ où g est une fonction multiplicative assez générale dont on connaît les valeurs sur les puissances de nombres premiers. La technique de base est remarquablement similaire dans les deux cas.

Ces résultats s'appliquent lorsque peut de compensations ont lieu dans la somme définissant $G(D)$ et nous avons pris l'hypothèse simplificatrice $g \ge 0$ qui n'est toutefois pas essentielle pour obtenir une version un peu plus faible du théorème 2.

Version préliminaire du 20 Mars 2000.

I. Une première borne supérieure.

Ce premier théorème est efficace lorsque l'ordre moyen de g sur les puissances de nombres premiers est proche de constant. Il existe de nombreuses versions de ce résultat, dont la plus précise est due à Halberstam & Richert (voir l'article de 1979 cité ci-après). Celle que nous présentons est une légère modification de ce qui est proposé dans le livre de Tenenbaum référencé à la fin de ce papier.

Théorème 1. *Supposons que g soit positive ou nulle et que*

$$\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le Q}} g\big(p^\nu\big)\,\mathrm{Log}\,\big(p^\nu\big) \le KQ \qquad (Q\ge 1)$$

pour une certaine constante $K \ge 0$. Alors

$$\sum_{d\le D} g(d) \le (K+1)\frac{D}{\mathrm{Log}\,D}\sum_{d\le D} g(d)/d \qquad (D\ge 2).$$

Preuve. Posons $\tilde{G}(D) = \sum_{d\le D} g(d)/d$. Alors, en utilisant $\mathrm{Log}\,\frac{D}{d} \le \frac{D}{d}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} G(D)\,\mathrm{Log}\,D &= \sum_{d\le D} g(d)\,\mathrm{Log}\,\frac{D}{d} + \sum_{d\le D} g(d)\,\mathrm{Log}\,d \\ &\le D\sum_{d\le D}\frac{g(d)}{d} + \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g\big(p^\nu\big)\,\mathrm{Log}\,\big(p^\nu\big)\sum_{\substack{\ell\le D/p^\nu\\ (\ell,p)=1}} g(\ell) \end{aligned}$$

où l'on obtient le second sommant en écrivant

$$\mathrm{Log}\,d = \sum_{p^\nu\| d}\mathrm{Log}\,\big(p^\nu\big).$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Finalement

$$\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D}} g(p^\nu)\operatorname{Log}(p^\nu)\sum_{\substack{\ell\leq D/p^\nu\\(\ell,p)=1}} g(\ell) = \sum_{\ell\leq D} g(\ell)\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D/\ell\\(p,\ell)=1}} g(p^\nu)\operatorname{Log}(p^\nu)$$
$$\leq \sum_{\ell\leq D} g(\ell)K\frac{D}{\ell}$$

ce qui nous permet de conclure facilement. $\diamond\diamond\diamond$

II. Une formule asymptotique.

Notre second théorème s'applique lui aux fonctions multiplicatives g telles que $g(p)\simeq\kappa/p$ pour un certain $\kappa>0$.

Ce second théorème demande des hypothèses bien plus fortes mais en échange nous prouvons une formule asymptotique. Sa preuve est à la base assez simple, mais se complique du fait que (i) nous prenons en compte la dépendance en certains paramètres des termes d'erreur (ii) nous tenons compte des valeurs de g sur les puissances de nombres premiers (iii) nous offrons un résultat complètement explicite. L'essentiel de ce théorème se trouve dans l'article de Halberstam & Richert de 1971 cité ci-dessous, et une présentation légèrement simplifiée dans le livre de ces deux mêmes auteurs.

Théorème 2. *Donnons-nous une fonction multiplicative g et trois paramètres réels strictement positifs κ, L et A tels que*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ w<p^\nu\leq Q}} g(p^\nu)\operatorname{Log}(p^\nu) = \kappa\operatorname{Log}\frac{Q}{w} + \mathcal{O}^*(L) \qquad (Q>w\geq 1),\\ \displaystyle\sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1} g(p^k)g(p^\nu)\operatorname{Log}(p^\nu)\leq A. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{d\leq D} g(d) = C\,(\operatorname{Log} D)^\kappa\,(1+\mathcal{O}^*(B/\operatorname{Log} D)) \qquad (D\geq\exp(2(L+A)))$$

avec

$$\begin{cases} C = \dfrac{1}{\Gamma(\kappa+1)}\displaystyle\prod_{p\geq 2}\left\{\Big(\sum_{\nu\geq 0} g(p^\nu)\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^\kappa\right\},\\ B = 2(L+A)\big(1+2(\kappa+1)e^{\kappa+1}\big) \end{cases}$$

Notons que dans la plupart des applications, si la dépendance en L peut s'avérer importante, celle en A est presque toujours sans intérêt.

Preuve. Le départ est similaire au précédent :

$$G(D)\operatorname{Log} D = \sum_{d\leq D} g(d)\operatorname{Log}\frac{D}{d} + \sum_{d\leq D} g(d)\operatorname{Log} d$$
$$= \sum_{d\leq D} g(d)\operatorname{Log}\frac{D}{d} + \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D}} g(p^\nu)\operatorname{Log}(p^\nu)\sum_{\substack{\ell\leq D/p^\nu\\(\ell,p)=1}} g(\ell)$$

et l'on pose

$$\begin{cases} G_p(X) = \displaystyle\sum_{\substack{\ell \le X \\ (\ell,p)=1}} g(\ell) \\ T(D) = \displaystyle\sum_{d \le D} g(d) \operatorname{Log} \frac{D}{d} = \int_1^D G(t) \frac{dt}{t}, \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$G(D) \operatorname{Log}(D) = T(D) + \sum_{\substack{p \ge 2, \nu \ge 1 \\ p^\nu \le D}} g\big(p^\nu\big) \operatorname{Log}\big(p^\nu\big) G_p(D/p^\nu).$$

De plus

$$G_p(X) = G_p(X) - \sum_{k \ge 1} G_p(X/p^k)$$

ce qui, joint à nos hypothèse, nous donne

$$\begin{aligned} G(D) \operatorname{Log}(D) &= T(D) + \sum_{\substack{p \ge 2, \nu \ge 1 \\ p^\nu \le D}} g\big(p^\nu\big) \operatorname{Log}\big(p^\nu\big) G(D/p^\nu) + \mathcal{O}^*(AG(D)) \\ &= T(D) + \sum_{d \le D} g(d) \sum_{\substack{p \ge 2, \nu \ge 1 \\ p^\nu \le D/d}} g\big(p^\nu\big) \operatorname{Log}\big(p^\nu\big) + \mathcal{O}^*(AG(D)) \\ &= T(D)(\kappa + 1) + \mathcal{O}^*((L + A)G(D)) \end{aligned}$$

ce que nous réécrivons en

$$\begin{aligned} (\kappa + 1)T(D) &= G(D) \operatorname{Log} D \ (1 + r(D)) \\ r(D) &= \mathcal{O}^*\left(\frac{L + A}{\operatorname{Log} D}\right) \quad D_0 = \exp(2(L + A)) \end{aligned}$$

que nous regardons comme une équation différentielle. Posons

$$\exp E(D) = \frac{(\kappa + 1)T(D)}{(\operatorname{Log} D)^{\kappa+1}} = \frac{G(D)}{(\operatorname{Log} D)^\kappa}(1 + r(D))$$

ce qui nous donne

$$E'(D) = \frac{T'(D)}{T(D)} - \frac{(\kappa + 1)}{D \operatorname{Log} D} = \frac{r(D)(\kappa + 1)}{(1 - r(D))D \operatorname{Log} D} = \mathcal{O}^*\left(\frac{2(L + A)}{D \operatorname{Log} D}\right) \quad (D \ge D_0)$$

puisque $|r(D)| \le \frac{1}{2}$ si $D \ge D_0$. Il vient

$$E(\infty) - E(D) = \int_D^\infty E'(t)dt = \mathcal{O}^*\left(\frac{2(L + A)}{\operatorname{Log} D}\right) \quad (D \ge D_0).$$

Bref

$$\frac{G(D)}{(\operatorname{Log} D)^\kappa} = \frac{1}{1 + r(D)} \exp E(D) = \frac{e^{E(\infty)}}{1 + r(D)}\left(1 + \mathcal{O}^*\left(\frac{2(L + A)}{\operatorname{Log} D}(\kappa + 1)e^{\kappa+1}\right)\right).$$

Or $1/(1+x) \leq 1+2x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ d'où

$$\frac{G(D)}{(\operatorname{Log} D)^{\kappa}} = e^{E(\infty)}\Big(1+\mathcal{O}^*\Big(\frac{2(L+A)}{\operatorname{Log} D}\big(1+2(\kappa+1)e^{\kappa+1}\big)\Big)\Big) \qquad (D \geq D_0)$$

ce qui constitue l'essentiel de la démonstration. Il nous faut à présent expliciter $e^{E(\infty)} = C$. Remarquons tout d'abord que la preuve ci-dessus est a priori fausse car $T'(D) \neq G(D)/D$ aux points de discontinuités de G, mais il nous suffit de travailler avec D non entier et de procéder par continuité.

Expression de C:

Pour ce qui est du calcul de la constante, nous avons pour s réel positif

$$\begin{aligned} D(g,s) = \sum_{d\geq 1}\frac{g(d)}{d^s} &= s\int_1^{\infty} G(D)\frac{dD}{D^{s+1}} \\ &= sC\int_1^{\infty}(\operatorname{Log} D)^{\kappa}\frac{dD}{D^{s+1}} + \mathcal{O}\Big(sC\int_1^{\infty}(\operatorname{Log} D)^{\kappa-1}\frac{dD}{D^{s+1}}\Big) \\ &= C\big(s^{-\kappa}\Gamma(\kappa+1) + \mathcal{O}(s^{1-\kappa}\Gamma(\kappa))\big) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$C = \lim_{s\to 0^+} D(g,s)s^{\kappa}\Gamma(\kappa+1)^{-1} = \lim_{s\to 0^+} D(g,s)\zeta(s+1)^{-\kappa}\Gamma(\kappa+1)^{-1}.$$

Il est alors assez facile de montrer que le produit

$$\prod_{p\geq 2}\Big\{\Big(\sum_{\nu\geq 0} g(p^{\nu})\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\kappa}\Big\}$$

est convergent et égale donc $C\Gamma(\kappa+1)$ comme voulu.

◇ ◇ ◇

III. Un exemple.

Considérons la fonction multiplicative h définie par

$$\begin{cases} h(p^k) = 1 & \text{si} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad p \equiv 1,2[4], \\ h(p^{2k}) = 1 & \text{si} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad p \equiv 3[4], \\ h(p^{2k+1}) = 1 & \text{si} \quad k \geq 0 \quad \text{et} \quad p \equiv 3[4], \end{cases}$$

qui est en fait la fonction caractéristique des sommes de deux carrés. Avec $g(d) = h(d)/d$, nous constatons que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées pour $\kappa = \frac{1}{2}$ ce qui nous donne

$$\sum_{d\leq D}\frac{h(d)}{d} = C\,(\operatorname{Log} D)^{1/2}\big(1+\mathcal{O}(1/\operatorname{Log} D)\big)$$

pour une certaine constante $C > 0$.

References

H. Halberstam & H. E. Richert, *Mean value theorems for a class of arithmetic functions*, Acta Arith. **43** (1971), 243–256.

H. Halberstam & H. E. Richert, *Sieves methods*, Academic Press (London) (1974), 364pp.

H. Halberstam & H. E. Richert, *On a result of R. R. Hall.*, J. Number Theory **11** (1979), 76–89.

G. Tenenbaum, Cours Spécialisés. 1. Paris: Société Mathématique de France. (1995), 457pp.