MOYENNES DE FONCTIONS MULTIPLICATIVES POSITIVES : LA MÉTHODE DE CONVOLUTION.

Olivier Ramaré

Abstract. Nous présentons une méthode classique pour calculer l'ordre moyen d'une fonction multiplicative non oscillante. Version du 4 Février 2000.

I. Premiers pas.

Soit $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction multiplicative, i.e. telle que

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{si } n \text{ et } m \text{ sont premiers entre eux.} \end{cases}$$

Une telle fonction est définie par ses valeurs sur les puissances de nombres premiers et, formellement, nous avons

$$D(f,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\geq 2} \big(\sum_{k\geq 0} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \big).$$

Souvent, la fonction f est assez "proche" d'une fonction connue, et c'est cette idée que nous mettons ici en pratique.

<u>Exemples :</u>

(1) $f_1(n) = \prod_{p|n}(p-2)$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_1,s) &= \prod_{p\geq 2} \big(1 + \frac{p-2}{p^s-1}\big) = \prod_{p\geq 2} \left(1 - \frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}\right) \frac{1}{1-1/p^{s-1}} \\ &= C_1(s)\zeta(s-1) \end{aligned}$$

où $C_1(s)$ est holomorphe pour $\Re s > \frac{3}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_1,s)$ est méromorphe pour $\Re s > \frac{3}{2}$ et admet un pôle simple en $s = 2$.

(2) $f_2(n) = \mu^2(n)/\phi(n)$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_2,s) &= \prod_{p\geq 2} \big(1 + \frac{1}{(p-1)p^s}\big) \\ &= \prod_{p\geq 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)p^{s+1}} - \frac{1}{(p-1)p^{2s+1}}\right) \frac{1}{1-1/p^{s+1}} \\ &= C_2(s)\zeta(s+1) \end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

où $C_2(s)$ est holomorphe pour $\Re s > -\frac{1}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_2, s)$ est méromorphe pour $\Re s > -\frac{1}{2}$ et admet un pôle simple en $s = 0$.

(3) $f_3(n) = 2^{\Omega(n)}$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_3, s) &= \prod_{p\geq 2} \frac{1}{1-\frac{2}{p^s}} = \prod_{p\geq 2} \big(1 + \frac{1}{p^{2s}-2p^s}\big)\zeta^2(s) \\ &= C_3(s)\zeta^2(s) \end{aligned}$$

où $C_3(s)$ est holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_3, s)$ est méromorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et admet un pôle double en $s = 1$.

Nous développons alors les C_i en séries de Dirichlet :

$$C_i(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{g_i(n)}{n^s}$$

où les fonctions g_i sont bien sûr multiplicatives. Pour obtenir leurs valeurs exactes, il suffit d'identifier les coefficients dans le développement du facteur local en série de p^-s. Nous obtenons ainsi

$$\begin{cases} g_1(p) = -2 \\ g_1(p^k) = -(p^2-3p+2), \quad (k\geq 2) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_2(p) = g_2(p^2) = -\dfrac{1}{p(p-1)} \\ g_2(p^k) = 0, \quad (k\geq 3) \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} g_3(p) = 0 \\ g_3(p^k) = 2^{k-2}, \quad (k\geq 2) \end{cases}$$

Nous posons aussi

$$\overline{C_i}(s) = \sum_{n} \frac{|g_i(n)|}{n^s}$$

et il se trouve que ces séries convergent encore là où nous avons montré que C_i existait, c'est à dire respectivement pour $\Re s \geq \frac{3}{2}$, $\Re s \geq -\frac{1}{2}$ et $\Re s \geq \frac{1}{2}$.

Occupons-nous à présent des ordres moyens. La traduction sur les coefficients de $D(f_1, s) = C_1(s)\zeta(s-1)$ nous donne

$$f_1(n) = \sum_{\ell m = n} g_1(\ell) m$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq X} f_1(n) = \sum_{\ell m\leq X} g_1(\ell) m &= \sum_{\ell\leq X} g_1(\ell)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{X}{\ell}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{X}{\ell}\right)\right) \\ &= \frac{X^2}{2}\sum_{\ell\leq X}\frac{g_1(\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}\left(X\sum_{\ell\leq X}\frac{|g_1(\ell)|}{\ell}\right) \end{aligned}$$

Nous utilisons alors

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\le X}\frac{g_1(\ell)}{\ell^2} &= \sum_{\ell\ge 1}\frac{g_1(\ell)}{\ell^2}+\mathcal{O}\Big(\sum_{\ell>X}\frac{|g_1(\ell)|}{\ell^2}\Big)\\ &= C_1(2)+\mathcal{O}\Big(\sum_{\ell>X}\frac{|g_1(\ell)|}{\ell^{\frac32+\varepsilon}}\frac{1}{X^{\frac12-\varepsilon}}\Big)\\ &= C_1(2)+\mathcal{O}_\varepsilon\big(X^{-\frac12+\varepsilon}\big)\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon>0$, et

$$\sum_{\ell\le X}\frac{|g_1(\ell)|}{\ell}\le X^{\frac12+\varepsilon}\sum_{\ell\le X}\frac{|g_1(\ell)|}{\ell^{\frac32+\varepsilon}}\ll_\varepsilon X^{\frac12+\varepsilon}\qquad(\varepsilon>0).$$

Bref

$$\sum_{n\le X}f_1(n)=C_1(2)\frac{X^2}{2}+\mathcal{O}_\varepsilon\big(X^{\frac12+\varepsilon}\big).$$

Pour ce qui est de l'ordre moyen de f_2, nous procédons comme ci-dessus. Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n\le X}f_2(n)=\sum_{\ell m\le X}g_2(\ell)\frac1m&=\sum_{\ell\le X}g_2(\ell)\Big(\operatorname{Log}\frac{X}{\ell}+\gamma+\mathcal{O}\Big(\frac{\ell}{X}\Big)\Big)\\ &=\big(\operatorname{Log}X+\gamma\big)\sum_{\ell\le X}g_2(\ell)-\sum_{\ell\le X}g_2(\ell)\operatorname{Log}\ell+\mathcal{O}\Big(\frac1X\sum_{\ell\le X}|g_2(\ell)|\ell\Big)\end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler. Le programme précédent s'applique moyennant de rappeler que

$$-\sum_{\ell\ge1}\frac{g_2(\ell)\operatorname{Log}\ell}{\ell^s}\qquad\Bigg(\text{resp. }-\sum_{\ell\ge1}\frac{|g_2(\ell)|\operatorname{Log}\ell}{\ell^s}\Bigg)$$

est simplement la dérivée de $C_2(s)$ (resp. $\overline{C_2}(s)$) et que cette série admet la même abscisse de convergence absolue que la série initiale. Nous obtenons alors

$$\sum_{n\le X}f_2(n)=\big(\operatorname{Log}X+\gamma\big)\big(C_2(0)+\mathcal{O}_\varepsilon(X^{-\frac12+\varepsilon})\big)+C_1'(0)+\mathcal{O}_\varepsilon(X^{-\frac12+\varepsilon})+\mathcal{O}_\varepsilon(X^{-\frac12+\varepsilon}).$$

Il nous reste à nous occuper de $C_3(s)$. Nous avons cette fois-ci

$$\sum_{n\le X}f_2(n)=\sum_{\ell m\le X}g_2(\ell)d(m)$$

où $d(m)$ est le nombre de diviseurs de m. Nous avons de façon classique :

$$\sum_{m\le M}d(m)=M\operatorname{Log}M+(2\gamma-1)M+\mathcal{O}(M^{1/2})$$

et donc

$$\sum_{n\le X}f_2(n)=$$

II. Un théorème général.

Le lemme suivant est une généralisation d'un lemme de Riesel & Vaughan (le papier est cité ci-dessous).

Lemme 1. *Soit g, h et k trois fonctions sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ à valeurs complexes. Posons $H(s)=\sum_n h(n)n^{-s}$, et $\overline{H}(s)=\sum_n |h(n)|n^{-s}$. Supposons que $g=h\star k$, que $\overline{H}(s)$ soit convergente pour $\Re(s)\geq -1/3$ et enfin qu'il existe quatre constantes A, B, C et D telles que*

$$\sum_{n\leq t} k(n) = A\,\mathrm{Log}^2 t + B\,\mathrm{Log}\, t + C + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3}) \quad \textit{pour} \quad t>0;$$

Alors, pour tout $t>0$, nous avons :

$$\sum_{n\leq t} g(n) = u\,\mathrm{Log}^2 t + v\,\mathrm{Log}\, t + w + \mathcal{O}^*(Dt^{-1/3}\overline{H}(-1/3))$$

avec $u=AH(0)$, $v=2AH'(0)+BH(0)$ and $w=AH''(0)+BH'(0)+CH(0)$. Nous avons aussi

$$\sum_{n\leq t} ng(n) = Ut\,\mathrm{Log}\, t + Vt + W + \mathcal{O}^*(2.5Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3))$$

avec

$$\begin{cases} U = AH(0), \qquad V = -2AH(0)+2AH'(0)+BH(0),\\ W = A(H''(0)-2H'(0)+2H(0)) + B(H'(0)-H(0)) + CH(0). \end{cases}$$

Preuve. Écrivons $\sum_{\ell\leq t} g(\ell) = \sum_m h(m)\sum_{n\leq t/m} k(n)$, et toute la régularité de nos expresions vient de ce qu'il n'est pas nécessaire d'imposer $m\leq t$ dans $\sum_m h(m)$. Nous complétons alors la preuve facilement

Pour estimer $\sum_{\ell\leq t}\ell g(\ell)$ for $t>0$, nous écrivons

$$\sum_{\ell\leq t}\ell g(\ell) = t\sum_{\ell\leq t} g(\ell) - \int_1^t \sum_{\ell\leq u} g(\ell)du,$$

et utilisons l'expression asymptotique de $\sum_{\ell\leq u} g(\ell)$. $\diamond\diamond\diamond$

Pour appliquer le lemme précédent, nous aurons besoin de

Lemme 2. *Pour tout $t>0$, nous avons*

$$\sum_{n\leq t}\frac{1}{n} = \mathrm{Log}\, t + \gamma + \mathcal{O}^*\big(0.9105t^{-1/3}\big).$$

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Pour tout $t>0$, nous avons

$$\sum_{n\leq t}\frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{Log}^2 t + 2\gamma\,\mathrm{Log}\, t + \gamma^2 - \gamma_1 + \mathcal{O}^*\big(1.641t^{-1/3}\big),$$

avec

$$\gamma_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m\leq n}\frac{\mathrm{Log}\, m}{m} - \frac{\mathrm{Log}^2 n}{2}\right).$$

$(-0.072816<\gamma_1<-0.072815)$.

Preuve. La preuve de la seconde partie de ce lemme se trouve dans le papier de in Riesel & Vaughan cité ci-dessous (Lemma 1).

Pour la première partie, rappelons que

$$|\sum_{n\le t}\frac{1}{n}-\operatorname{Log} t-\gamma|\le\frac{7}{12t}\quad\text{pour}\quad t\ge 1.$$

Pour $0<t<1$, nous choisissons $a>0$ tel que $\operatorname{Log} t+\gamma+a\ t^{-1/3}\ge 0$. Cette fonction décroît de 0 à $(a/3)^3$ et ensuite croît. Cela nous donne la valeur minimale $a=3\exp(-\gamma/3-1)\le 0.9105$. ⋄⋄⋄

Dans la pratique, la fonction g sera multiplicative et vérifiera $g_p=b/p+o(1/p)$ avec $b=1$ or 2. Dans ce cas, nous prenons $\sum k(n)n^{-s}=\zeta(s+1)^b$ et h est la fonction multiplicative déterminée par $\sum h(n)n^{-s}=\sum g(n)n^{-s}\zeta(s+1)^{-b}$.

Lorsque h est multiplicative, nous avons

$$H(0)=\prod_p(1+\sum_m h(p^m)),$$

et

$$\frac{H'(0)}{H(0)}=\sum_p\frac{\sum_m mh(p^m)}{1+\sum_m h(p^m)}(-\operatorname{Log} p),$$

ainsi que

$$\frac{H''(0)}{H(0)}=\left(\frac{H'(0)}{H(0)}\right)^2+\sum_p\left\{\frac{\sum_m m^2h(p^m)}{1+\sum_m h(p^m)}-\left(\frac{\sum_m mh(p^m)}{1+\sum_m h(p^m)}\right)^2\right\}\operatorname{Log}^2 p.$$

Un exemple.

Lemma 3. *Pour tout $X>0$ et tout entier $d\ge 1$, nous avons*

$$\sum_{\substack{n\le X\\(n,d)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}=\frac{\phi(d)}{d}\left\{\operatorname{Log} X+\gamma+\sum_{p\ge 2}\frac{\operatorname{Log} p}{p(p-1)}+\sum_{p|d}\frac{\operatorname{Log} p}{p}\right\}+\mathcal{O}^*(7.284X^{-1/3}f_1(d))$$

avec

$$f_1(d)=\prod_{p|d}(1+p^{-2/3})\big(1+\frac{p^{1/3}+p^{2/3}}{p(p-1)}\big)^{-1}.$$

Remarque : La somme de gauche est $G_d(X)$. Le cas $d=1$ a déjà été étudié plus haut. La série de Dirichlet associée est

$$\sum_n\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)n^{s-1}}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\prod_{p\ge 2}\left(1+\frac{1}{(p-1)(p^s+1)}\right)$$

ce qui fait que le terme d'erreur $\mathcal{O}(X^{-1/2})$ est admissible (notre méthode pourrait donner $\mathcal{O}(X^{-1/2}\operatorname{Log}^2 X)$), et que nous ne pouvons espérer mieux que $\mathcal{O}(X^{-3/4})$.

Rosser & Schoenfeld (voir ci-dessous, équation (2.11) du papier cité) nous donne

$$\gamma + \sum_{p\geq 2} \frac{\operatorname{Log} p}{p(p-1)} = 1.332\ 582\ 275\ 332\ 21...$$

Preuve. Définissons la fonction multiplicative h_d par

$$h_d(p) = \frac{1}{p(p-1)}, \quad h_d(p^2) = \frac{-1}{p(p-1)}, \quad h_d(p^m) = 0 \quad \text{si} \quad m \geq 3,$$

si p est un nombre premier qui ne divise pas d, et par $h_d(p^m) = \frac{\mu(p^m)}{p^m}$ pour tout $m \geq 1$ si p est un facteur premier de d.

Nous avons alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{h_d(n)}{n^s} \zeta(s+1) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n) n^s}$$

ce qui nous permet d'appliquer le lemme 2. Nous vérifions que

$$\prod_{p\geq 2} \left(1 + \frac{p^{1/3} + p^{2/3}}{p(p-1)}\right) \leq 8.$$

◇◇◇

Lemma 4.

(1) *Pour* $z \geq 1$, *nous avons* $G(z) \leq \operatorname{Log} z + 1.4709$.
(2) *Pour* $z \geq 6$, *nous avons* $1.07 + \operatorname{Log} z \leq G(z)$.
(3) *Pour* $z \geq \exp(18)$ *et* $\alpha \geq 1.1$, *nous avons* $G(z^\alpha) \leq \alpha G(z)$.

Preuve. La première partie provient de notre expression asymptotique si $z \geq 146\ 050$. Finir par des calculs serait assez coûteux en temps, aussi modifions nous le lemme 2 et prenons l'exposant 0.45 au lieu de 1/3. Nous avons alors $G(z) - \operatorname{Log} z \leq 1.4708$ dès que

$$\frac{1}{0.45} \operatorname{Log}\left(\overline{H}(-0.45) \frac{\exp(-1-0.45\gamma)}{0.45(1.4708 - 1.332583)}\right) \leq \operatorname{Log} z.$$

Il nous faut calculer $\overline{H}(-0.45)$, et pour ce faire, un contrôle du terme d'erreur est nécessaire. Nous avons

$$\prod_{2\leq p\leq 200\ 000} (1 + \frac{p^{0.45} + p^{0.9}}{p(p-1)}) \leq 20.26$$

et, avec $F(t) = (t^{0.45} + t^{0.9})/[t(t-1)\operatorname{Log} t]$ et $X = 200\ 000$, nous obtenons

$$\operatorname{Log} \prod_{p>X} (1 + \frac{p^{0.45} + p^{0.9}}{p(p-1)}) \leq 1.001\ 093\big(XF(X) + \int_X^\infty F(t)dt\big) \leq 0.266\ 47$$

en utilisant $\theta(t) \leq 1.001\ 093t$ si $t > 0$ (cf l'article de Schoenfeld). D'où l'inégalité voulue si $z \geq 42\ 300$. Un calcul direct donne alors

$$\max_{z\geq 1}(G(z) - \operatorname{Log} z) = G(7) - \operatorname{Log} 7 \leq 1.4709.$$

La seconde inégalité est dûe à Montgomery & Vaughan (Lemma 7 du papier cité ci-dessous). La troisième assertion est une conséquence des deux premières, ◇◇◇

References

H.Montgomery & R.C.Vaughan, *The large sieve*, Mathematika **20 no 2** (1973), 119–133.

H.Riesel & R.C.Vaughan, *On sums of primes*, Arkiv för mathematik **21** (1983), 45–74.

J.B.Rosser & L.Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64–94.

L.Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions ψ and θ. II*, Math. Comp. **30 no 134** (1976), 337–360.