UNE RÉGION SANS ZÉROS POUR ζ

Olivier Ramaré

Abstract. Nous montrons comment obtenir une région sans zéros pour ζ. Version initiale : 3 Février 2000. Version courante : 1 Avril 2013.

Introduction.

Nous donnons ici le schéma classique d'une preuve donnant une région sans zéros pour la fonction ζ de Riemann. Nous dégageons trois étapes. Il est à noter que la première étape peut être atteinte de multiples façons.

Dans cet exposé, $\rho = \beta + i\gamma$ désigne un zéro de ζ vérifiant $\beta \in]0, 1[$.

Nous démontrons ici

Théorème. *Tous les zéros de la fonction ζ de Riemann vérifient*

$$(1-\beta)\operatorname{Log}|\gamma| \geq \frac{14-8\sqrt{3}}{5} = 0.028718\dots$$

La meilleure constante obtenue à ce jour est due à Rosser et vaut $1/R$ avec $R = 9.645908801\dots$.

I. Majorer $-\Re\zeta'/\zeta(s)$ en fonction des zéros proches de s.

Étape no 1. *Soit $s = \sigma + it$ avec $\sigma \in]1, 2]$ et soit $r \geq 0$. Pour $t > 4$, nous avons*

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \leq -\sum_{|\rho-s|\leq r} \frac{1}{s-\rho} + \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(|t|/2.9).$$

Auquel il convient d'ajouter

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma-1} \qquad (1 < \sigma \leq \tfrac{3}{2}),$$

inégalité dont le lecteur trouvera la démonstration dans le livre de Ellison/Mendès-France (p 184).

Preuve.

Nous avons, avec $b = -\operatorname{Log}(2\pi) + 1 + \gamma/2$,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = b + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2}+1) - \sum_{\rho}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right).$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Rappelons encore que (Davenport page 84)

$$\sum_\rho \frac{1}{\rho} = -\gamma/2 + 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(2\pi).$$

Il vient finalement

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(2\pi) + \Re\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2}+1) - \sum_\rho \Re\frac{1}{s-\rho}.$$

Rappelons aussi (voir l'égalité (9) de l'article de de la Vallée-Poussin cité ci-après) que

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}(u+i\tau) = \operatorname{Log}|\tau| - \frac{u}{2(u^2+\tau^2)} + \mathcal{O}^*(\frac{1}{12u|\tau|} + \frac{u^2}{2\tau^2}) \quad (\tau^2 > u^2,\ u \geq 0).$$

En posant $s = \sigma + it$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \leq {} & -\sum_\rho \Re\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}|t| \\ & + \frac{\sigma-1}{t^2} - \frac{\sigma+2}{2((\sigma+2)^2+t^2)} + \frac{1}{6(\sigma+2)|t|} + \frac{(\sigma+2)^2}{4t^2} - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(4\pi).\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma-1}{t^2} - \frac{\sigma+2}{2((\sigma+2)^2+t^2)} + \frac{1}{6(\sigma+2)|t|} + \frac{(\sigma+2)^2}{4t^2} - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(4\pi) \\ &\qquad \leq \frac{5}{t^2} + \frac{1}{18|t|} - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(4\pi) \leq \frac{5}{16} + \frac{1}{72} - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(4\pi) \leq -\operatorname{Log}(2.9).\end{aligned}$$

La conclusion est facile si l'on remarque que

$$\Re\frac{1}{\sigma-\rho} \geq 0$$

ce qui nous permet de ne garder dans la somme sur ρ que ceux qui nous intéressent. $\diamond\diamond\diamond$

Il existe d'autre façons de procéder, notamment via le lemme suivant, dû à Landau :

Lemme. *Supposons connue une borne supérieure M pour la fonction F holomorphe dans $|s-s_0| \leq R$. Supposons encore que l'on connaisse une borne inférieure m pour $|F(s_0)|$. Alors*

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{|\rho-s_0|\leq R/2} \frac{1}{s-\rho} + \mathcal{O}^*\left(8\frac{\operatorname{Log}(M/m)}{R}\right)$$

pour $|s-s_0| \leq \frac{1}{4}R$.

L'article de Heath-Brown cité ci-après propose encore une autre façon de faire. D'un point de vue explicite, il semble que ce soit une technique de Stechkin (dont le lecteur trouvera l'origine dans l'article de de la Vallée-Poussin cité ci-dessous) qui soit le plus efficace. Voir les articles de Stechkin, Rosser et Ramaré & Rumely cités en fin d'exposition.

II. Une inégalité trigonométrique.

Étape no 2. *Soit* $Q(\theta)=\sum_{k=0}^{K} a_k\cos(k\theta)$ *un polynôme trigonométrique qui vérifie* $a_k\geq 0$ *et* $Q(\theta)\geq 0$*. Nous avons, pour* $\sigma>1$*,*

$$(\ddagger)\qquad \Re\sum_{k=0}^{K} a_k\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\frac{1}{n^{ikt}}\geq 0.$$

Preuve. Il suffit d'écrire

$$\Re\sum_{k=0}^{K} a_k\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\frac{1}{n^{ikt}}=\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}Q(-t\,\mathrm{Log}\,n).$$

◇ ◇ ◇

Le polynôme choisi par de la Vallée-Poussin est

$$2(1+\cos\theta)^2=3+4\cos\theta+\cos(2\theta).$$

Il est en l'occurence plus efficace d'utiliser (voir Rosser)

$$8(0.9126+\cos\theta)^2(0.2766+\cos\theta)^2.$$

Voir les articles de Heath-Brown et de Liu & Wang cités ci-dessous pour d'autres remarques sur ces polynômes.

III. La conclusion.

Étape no 3. *Pour* $\Re s>1$*, nous avons*

$$\Re\frac{1}{s-\rho}\geq 0.$$

Nous pouvons attaquer la preuve. Des calculs numériques que nous n'entreprendrons pas montre que nous pouvons supposer $|\gamma|\geq 4$.

Grâce à l'étape no 3, nous pouvons éliminer autant de zéros que nous le souhaitons dans la majoration donnée à l'étape no 1. Soit alors ρ un zéro de ζ vérifiant $|\gamma|\geq 4$. En combinant cette remarque, l'étape no 1 et l'étape no 2, nous obtenons

$$\begin{array}{r|rcl}
3\times & -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) & \leq & \frac{1}{\sigma-1} \\
4\times & -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) & \leq & -\Re\frac{1}{\sigma+it-\rho}\qquad\qquad +\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,|t| \\
1\times & -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it) & \leq & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,|t| \\
\hline
 & 0 & \leq & \frac{3}{\sigma-1}\ -\ \Re\frac{4}{\sigma+it-\rho}+\frac{5}{2}\,\mathrm{Log}\,|t|
\end{array}$$

Nous prenons $t = \gamma$. Il vient

$$0 \leq \frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta} + \tfrac{5}{2} \operatorname{Log} |\gamma|$$

qu'il suffit alors de résoudre. Pour cela, nous posons $\lambda = (\sigma - 1) \operatorname{Log} |\gamma|$ et $\eta = (1 - \beta) \operatorname{Log} |\gamma|$. La résolution en η se déroule sans problème et donne

$$\eta \geq \frac{2\lambda - 5\lambda^2}{6 + 5\lambda}$$

et la valeur optimale de λ est $\lambda = (4\sqrt{3} - 6)/5$, ce qui donne le résultat annoncé.

En utilisant un polynôme trigonométrique général vérifiant les conditions de l'étape no 2 ainsi que $a_1 > a_0$, cette même méthode donne

$$(1 - \beta) \operatorname{Log} |\gamma| \geq 2(1 + o(1)) \frac{a_1 + a_0 - 2\sqrt{a_1 a_0}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_K}$$

où le $o(1)$ est une fonction de γ qui tend vers 0 quand $|\gamma|$ tend vers l'infini.

References

E. Bombieri, *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres*, Astérisque **18** (1987), 103pp.

D.R. Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions and the least prime in an arithmetic progression.*, Proc. Lond. Math. Soc. **64** (1991), 265–338.

M.-C. Liu & T. Wang, *A numerical bound for small prime solutions of some ternary linear equations*, Acta Arith. **86** (1998), 343–383.

S. B. Stechkin, *Rational inequalities and zeros of the Riemann zeta-function.*, Trudy Mat. Inst. Steklov; English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 189 (1990) **189** (1989), 127–134.

S. B. Stechkin, *Zeros of Riemann zeta-function*, Math. Notes **8** (1970), 706–711.

J. B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. **63** (1941), 211–232.

O. Ramaré & R. Rumely, *Primes in Arithmetic Progressions*, Math. Comp. **65** (1996), 397–425.

C.-J. de la Vallée-Poussin, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, CBRM : Colloque sur la Théorie des Nombres **Bruxelles, les 19, 20 et 21 Décembre** (1955), 9–66.