LE THÉORÈME DE BRUN-TITCHMARSH PAR LE CRIBLE DE SELBERG.

Olivier Ramaré

Abstract. Exposé introductif au crible supérieur de Selberg. L'exemple choisi est bien sûr le théorème de Brun-Titchmarsh. Version du 17 Janvier 2000.

Théorème de Brun-Titchmarsh.
Si $2 \leq y < q$, $x \geq 0$ et a est premier à q, nous avons

$$\pi(x+y;q,a) - \pi(x;q,a) \leq \frac{2y}{\phi(q)\,\mathrm{Log}(y/q)}. \tag{$\star$}$$

Rappelons que $\pi(x;q,a)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x et congrus à a modulo q.

Titchmarsh a démontré un résultat plus faible que le précédent dans les années 30 en utilisant le crible de Brun. La dénomination "théorème de Brun-Titchmarsh" est dû à Linnik et date des années 40.

Nous allons montrer une version un peu plus faible de ($\star$) et utiliser ce problème pour illustrer la façon dont le crible de Selberg fonctionne. Ce crible date des années 47-50. Le lecteur en trouvera une présentation classique dans le livre de Halberstam & Richert cité ci-dessous.

Posons

$$S = \pi(x+y;q,a) - \pi(x;q,a) = \sum_{\substack{x<p\leq x+y\\ p\equiv a[q]}} 1 \tag{1}$$

et considérons

$$\Sigma = \sum_{\substack{x<n\leq x+y\\ n\equiv a[q]}} \Big(\sum_{d|n} \lambda_d\Big)^2 \tag{2}$$

où les (λ_d) sont des nombres réels qui vérifient $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_d = 0$ si $d > z$ où z est un paramètre. Si p est un nombre premier dans $]x+z, x+y]$, p n'admet pas d'autres diviseurs inférieurs à z que 1 et par conséquent

$$\Big(\sum_{d|p} \lambda_d\Big)^2 = 1.$$

Il vient alors

$$S \le \Sigma + z. \tag{3}$$

Il nous reste à étudier Σ et en fait à obtenir le minimum de cette forme quadratique des (λ_d). Pour cela nous développons le carré et obtenons

$$\Sigma = \sum_{d_1,d_2\le z} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{x<n\le x+y\\ [d_1,d_2]|n\\ n\equiv a[q]}} 1,$$

où $[r,s]$ désigne le ppcm de r et s et (r,s) leur pgcd. Comme $(a,q)=1$, seuls les d tels que $(d,q)=1$ interviennent, ce qui fait que nous pouvons imposer $\lambda_d = 0$ si $(d,q)\neq 1$. En utilisant maintenant

$$\sum_{\substack{x<n\le x+y\\ n\equiv b[q]}} 1 = \frac{y}{r} + \mathcal{O}^*(1), \tag{4}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{y}{r}\sum_{d_1,d_2\le z} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]} + \mathcal{O}^*\Bigl(\sum_{d_1,d_2} |\lambda_{d_1}||\lambda_{d_2}|\Bigr)\\ &= \frac{y}{r}\Sigma_0 + \mathcal{O}^*\Bigl(\Bigl(\sum_d |\lambda_d|\Bigr)^2\Bigr) \quad \text{disons.}\end{aligned} \tag{5}$$

Nous diagonalisons alors Σ_0 par un procédé mis au point par Selberg. Écrivons

$$\Sigma_0 = \sum_{d_1,d_2\le z} (d_1,d_2)\frac{\lambda_{d_1}}{d_1}\frac{\lambda_{d_2}}{d_2}.$$

Or $d = \sum_{\ell|d}\phi(\ell)$, d'où

$$\Sigma_0 = \sum_{\ell\le z}\phi(\ell)\Bigl(\sum_{\ell|d\le z}\frac{\lambda_d}{d}\Bigr)^2, \tag{6}$$

ce qui est la forme diagonale annoncée. Posons

$$y_\ell = \sum_{\ell|d\le z}\frac{\lambda_d}{d}. \tag{7}$$

La matrice de passage des (λ_d) aux (y_ℓ) est triangulaire avec des éléments non nuls sur la diagonale et est donc inversible. De façon explicite, nous avons

$$\lambda_d = d\sum_{d|\ell\le z}\mu(\ell/d)y_\ell \tag{8}$$

ce que l'on vérifie en introduisant cette expression dans (7). Cela nous permet notamment de traduire la condition $\lambda_1 = 1$ en terme des (y_ℓ). En définitive, notre problème devient :

$$\begin{cases} \text{minimiser} \quad \displaystyle\sum_\ell \phi(\ell) y_\ell^2, \\ \text{sous} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell \le z} \mu(\ell) y_\ell = 1, \\ y_\ell = 0 \quad \text{si} \quad (\ell, q) \neq 1. \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

Nous utilisons un multiplicateur (θ) de Lagrange et obtenons

$$\begin{cases} 2\phi(\ell) y_\ell - \theta \mu(\ell) = 0 \quad (\ell, q) = 1, \\ \displaystyle\sum_{\ell \le z} \mu(\ell) y_\ell = 1, \end{cases} \tag{10}$$

ce qui donne

$$y_\ell = \frac{\theta}{2} \frac{\mu(\ell)}{\phi(\ell)} \quad , \quad \frac{\theta}{2} \sum_{\substack{\ell \le z \\ (\ell,q)=1}} \frac{\mu^2(\ell)}{\phi(\ell)} = 1. \tag{11}$$

Remarquons, ce qui est évident sur (9), que $y_\ell = 0$ si ℓ est divisible par un carré, ce qui équivaut à la même propriété sur les (λ_d).

Posons

$$G_f(z) = \sum_{\substack{\ell \le z \\ (\ell,f)=1}} \frac{\mu^2(\ell)}{\phi(\ell)}. \tag{12}$$

Alors

$$\begin{cases} y_\ell = \dfrac{1}{G_q(z)} \dfrac{\mu(\ell)}{\phi(\ell)} \quad (\ell, q) = 1, \\ \lambda_d = \mu(d) \dfrac{d}{\phi(d)} \dfrac{G_{dq}(z/d)}{G_q(z)} \quad (d, q) = 1, \\ \Sigma_0 = 1/G_q(z). \end{cases} \tag{13}$$

Il nous faut à présent évaluer $G_q(z)$ et nous commençons par un lemme de van Lint & Richert (voir les références) :

Lemme.

Soit f et h deux entiers tels que $(f, h) = 1$. Nous avons

$$\frac{f}{\phi(f)} G_{fh}(z/f) \le G_h(z) \le \frac{f}{\phi(f)} G_{fh}(z).$$

Preuve. Nous écrivons

$$G_h(z) = \sum_{r|f} \sum_{\substack{\ell \le z/r \\ (\ell,fh)=1}} \frac{\mu^2(\ell r)}{\phi(\ell r)} = \sum_{r|f} \frac{\mu^2(r)}{\phi(r)} G_{fh}(z/r)$$

et il nous suffit alors d'utiliser $G_{fh}(z/f) \leq G_{fh}(z/r) \leq G_{fh}(z)$ ainsi que

$$\sum_{r|f} \frac{\mu^2(r)}{\phi(r)} = \frac{f}{\phi(f)}$$

pour conclure. $\diamond \diamond \diamond$

Ce lemme nous donne notamment

$$|\lambda_d| \leq 1, \tag{14}$$

et ramène l'évaluation de $G_q(z)$ à celle de $G_1(z)$. Il nous suffit d'ailleurs de minorer $G_1(z)$, ce qui se fait très facilement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \sum_{\ell \leq z} \frac{\mu^2(\ell)}{\phi(\ell)} = \sum_{\ell \leq z} \frac{\mu^2(\ell)}{\ell} \prod_{p|\ell} \frac{1}{1-1/p} \\ &= \sum_{\substack{k \\ \text{tel que le noyau sans} \\ \text{facteurs carrés de } k \text{ soit } \leq z}} \frac{1}{k} \end{aligned} \tag{15}$$

où l'on obtient la dernière égalité à partir de

$$\frac{1}{1-1/p} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots$$

Il vient alors

$$G_1(z) \geq \sum_{k \leq z} \frac{1}{k} \geq \operatorname{Log} z. \tag{16}$$

Le lecteur pourra consulter l'article et/ou le livre de Halberstam & Richert cités ci-après pour une évaluation complète de $G_1(z)$.

Rassemblant (3), (5), (13) et (14), nous obtenons

$$S \leq \frac{y}{\phi(q)} \frac{1}{G_1(z)} + z^2 + z \tag{17}$$

et avec (16) :

$$S \leq \frac{y}{\phi(q)} \frac{1}{\operatorname{Log} z} + z^2 + z. \tag{18}$$

Il nous suffit à présent de choisir z. Nous prenons

$$z = \frac{y}{q} (\operatorname{Log}(y/q))^{-1} \tag{19}$$

ce qui nous donne

$$S \leq (2 + o(1)) \frac{y}{\phi(q)} \frac{1}{\operatorname{Log}(y/q)} \qquad (y/q \to \infty). \tag{20}$$

La démonstration que nous avons donnée est insuffisante pour établir ($\star$) puisque nous n'avons que $(2 + o(1))$ au lieu de (2). On trouvera une preuve de ($\star$) dans l'article de Montgomery & Vaughan cité ci-aprés.

References

H. Halberstam & H. E. Richert, *Mean value theorems for a class of arithmetic functions*, Acta Arith. **43** (1971), 243–256.

H. Halberstam & H. E. Richert, *Sieves methods*, Academic Press (London) (1974), 364pp.

J.E. van Lint & H.E. Richert, *On primes in arithmetic progressions*, Acta Arith. **11** (1965), 209–216.

H. Montgomery & R. C. Vaughan, *The large sieve*, Mathematika **20 no 2** (1973), 119–133.