

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
ECOLE DOCTORALE 184 MATHÉMATIQUES ET  
INFORMATIQUE

LABORATOIRE I2M

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de  
docteur

Discipline : Mathématiques

Nathalie DEBOUZY

Nombres presque premiers jumeaux sous une conjecture  
d'Elliott-Halberstam

Soutenue le 28/06/2018 devant le jury composé de :

Alessandro ZACCAGNINI	Universita di Parma	Rapporteur
Jie WU	CNRS	Rapporteur
Cécile DARTYGE	Université de Lorraine	Examinatrice
Etienne FOUVRY	Université Paris Sud	Examineur
Joël RIVAT	I2M	Examineur
Stéphane LOUBOUTIN	I2M	Examineur
Olivier RAMARÉ	CNRS	Directeur de thèse

Numéro national de thèse/suffixe local : 2018AIXM0188/005ED184



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](#).

*à Jules, Corentin et Chloé*

# Résumé

Nous affinons le crible asymptotique de Bombieri afin d'obtenir un asymptotique en variables localisées. Comme conséquence, nous démontrons, sous la conjecture d'Elliott-Halberstam, qu'il existe une infinité de nombres presque premiers jumeaux, c'est à dire tels que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $p$  est premier et  $p - 2$  est soit premier, soit de la forme  $p_1 p_2$  où  $p_1 < X^\varepsilon$ , et nous en donnons un asymptotique.

A ce travail s'ajoutent deux chapitres : d'un côté, une preuve montrant comment une méthode sans crible préliminaire donne un résultat plus faible en nécessitant une hypothèse plus forte, ce qui nous permettra de détailler plusieurs estimations et de souligner l'intérêt de notre approche. D'un autre côté une exposition pédagogique d'une méthode donnant un accès facile et explicite à plusieurs estimations de moyennes de fonctions multiplicatives.

Mots clés : crible de Bombieri, conjecture d'Elliott-Halberstam, polynômes de Bernstein, méthode de convolution.

# Abstract

We improve Bombieri's asymptotic sieve to localise the variables. As a consequence, we prove, under a Elliott-Halberstam conjecture, that there exists an infinity of twins almost prime. Those are prime numbers  $p$  such that for all  $\varepsilon > 0$ ,  $p - 2$  is either a prime number or can be written as  $p_1 p_2$  where  $p_1$  and  $p_2$  are prime and  $p_1 < X^\varepsilon$ , and we give the explicit asymptotic. In addition to this main work, there are two other chapters: the first one gives an asymptotic of prime numbers  $p$  such  $p - 2$  is either a prime number or a product of three primes without using a preliminary sieve and so a stronger conjecture was needed. Hence this part shows the strength of the preliminary sieve and presents a few detailed sommmations, most of them involving the Möbius fonction, that could be useful. The second one presents an easy and explicit method to calculate an average order of multiplicative functions.

Keywords: Bombieri's sieve, Elliot Halberstam's conjecture, Bernstein's polynoms, convolution method

# Remerciements

C'est par ordre chronologique que je voudrais remercier toutes les personnes impliquées dans cette thèse, une aventure dont je ne me serais jamais crue capable il y a seulement quatre ans...

Je remercie donc tout d'abord Victor Vila, mon ancien collègue au lycée Charles de Gaulle et ami, d'avoir suggéré cette idée saugrenue pour occuper mes vacances scolaires... Je remercie ensuite mon oncle et guide de toujours, Robert Eymard, de m'avoir dirigée vers la combinatoire et pour ses précieux conseils. Chacune de nos trop peu nombreuses discussions me fait progresser et prendre du recul, merci d'être là, Bobby.

Je remercie Jean-Paul Allouche pour son accueil chaleureux à la fac de Jussieu en février 2015, d'avoir pris sur son temps pour me parler du travail de chercheur, de m'avoir offert à déjeuner alors que c'est moi qui imposais ma présence et mes questions ! Et enfin de m'avoir présenté Eric Balandraud que je remercie de m'avoir fait découvrir la conjecture de Goldbach (mon inculture mathématique est vertigineuse) et, indirectement, de m'avoir fait trouver un but pour cette thèse.

Maintenant, je ne remercierai jamais assez Olivier Ramaré d'avoir accepté mon improbable candidature de thésarde, d'avoir trouvé ce très joli sujet et surtout d'avoir su si parfaitement gérer mon travail à distance, en se montrant toujours disponible et patient. Je pense que notre collaboration a été un "perfect match" comme disent les anglais et je suis encore émerveillée par ma chance, merci pour tout, Olivier.

Et enfin, je remercie les rapporteurs pour le temps passé à lire et corriger ce travail, et bien sûr tous les membres du jury pour leur présence aujourd'hui et leur travail également.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Remerciements</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Crible de Bombieri en variables localisées</b>	<b>15</b>
1.1 Cadre et hypothèses	15
1.2 Énoncé du théorème	16
1.3 Premier lemme	18
1.4 Application : formule de Selberg généralisée	20
1.5 Premières estimations	23
1.5.1 Majorations diverses	23
1.5.2 Autres majorations	28
1.6 Résultat avec un crible préliminaire	30
1.6.1 Quelques lemmes	33
1.6.2 Évaluation du premier terme reste $R_1$	35
1.6.3 Évaluation du second terme reste $R_2$	36
1.6.4 Majoration de $\sum_{\ell} a(\ell) \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell)$	38
1.6.5 Choix du paramètre $D$ (et donc de $T$ )	40
1.7 Retrait du crible préliminaire	41
1.7.1 Premier terme : majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n) f(n)$	42
1.7.2 Majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n)$ pour $n \leq X^{1/2}$	43
1.7.3 Majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n)$ pour $m \leq X^{1/2}$	45
1.7.4 Majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n)$ pour $m$ premier $\geq X^{1/2}$	46
1.7.5 Bilan	49
1.8 Résultat final	50
<b>2 Une avancée vers le théorème des nombres premiers jumeaux</b>	<b>52</b>
2.1 Conjecture	52
2.2 Application du théorème 1.2.1 au cas $f(n) = \Lambda(n + 2)$	52
2.2.1 Asymptotiques de référence	52
2.2.2 Utilisation du théorème 1.2.1	55
2.3 Conséquence : Un théorème sur des nombres presque premiers jumeaux	58
2.3.1 Simplification de l'asymptotique	58
2.4 Application par approximation d'une fonction	61

2.4.1	Lien avec les polynômes de Bernstein et résultats utiles sur ces polynômes	61
2.4.2	Convergence de la suite des $B_m(f; \cdot)$ vers $f$	62
2.5	Résultat final	64
2.5.1	Création d'une fonction "plateau" et de fonctions "pics"	64
2.5.2	Théorème pour une fonction continue d'intégrale 1	66
2.5.3	Vers l'asymptotique final	68
2.5.4	Théorème final	71
2.6	Théorème sans puissances de nombres premiers	72
<b>3</b>	<b>Un résultat plus faible obtenu sans crible préliminaire</b>	<b>78</b>
3.1	Introduction	78
3.2	Résultats préliminaires	79
3.2.1	Des sommes partielles utiles	79
3.3	Sommes partielles avec la fonction de Möbius	81
3.3.1	Valeurs des $\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log^k n}{n}$	81
3.3.2	Sommes partielles des $\frac{\mu(n) \log^k n}{n}$ où $k \in \{0; 1; 2; 3\}$	82
3.3.3	Mêmes sommes partielles restreintes aux entiers impairs	85
3.4	Définition de $h_0$ , propriétés	89
3.5	Sommes des $\frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^k n$	94
3.6	Démonstration du théorème 3.1.2	102
3.6.1	Evaluation du terme principal	105
<b>4</b>	<b>Méthode de convolution</b>	<b>107</b>
4.1	Introduction	107
4.2	Dirichlet convolution	109
4.3	Dirichlet series	111
4.3.1	Abscissa of absolute convergence	111
4.3.2	Euler product	112
4.3.3	Uniqueness theorem	113
4.3.4	Dirichlet series and convolution	114
4.4	The step-by-step guide to convolution method and proof of Theorem 4.1.1	114
4.5	Second example of the method, proof of Theorem 4.1.2	119
4.5.1	Determination of the average order of $f_2$	119
4.5.2	Summation by parts	122
4.5.3	Conclusion	123
4.6	Third and last example, proof of Theorem 4.1.3	124

# Introduction

La conjecture des nombres premiers jumeaux affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, c'est à dire de nombres premiers  $p$  tels que  $p + 2$  soit aussi premier. À ce jour, personne n'a été capable de la démontrer mais de nombreux résultats nous en rapprochent, et certains d'entre eux, comme celui de cette thèse, nécessitent une autre conjecture qui porte sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Elliott et Halberstam ont introduit en 1968 une telle conjecture, voir ELLIOTT et Heini HALBERSTAM 1970. Nous utilisons une hypothèse de ce type pour notre travail.

**Conjecture.** *Pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $\theta$ , il existe une constante  $A_0(\delta, \theta)$  telle que*

$$\sum_{\substack{d \leq X^{1-\delta} \\ (d,2)=1}} \max_{y \leq X} \left| \psi(y; d, 2) - \frac{y}{\varphi(d)} \right| \leq A_0(\delta, \theta) \frac{X}{(6 \log X)^\theta}. \quad (0.1)$$

Rappelons rapidement que  $\psi$  est la fonction sommatoire de la fonction de von Mangoldt définie par  $\Lambda(p^\alpha) = \log p$  pour tout  $p$  premier et pour tout entier  $\alpha \geq 1$ . Et dans  $\psi(y; d, 2)$ , la variable est congrue à 2 modulo  $d$ . La fonction  $\varphi$  est l'indicatrice d'Euler. Le théorème de Bombieri-Vinogradov établit cette conjecture lorsque  $\delta > 1/2$  et on sait qu'elle est fautive pour  $\delta = 0$ .

Et sous cette conjecture, nous démontrons le théorème suivant.

**Théorème.** *Sous la conjecture (0.1), pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tous  $\beta \geq 0$  et  $\gamma > \beta$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n)\Lambda(n+2) + \frac{1}{\gamma - \beta} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (0.2)$$

où  $\mathfrak{S}_2 = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$  est la constante des nombres premiers jumeaux.

Ce résultat est le théorème 2.5.3, et en particulier, en prenant  $\beta = 0$  nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème.** *Sous la conjecture (0.1), pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\gamma$  où  $0 < \gamma < 1$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n)\Lambda(n+2) + \frac{1}{\gamma} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Ces deux théorèmes sont énoncés dans la partie 2.5.4 (Théorème final) en application de tout ce qui précède. Les sommes impliquées ont pour support les nombres premiers jumeaux et les nombres  $n$  produits de deux nombres premiers dont l'un des deux est relativement petit (inférieur à un  $n^\gamma$ ) et tels que  $n + 2$  est premier. En outre, de façon conjecturale  $\sum_{n \leq X} \Lambda(n)\Lambda(n+2) \sim \mathfrak{S}_2 X$  (en conséquence de la conjecture de Hardy-Littlewood), ce qui permettrait de déduire que les deux termes de la somme ont en fait le même poids.

Ces théorèmes comportent également les puissances de nombres premiers qui contribuent pour une part négligeable de la somme. En effet, nous démontrons le théorème suivant où  $\Lambda_1(n) = \log n$  si  $n$  est premier et 0 sinon.

**Théorème.** *Sous la conjecture (0.1), pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tous  $\beta \geq 0$  et  $\gamma > \beta$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n)\Lambda_1(n+2) + \frac{1}{\gamma - \beta} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1)\Lambda_1(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (0.3)$$

C'est le théorème 2.6.2 dans la partie 2.6 (Théorème sans puissances de nombres premiers). Et son application au cas  $\beta = 0$  :

**Théorème.** *Sous la conjecture (0.1), pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\gamma$  où  $0 < \gamma < 1$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n)\Lambda_1(n+2) + \frac{1}{\gamma} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1)\Lambda_1(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Les constantes impliquées dans les  $\mathcal{O}$  sont explicites en fonction du  $\delta$  de (0.1). Nous pourrions obtenir un résultat similaire pour  $n$  et  $n + 2k$  premiers, et en fait, le cœur de la preuve est encore plus général et s'applique non pas à  $\Lambda(n)$  et  $\Lambda(n+2)$  mais à  $\Lambda(n)$  et  $f(n)$  où  $f(n)$  est une fonction qui vérifie une liste (assez longue) d'axiomes. Il s'agit d'une version en variable localisée du crible asymptotique d'Enrico Bombieri et c'est l'objet du premier chapitre de cette thèse.

Chen Jing-run a prouvé en 1966 qu'il existe une infinité de nombres premiers  $p$  dits de Chen, c'est à dire tels que  $p+2$  est soit un nombre premier, soit un produit de deux nombres premiers, mais il n'en donnait pas un asymptotique. En 1973, il démontre que le nombre de nombres premiers de Chen inférieurs à  $X$  est supérieur à  $0.335\Pi(X)$  où  $\Pi(X) = 2\mathfrak{S}_2 X / \log^2 X$ , voir CHEN 1973. Depuis, la constante 0.335 a été plusieurs fois améliorée par différents mathématiciens.

En 1975, Enrico Bombieri donnait un asymptotique de  $\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\Lambda_k(n)$  où  $\Lambda_k = \mu \star \log^k$  est la fonction généralisée de von Mangoldt d'ordre  $k$  ( $k$  entier  $\geq 1$ ).

Il fit remarquer que cette somme est nulle pour les entiers comportant plus de  $k$  facteurs premiers, voir BOMBIERI 1975, et son résultat s'énonce ainsi :

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\Lambda_k(n) = 2\mathfrak{S}_2 \left( k + \mathcal{O}(k^{4/3}2^{-k/3}) \right) X(\log X)^{k-1} \quad (0.4)$$

dont on voit que plus  $k$  est grand et plus l'asymptotique est précis. Friedlander et Iwaniec en ont donné une version explicite dans FRIEDLANDER et IWANIEC 1978.

En 2004, Jie Wu donne la meilleure amélioration à la constante trouvée par Chen en 1973 et démontre que pour un  $X$  assez grand,

$$\pi_{1,2}(X) \geq 1.104\Pi(X) \quad (0.5)$$

où  $\Pi$  est défini plus haut et  $\pi_{1,2}(X) = |\{p \leq X : \Omega(p+2) \leq 2\}|$ ,  $\Omega$  étant la fonction donnant le nombre de facteurs premiers avec ordre de multiplicité d'un entier  $n$ , voir WU 2004.

Pour démontrer (0.2) et (0.3), nous avons utilisé un résultat d'Olivier Ramaré qui a approximé

$$\sum_{n \leq X} \Lambda^{(2\nu)}(n)f(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu)} \star \Lambda^{(\nu)}(n)f(n)$$

où  $f$  est une fonction,  $\nu$  est un entier et  $\Lambda^{(k)} = \frac{\Lambda(\log)^{k-1}}{(k-1)!}$ , par

$$\sum_{n \leq X} \Lambda^{(2\nu)}(n)f_0(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu)} \star \Lambda^{(\nu)}(n)f_0(n)$$

où  $f_0$  est une fonction plus simple à évaluer et le terme d'erreur est explicite, voir RAMARÉ 2010. En appliquant ce théorème à  $f(n) = \Lambda(n+2)$ , on peut se convaincre qu'on obtient déjà une semi-localisation autour de  $\sqrt{n}$  des deux facteurs premiers dans la décomposition de  $n$ .

Le premier chapitre de cette thèse consiste en fait à « désymétriser » le travail d'Olivier Ramaré, nous établissons d'abord un théorème qui justifie l'approximation de :

$$\sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1+\nu_2)}(n)f(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n)f(n)$$

où  $f$  est une fonction,  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont deux entiers par

$$\sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1+\nu_2)}(n)f_0(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n)f_0(n)$$

où  $f_0$  est donc une fonction plus simple à évaluer qui « approxime »  $f$ .

Il est à noter que les fonctions  $f$  et  $f_0$  doivent avoir des propriétés de régularité et de majoration qui seront précisées. Cette approximation nécessite d'utiliser un

crible préliminaire, la somme est d'abord calculée pour tous les entiers n'ayant aucun facteur premier inférieur à  $z = X^\delta$ , c'est à dire les entiers premiers avec  $P(z) = \prod_{p \leq z} p$ . Nous retirons ensuite le crible en majorant la contribution des termes ayant au moins un facteur premier  $\leq z$ . Notre terme d'erreur dépend donc de  $\delta$  qui est amené à tendre vers 0.

C'est en appliquant ensuite cette approximation à la fonction  $f(n) = \Lambda(n+2)$  (et  $f_0(n) = 1$ ), sous la conjecture (0.1), que nous pouvons, dans le deuxième chapitre, déterminer un asymptotique de

$$\sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n+2)\Lambda(n)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \frac{(\Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)})(n)}{(\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}.$$

Le produit de convolution étant égal à

$$\sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \log^{\nu_1 - 1}(d_1)}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\Lambda(d_2) \log^{\nu_2 - 1}(d_2)}{(\nu_2 - 1)!},$$

cette expression multipliée par  $(\nu_1 + \nu_2 - 1)!$  fait apparaître dans le terme de droite un polynôme de Bernstein en  $\frac{\log d_1}{\log n}$ , d'où l'idée d'utiliser ces polynômes pour approximer une fonction caractéristique (notre objectif étant d'avoir  $d_1 \leq n^\gamma$ ). Il y a deux contraintes à cela, fixer  $\nu_1 + \nu_2$  et faire varier  $\nu_1$  de 1 à un certain  $\nu'$ , mais aussi la fonction approximée par ces polynômes de Bernstein devant être continue, et à variations bornées, elle ne peut pas être constante par morceaux. Nous avons utilisé une fonction continue très proche d'une fonction caractéristique (fonction "plateau") et par ce genre de manipulation, la norme étant préservée, il en résulte un coefficient  $\frac{1}{\gamma - \beta}$  dans notre asymptotique.

## Une approche pédestre

Pour mesurer l'efficacité des résultats (0.2) et (0.3), nous avons d'autre part calculé un asymptotique de

$$\sum_{n \leq X} \left( \Lambda \log^2 + (\Lambda \star \Lambda) \log + \Lambda \star (\Lambda \log) + \Lambda \star \Lambda \star \Lambda \right) (n) \Lambda(n+2) \quad (0.6)$$

sans utiliser de crible préliminaire. Le résultat obtenu est donc plus faible et a nécessité une hypothèse plus forte de type Elliott-Halberstam, nous avons eu en effet besoin de la conjecture suivante :

**Conjecture.** *Il existe un entier positif  $B$  et un réel  $X_0$  tels que pour tout  $X \geq X_0$*

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \max_{y \leq X} \left| \psi(y; d, 2) - \frac{y}{\varphi(d)} \right| \ll \frac{X}{(\log X)^2}. \quad (0.7)$$

C'est l'objet du chapitre 3. Il faut savoir cette conjecture a été démontrée par Friedlander et Granville comme étant fausse, voir FRIEDLANDER et GRANVILLE 1992. Toutefois, nous n'avons pas réussi à nous en passer sans utiliser de crible préliminaire.

Il semblerait, au vu de l'asymptotique obtenu avec des  $\Lambda_3$  et donc des entiers comportant au plus 3 facteurs premiers, qu'il ne soit pas possible d'obtenir un résultat comme celui de Bombieri ou celui de cette thèse sans utiliser de crible préliminaire. Nous faisons remarquer que ce troisième chapitre comporte de nombreux calculs de sommations qui peuvent être utilisés par des lecteurs débutants indépendamment du travail global de cette thèse.

## Une méthode de calcul d'ordre moyen

Lors de ces calculs nous avons notamment utilisé une méthode efficace de détermination d'ordre moyen de fonctions multiplicatives : la méthode de convolution, qui est explicitée dans le quatrième et dernier chapitre. Cette méthode consiste à exprimer la série de Dirichlet  $D(f, s)$  comme le produit de deux séries de Dirichlet  $D(g, s)D(h, s)$  où  $g$  est une fonction dont l'ordre moyen est plus facile à calculer et "proche" de  $f$ , tandis que  $h$  est une fonction "plus petite", perçue comme une perturbation.  $g$  et  $h$  sont également des fonctions multiplicatives. Par le théorème d'unicité de la série de Dirichlet et les propriétés de calcul, on en déduit que  $f = g \star h$  et on utilise l'ordre moyen de  $g$  pour trouver celui de  $f$ . Les deux exemples qui sont détaillés pas à pas nous donnent les résultats suivants :

**Théorème.** *Pour tout réel  $\sigma \in ]1/2, 1]$ ,*

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} \prod_{p|n} (p+2) = C_0 X + \mathcal{O}(X^\sigma)$$

où  $C_0 = \frac{1}{2} \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{1}{p(p+1)}\right) = 1.3684\dots$

et

**Théorème.** *Pour tout réel  $\sigma \in ]-1, 0]$ ,*

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} + \mathcal{O}(X^\sigma).$$

Il se trouve que cette méthode efficace fonctionne également pour des fonctions non positives, elle nous permet notamment d'évaluer un certain nombre de sommes partielles faisant intervenir la fonction de Möbius, notamment nous montrons que :

**Théorème.** *Pour tout  $X > 1$ ,*

$$\left| \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \right| \leq \frac{0.082}{\log X} + \frac{30}{X^{1/3}}. \quad (0.8)$$

Cette partie peut être considérée indépendamment du reste et s'adresse à un plus large public. Des rappels sur le produit de convolution et le développement en série de Dirichlet sont notamment présentés, et elle est rédigée en anglais en tant qu'article indépendant.

# 1 Crible de Bombieri en variables localisées

## 1.1 Cadre et hypothèses

Dans beaucoup de problèmes, on a besoin de calculer des sommes sur des entiers qui sont premiers avec un certain nombre. On notera que le  $*$  sur les sommes et produits signifie qu'ils sont restreints aux entiers premiers avec un certain entier  $f$ . Par exemple, comme dans la partie suivante, lorsqu'on s'intéresse aux nombres premiers jumeaux on utilise ces sommes avec  $f = 2$ . Le  $'$  sur les sommes et produits signifie quant à lui qu'ils sont restreints aux entiers n'ayant pas de facteurs premiers inférieurs à  $z$ . C'est le cas où  $f = \prod_{p \leq z} p$ .

Soit  $f$  une fonction *positive* ayant une certaine régularité :

$$\sum_{n \leq y/d}^* f(dn) = \sigma(d)F(y) + r_d(f, y) \quad (1.1)$$

où  $\sigma$  est une fonction multiplicative,  $F$  une fonction quelconque et  $r_d$  un terme d'erreur.

On cherche à approcher  $f$  par une fonction  $f_0$  *positive* également mais "plus simple" et ayant cette même régularité :

$$\sum_{n \leq y/d}^* f_0(dn) = \sigma_0(d)F(y) + r_d(f_0, y).$$

Et pour la gestion des termes d'erreur, c'est sur la somme

$$R(f, D, r) = \sum_{d \leq D}^* \tau_r(d) \max_{y \leq X} |r_d(f, y)| \quad (1.2)$$

qu'on fait une hypothèse pour chaque fonction  $f$  et  $f_0$ , elles sont appelées  $(H_4)$  et  $(H_9)$  dans la section suivante. Ces hypothèses seront validées, dans le cas des nombres premiers jumeaux par une hypothèse de type Elliott-Halberstam  $(H_{10})$ .

Pour quantifier l'erreur de notre approximation de  $f$  par  $f_0$  on pose :

$$\bar{f} = f - \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} f_0 \quad (1.3)$$

où  $V_\sigma(z) = \prod_{p \leq z} (1 - \sigma(p))$ . Et on utilisera les notations suivantes :

$$r'_{d,z}(w, y) = \sum'_{n \leq y/d} w(n) \bar{f}(dn)$$

où ici  $w$  est à comprendre comme une fonction "poids" et

$$R'_z(w, \bar{f}, D, r) = \sum'_{d \leq D} \tau_r(d) \max_{y \leq X} |r'_{d,z}(w, y)|.$$

Enfin,  $f = \mathcal{O}^*(g)$  signifie  $|f| \leq g$ .

## 1.2 Enoncé du théorème

On considère  $\nu_1$  et  $\nu_2$  deux entiers non nuls tels que  $\nu_1 \leq \nu_2$  pour les hypothèses ci-dessous, même si dans la première partie de notre travail, nous avons souvent gardé un cadre général et utilisé  $\min(\nu_1, \nu_2)$  et  $\max(\nu_1, \nu_2)$ . Nous utilisons le paramètre  $\delta$  et  $z = X^\delta$  où  $\delta$  est supposé petit. Nos hypothèses sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} |F(y)| \leq \hat{F}(X) \quad (y \leq X), \\ 0 \leq \sigma(p), \sigma_0(p) \leq 1, \\ \forall n \leq X, f_0(n) \leq B_0 \hat{F}(X)/X, \\ \prod_{v \leq p \leq u}^* (1 - \sigma(p))^{-1} + \prod_{v \leq p \leq u}^* (1 - \sigma_0(p))^{-1} \leq c \log u / \log v \quad (2 \leq v \leq u) \end{array} \right. \quad (H_1)$$

où  $c$  est une constante  $\geq 2$ . Et également :

$$V_{\sigma_0}(z) \leq \frac{c}{\log z} \quad (H_2)$$

où nous rappelons que  $V_\sigma(z) = \prod_{p \leq z} (1 - \sigma(p))$ .

Une hypothèse fondamentale concerne la positivité de  $f$  et  $f_0$  :

$$f \geq 0 \quad \text{et} \quad f_0 \geq 0. \quad (H_3)$$

L'hypothèse sur les termes restes est la suivante :

$$R(f, D_0, 2\nu_2) + \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} R(f_0, D_0, 2\nu_2) \leq A \hat{F}(X) / \log X \quad (H_4)$$

où  $R(f, D, r) = \sum_{d \leq D} \tau_r(d) \max_{y \leq X} |r_d(f, y)|$ . Et (voir RAMARÉ 2010) cette hypothèse peut être remplacée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall d \leq D_0, \max_{y \leq X} (|r_d(f, y)|, |r_d(f_0, y)|) \leq C \hat{F}(X) / d \\ R(f, D_0, 1) + \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} R(f_0, D_0, 1) \leq A' \hat{F}(X) / \log^2 X \end{array} \right. \quad (H_9)$$

Où le  $A$  de  $(H_4)$  est alors donné par  $A = \sqrt{C(2 \log X)^{4\nu_2^2} A'}$ .

Le contrôle des grandes valeurs de  $\sigma_0$  est assuré par :

$$\prod_{z \leq p \leq X}^* \sum_{a \geq 0} \sigma_0(p^a) \leq c \frac{\log X}{\log z}. \quad (H_5)$$

Le contrôle des grandes valeurs de  $\sigma$  est assuré par le choix de  $\Delta$  où

$$\Delta = \sum_{\substack{p^a \leq X \\ p \geq z}} |\sigma(p^a) - \sigma_0(p^a)|.$$

Lors du retrait du crible préliminaire, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

$$\max_{p \leq z} (\sigma(p^h) p^h, \sigma_0(p^h) p^h) \leq c, \quad (H_6)$$

i.e. les valeurs prises par  $\sigma$  et  $\sigma_0$  pour les puissance de nombres premiers ne varient pas trop. On suppose aussi que :

$$V_{\sigma_0}(X^{1/4}) \leq \frac{c}{\log X}. \quad (H_7)$$

Et enfin nous avons besoin des deux bornes suivantes :

$$\hat{F}(X) \geq z \sqrt{X} \delta^{-\nu_2-1}, \quad \max(\|f\|_\infty, \|f_0\|_\infty) \leq B. \quad (H_8)$$

**Théorème 1.2.1.** *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1+\nu_2)}(n) f(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n) \\ &= \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \left( \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1+\nu_2)}(n) f_0(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f_0(n) \right) \\ & \quad + (\rho + \theta) \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \hat{F}(X) \frac{(\log X)^{\nu_1+\nu_2-1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \end{aligned}$$

où

$$|\rho| \leq 2 \times (149\nu_2)^{\nu_1+\nu_2} \times \left( Ac^2 + (C_0(c)e\delta^{3\nu_2} + \Delta 4^{\frac{1}{\delta}}) \left(\frac{c}{\delta}\right)^{2\nu_2} \right)$$

et

$$\begin{aligned} |\theta| &\leq 2 \times (24\nu_2)^{\nu_2} B_0 \left( 3\nu_2^2 \log \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_1+2\nu_2} \delta^{\nu_1} \\ & \quad + 2 \times \frac{B}{\log X} c^2 (1 + e^{c\Delta}) (1 + C_0(c)) (4\delta)^{\nu_2} \nu_2^{\nu_1} + A'. \end{aligned}$$

Les notations sont celles ci-dessus et nous en introduisons d'autres dans la

partie 1.4.

### 1.3 Premier lemme

Nous généralisons le lemme 5.2 de Steinig et Diamond de leur article G.DIAMOND et STEINIG 1970 établi pour un entier  $n$  et son double  $2n$  au résultat suivant valable pour deux entiers quelconques  $n_1$  et  $n_2$  (associés à leur somme  $n_1 + n_2$ ).

**Lemme 1.3.1.** *Soit  $F$  une fonction continue et infiniment dérivable. Soit  $m$  un entier naturel non nul. On note  $F^{(m)}$  la dérivée  $m$ -ième de la fonction  $F$ , et soient  $n_1$  et  $n_2$ , deux entiers naturels non nuls. On a*

$$\frac{1}{(n_1 + n_2 - 1)!} \left( \frac{F'}{F} \right)^{(n_1+n_2-1)} + \frac{1}{(n_1 - 1)!} \left( \frac{F'}{F} \right)^{(n_1-1)} \frac{1}{(n_2 - 1)!} \left( \frac{F'}{F} \right)^{(n_2-1)} = \frac{P_{n_1, n_2}(F, F', \dots, F^{(n_1+n_2)})}{F^{\max(n_1, n_2)}}$$

où  $P_{n_1, n_2}$  est un polynôme dépendant de  $n_1$  et  $n_2$  à coefficients rationnels.

*Démonstration.* On note

$$\Sigma_{n_1, n_2}(F) = \frac{1}{(n_1 + n_2 - 1)!} \left( \frac{F'}{F} \right)^{(n_1+n_2-1)} + \frac{1}{(n_1 - 1)!} \left( \frac{F'}{F} \right)^{(n_1-1)} \frac{1}{(n_2 - 1)!} \left( \frac{F'}{F} \right)^{(n_2-1)}.$$

Or pour tout entier  $j$  strictement positif, il existe un polynôme  $R_j(Y_0, Y_1, \dots, Y_j)$  à coefficients rationnels et indépendant de  $F$  tel que

$$\frac{1}{(j - 1)!} \left( \frac{F'}{F} \right)^{(j-1)} = R_j(F, F', \dots, F^{(j)}) F^{-j}.$$

Et ainsi

$$\Sigma_{n_1, n_2}(F) = S_{n_1, n_2}(F, F', \dots, F^{(n_1+n_2)}) F^{-(n_1+n_2)}$$

où  $S_{n_1, n_2} = R_{n_1+n_2} + R_{n_1} R_{n_2}$  est un polynôme, qu'on peut exprimer en fonction des puissances de la première variable :

$$S_{n_1, n_2}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n_1+n_2}) = \sum_{j=0}^{n_1+n_2-1} Y_0^j Q_j^{n_1, n_2}(Y_1, \dots, Y_{n_1+n_2}) \quad (1.4)$$

où les  $Q_j^{n_1, n_2}$  sont des polynômes indépendants de  $F$ .

On va montrer que  $Q_j^{n_1, n_2}$  est identiquement nul pour tout  $j$  lorsque  $0 \leq j \leq \min(n_1, n_2) - 1$ .

C'est à dire que pour tous  $y_1, \dots, y_{n_1+n_2}$  réels,  $Q_j^{n_1, n_2}(y_1, \dots, y_{n_1+n_2}) = 0$ .

Pour cela, on considère  $f$  un polynôme tel que  $f(x) = xg(x)$  où  $g$  est un polynôme qui ne s'annule pas en zéro.

Le lecteur montrera aisément par récurrence que pour tout  $j$ ,

$$\frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{f'}{f}\right)^{(j-1)} = \frac{(-1)^{j-1}}{x^j} + \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(j-1)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Sigma_{n_1, n_2}(f) &= \frac{(-1)^{n_1+n_2-1}}{x^{n_1+n_2}} + \frac{1}{(n_1+n_2-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(n_1+n_2-1)} + \frac{(-1)^{n_1-1}}{x^{n_1}} \frac{(-1)^{n_2-1}}{x^{n_2}} \\ &+ \frac{1}{(n_1-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(n_1-1)} \frac{(-1)^{n_2-1}}{x^{n_2}} + \frac{1}{(n_2-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(n_2-1)} \frac{(-1)^{n_1-1}}{x^{n_1}} \\ &+ \frac{1}{(n_1-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(n_1-1)} \frac{1}{(n_2-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(n_2-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{n_1, n_2}(f) &= \frac{1}{(n_1-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(n_1-1)} \frac{(-1)^{n_2-1}}{x^{n_2}} \\ &+ \frac{1}{(n_2-1)!} \left(\frac{g'}{g}\right)^{(n_2-1)} \frac{(-1)^{n_1-1}}{x^{n_1}} + \Sigma_{n_1, n_2}(g). \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout entier  $j$  on a  $f(x)^j = x^j g(x)^j$  et sachant que  $g(0) \neq 0$ , on a dans un voisinage de 0 ne contenant pas 0, pour tout  $k \in \{0; \dots; \min(n_1, n_2) - 1\}$

$$|f(x)^{n_1+n_2-k} \Sigma_{n_1, n_2}(f(x))| \leq \alpha_k |x|^{\min(n_1, n_2) - k} \quad (1.5)$$

où  $\alpha_k$  est une constante dépendant de  $g$  et du voisinage. Or, en prenant  $k = 0$ , le membre de gauche de cette inégalité est égal à  $|S_{n_1, n_2}(f, f', \dots, f^{(n_1+n_2)})|$ .

Donc, en faisant tendre  $x$  vers 0 et par continuité on a :

$$S_{n_1, n_2}(f(0), f'(0), \dots, f^{(n_1+n_2)}(0)) = 0$$

Et comme  $f(0) = 0$ ,

$$\sum_{j=1}^{n_1+n_2-1} f(0)^j Q_j^{n_1, n_2}(f'(0), \dots, f^{(n_1+n_2)}(0)) = 0.$$

D'après l'identité (1.4) on a  $Q_0^{n_1, n_2}(f'(0), \dots, f^{(n_1+n_2)}(0)) = 0$ .

Sachant que cette égalité est vraie quelle que soit  $f$ , on peut choisir n'importe

quels réels  $(y_1, \dots, y_{n_1+n_2}) = (f'(0), \dots, f^{(n_1+n_2)}(0))$  avec la seule contrainte que  $y_1$  est non nul, mais par continuité on en déduit que  $Q_0^{n_1, n_2}$  est identiquement nul.

Supposons maintenant qu'on a montré  $Q_0^{n_1, n_2}, \dots, Q_{k-1}^{n_1, n_2}$  identiquement nuls pour tout  $k \in \{0, \dots, \min(n_1, n_2) - 1\}$ .

Alors,

$$f(x)^{n_1+n_2-k} \Sigma_{n_1, n_2}(f(x)) = \sum_{j=k}^{n_1+n_2-1} f(x)^{j-k} Q_j^{n_1, n_2}(f'(x), \dots, f^{(n_1+n_2)}(x)).$$

Grâce à l'inégalité (1.5), utilisée de même dans un voisinage pointé de 0, on trouvera en procédant comme précédemment que  $Q_k^{n_1, n_2}$  est identiquement nul.

Et donc  $Q_j^{n_1, n_2}$  est identiquement nul pour tout  $j$  lorsque  $0 \leq j \leq \min(n_1, n_2) - 1$ .

Ainsi on en déduit que

$$F^{n_1+n_2} \Sigma_{n_1, n_2}(F) = \sum_{j=\min(n_1, n_2)}^{n_1+n_2-1} F^j Q_j^{n_1, n_2}(F', \dots, F^{(n_1+n_2)}).$$

Maintenant, en posant

$$P_{n_1, n_2}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n_1+n_2}) = \sum_{j=\min(n_1, n_2)}^{n_1+n_2-1} Y_0^{j-\min(n_1, n_2)} Q_j^{n_1, n_2}(Y_1, \dots, Y_{n_1+n_2}) \quad (1.6)$$

on a bien

$$\Sigma_{n_1, n_2}(F) = \frac{P_{n_1, n_2}(F, F', \dots, F^{(n_1+n_2)})}{F^{\max(n_1, n_2)}}$$

ce que nous voulions démontrer.  $\square$

## 1.4 Application : formule de Selberg généralisée

On applique le lemme précédent (1.3.1) à la fonction  $\zeta$  de Riemann. On notera  $D(f, s)$  la série de Dirichlet d'une fonction  $f$ . Notamment  $\zeta(s) = D(1, s)$ . On rappelle que  $D'(f, s) = D(-f \log, s)$  et ainsi pour tout  $k \geq 1$ ,  $\zeta^{(k)}(s) = D((- \log)^k, s)$ . En outre, on sait que

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -D(\Lambda, s) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\zeta}(s) = D(\mu, s) \quad (1.7)$$

où  $\Lambda$  est la fonction de Von Mangoldt et  $\mu$  la fonction de Möbius.

On rappelle également que pour deux fonctions  $f$  et  $g$ , la somme  $D(f, s) + D(g, s) = D(f + g, s)$  et le produit  $D(f, s) \times D(g, s) = D(f \star g, s)$  où  $\star$  est le produit de convolution :  $f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$ . Le lecteur trouvera si besoin un exposé plus détaillé sur les séries de Dirichlet et la fonction  $\zeta$  dans le chapitre 4.

Ainsi le terme de droite de notre expression est

$$\frac{P_{n_1, n_2}(\zeta, \zeta', \dots, \zeta^{(n_1+n_2)})}{\zeta^{\max(n_1, n_2)}} = P\left(D(1, s), D(\log, s), \dots, D((\log)^{n_1+n_2-1}, s)\right) D(\mu \star \dots \star \mu, s)$$

où  $\mu$  est convolée à elle-même au plus  $\max(n_1, n_2)$  fois. Et donc ce terme est égal à  $D(P^*(\log, \log^2, \dots, \log^{n_1+n_2-1}, \mu), s)$  où  $P^*$  est un polynôme en produits de convolution dont le degré sur  $\mu$  est au plus  $\max(n_1, n_2)$  et dont une expression précise est donnée ci-après en utilisant les calculs de G.DIAMOND et STEINIG 1970 (une formule de la dérivée  $n-1$ -ième de  $F'/F$  est démontrée par récurrence dans leur lemme 5.1).

Le terme de gauche quant à lui est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{D(-\Lambda(-\log)^{n_1+n_2-1}, s)}{(n_1+n_2-1)!} + \frac{D(-\Lambda(-\log)^{n_1-1}, s)}{(n_1-1)!} \frac{D(-\Lambda(-\log)^{n_2-1}, s)}{(n_2-1)!} \\ & = D\left(\frac{-\Lambda(-\log)^{n_1+n_2-1}}{(n_1+n_2-1)!} + \frac{\Lambda(-\log)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \star \frac{\Lambda(-\log)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}, s\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} & \frac{-\Lambda(-\log)^{n_1+n_2-1}}{(n_1+n_2-1)!} + \frac{\Lambda(-\log)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \star \frac{\Lambda(-\log)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \\ & = (-1)^{n_1+n_2} \left( \frac{\Lambda(\log)^{n_1+n_2-1}}{(n_1+n_2-1)!} + \frac{\Lambda(\log)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \star \frac{\Lambda(\log)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \right). \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit la formule fondamentale suivante :

Soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  deux entiers supérieurs ou égaux à 1,

$$\frac{\Lambda(\log)^{\nu_1+\nu_2-1}}{(\nu_1+\nu_2-1)!} + \frac{\Lambda(\log)^{\nu_1-1}}{(\nu_1-1)!} \star \frac{\Lambda(\log)^{\nu_2-1}}{(\nu_2-1)!} = (-1)^{\nu_1+\nu_2} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \quad (1.9)$$

où

$$\Sigma_1 = \sum_{\mathbf{k}} (\nu_1 + \nu_2) \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k_1! k_2! \dots k_{\nu_1+\nu_2}!} \mu_{\mathbf{k}} \star \prod_{j=1}^{\nu_1+\nu_2} \left( \frac{(\log)^j}{j!} \right)^{k_j}$$

où  $\mu_{\mathbf{k}} = \mu \star \mu \star \dots \star \mu$  la fonction  $\mu$  convolée  $k$  fois par elle-même et  $\mathbf{k}$  décrit tous les vecteurs  $(k_1, k_2, \dots, k_{\nu_1+\nu_2})$  de  $\nu_1 + \nu_2$  entiers positifs tels que :

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + \dots + (\nu_1 + \nu_2)k_{\nu_1+\nu_2} = \nu_1 + \nu_2 \\ k_1 + \dots + k_{\nu_1+\nu_2} = k \leq \max(\nu_1, \nu_2) \end{cases} \quad (1.10)$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \nu_1 \nu_2 \frac{(-1)^{k'+k''} (k' - 1)! (k'' - 1)!}{k'_1! \dots k'_{\nu_1}! k''_1! \dots k''_{\nu_2}!} \mu_{k'+k''} \star \prod_{j=1}^{\max(\nu_1, \nu_2)} \left( \frac{(\log)^j}{j!} \right)^{k'_j + k''_j}$$

où  $\mathbf{k}'$  décrit tous les vecteurs  $(k'_1, k'_2, \dots, k'_{\nu_1})$  de  $\nu_1$  entiers positifs et  $\mathbf{k}''$  décrit tous les vecteurs  $(k''_1, k''_2, \dots, k''_{\nu_2})$  de  $\nu_2$  entiers positifs tels que :

$$\begin{cases} k'_1 + 2k'_2 + \dots + \nu_1 k'_{\nu_1} = \nu_1 \\ k''_1 + 2k''_2 + \dots + \nu_2 k''_{\nu_2} = \nu_2 \\ k'_1 + \dots + k'_{\nu_1} + k''_1 + \dots + k''_{\nu_2} = k' + k'' \leq \max(\nu_1, \nu_2). \end{cases} \quad (1.11)$$

On notera  $\mathbb{K}$  l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{k}$  décrits précédemment et  $\mathbb{H}$  l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{h} = (\mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  de taille  $\nu_1 + \nu_2$  tels que décrits ci-dessus.

Avec la convention suivante : si  $\nu_1 = \max(\nu_1, \nu_2)$  alors  $k''_j = 0$  pour tout  $j \geq \nu_2$  et inversement si  $\nu_2 = \max(\nu_1, \nu_2)$  alors  $k'_j = 0$  pour tout  $j \geq \nu_1$ .

La clé de cette égalité est que  $\mu_k$  avec  $k > \max(\nu_1, \nu_2)$  s'annule à cause du lemme précédent.

On remarque que sous la convention précédente, on peut aussi écrire :

$$\prod_{j=1}^{\max(\nu_1, \nu_2)} \left( \frac{(\log)^j}{j!} \right)^{k'_j + k''_j} = \prod_{j=1}^{\nu_1} \left( \frac{(\log)^j}{j!} \right)^{k'_j} \prod_{j=1}^{\nu_2} \left( \frac{(\log)^j}{j!} \right)^{k''_j}.$$

## Notations

On définit les fonctions  $c$  et  $w$  sur  $\mathbb{K}$  qui à tout vecteur  $\mathbf{k}$  de longueur  $k$  associent :

$$\begin{cases} c(\mathbf{k}) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k_1! \dots k_{\nu_1+\nu_2}!} \\ w(\mathbf{k}) = \frac{1}{1!^{k_1}} \frac{1}{2!^{k_2}} \dots \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2)!^{k_{\nu_1+\nu_2}}} \end{cases}$$

et les fonctions  $\bar{c}$  et  $\bar{w}$  sur  $\mathbb{H}$  qui à tout vecteur  $\mathbf{h} = (\mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  de longueur  $h$  associent :

$$\begin{cases} \bar{c}(\mathbf{h}) = \frac{(-1)^{k'-1} (k'-1)! (-1)^{k''-1} (k''-1)!}{k'_1! \dots k'_{\nu_1}! k''_1! \dots k''_{\nu_2}!} \\ \bar{w}(\mathbf{h}) = \frac{1}{1!^{k'_1}} \frac{1}{2!^{k'_2}} \dots \frac{1}{\nu_1!^{k'_{\nu_1}}} \frac{1}{1!^{k''_1}} \frac{1}{2!^{k''_2}} \dots \frac{1}{\nu_2!^{k''_{\nu_2}}}. \end{cases}$$

On note également pour tout entier  $m \geq 1$ , où  $k_1, k_2, \dots, k_m$  sont des entiers,

$$L(k_1, \dots, k_m) = \log \star \dots \star \log \star \log^2 \star \dots \star \log^2 \star \dots \star \log^m \star \dots \star \log^m \quad (1.12)$$

où chaque  $\log^i$  est convolé  $k_i$  fois par lui-même.

Ainsi en notant  $\Lambda^{(k)} = \frac{\Lambda(\log)^{k-1}}{(k-1)!}$ , on a

$$\begin{aligned} & \Lambda^{(\nu_1+\nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)} \\ &= (\nu_1 + \nu_2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{K}} c(\mathbf{k}) w(\mathbf{k}) \mu_{\mathbf{k}} \star L(\mathbf{k}) + \nu_1 \nu_2 \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} \bar{c}(\mathbf{h}) \bar{w}(\mathbf{h}) \mu_{\mathbf{h}} \star L(\mathbf{k}') \star L(\mathbf{k}'') \end{aligned}$$

qu'on notera plus simplement

$$\Lambda^{(\nu_1+\nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)} = \sum_{\ell} a(\ell) \mu_{\ell} \star L(\ell). \quad (1.13)$$

## 1.5 Premières estimations

### 1.5.1 Majorations diverses

**Lemme 1.5.1.** *Pour une longueur  $k_0$  fixée et  $\nu_1$  et  $\nu_2$  entiers naturels non nuls fixés,*

$$\sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{H} \\ h=k_0}} |\bar{c}(\mathbf{h})| = \frac{(k'_0 - 1)!(k''_0 - 1)!}{\nu_1! \nu_2!} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k_0} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1} \quad (a)$$

et

$$\sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{K} \\ k=k_0}} |c(\mathbf{k})| = \frac{1}{k_0(\nu_1 + \nu_2 - k_0)!} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1} \leq \frac{1}{k_0} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1}. \quad (b)$$

*Démonstration.* Pour montrer l'égalité (b), on exprime  $(1 + XY + XY^2 + \dots + XY^{\nu_1+\nu_2})^{\nu_1+\nu_2}$  de deux manières différentes (voir G.DIAMOND et STEINIG 1970) et on identifie le terme en  $X^k Y^{\nu_1+\nu_2}$ .

$$\begin{aligned} & (1 + XY + XY^2 + \dots + XY^{\nu_1+\nu_2})^{\nu_1+\nu_2} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k_1, k_2, \dots, k_{\nu_1+\nu_2} \leq \nu_1+\nu_2 \\ 0 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_{\nu_1+\nu_2} \leq \nu_1+\nu_2}} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k_1, \dots, k_{\nu_1+\nu_2}} X^{k_1 + \dots + k_{\nu_1+\nu_2}} Y^{k_1 + 2k_2 + \dots + (\nu_1+\nu_2)k_{\nu_1+\nu_2}}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(1 + XY + XY^2 + \dots + XY^{\nu_1+\nu_2})^{\nu_1+\nu_2}$$

est égal à

$$\begin{aligned} & (1 + X(Y + Y^2 + \dots + Y^{\nu_1+\nu_2}))^{\nu_1+\nu_2} \\ &= \left(1 + \frac{XY}{1-Y}\right)^{\nu_1+\nu_2} + \mathcal{O}(XY^{\nu_1+\nu_2+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\nu_1+\nu_2} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k} (XY)^k \sum_{j \geq 0} \binom{k-1+j}{k-1} Y^j + \mathcal{O}(XY^{\nu_1+\nu_2+1}). \end{aligned}$$

On notera que  $\mathcal{O}(XY^{\nu_1+\nu_2+1})$  désigne une série entière en  $X$  et  $Y$  multipliée par  $XY^{\nu_1+\nu_2+1}$ .

On identifie donc le terme en  $X^k Y^{\nu_1+\nu_2}$  dans les deux expressions, c'est à dire  $j = \nu_1 + \nu_2 - k$  dans la seconde. On trouve pour tout  $k$  :

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_{\nu_1+\nu_2}=k \\ k_1+2k_2+\dots+(\nu_1+\nu_2)k_{\nu_1+\nu_2}=\nu_1+\nu_2}} \binom{\nu_1+\nu_2}{k_1, \dots, k_{\nu_1+\nu_2}} = \binom{\nu_1+\nu_2}{k} \binom{\nu_1+\nu_2-1}{k-1} \quad (1.14)$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{K} \\ k=k_0}} |c(\mathbf{k})| &= \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{K} \\ k=k_0}} \binom{k_0-1}{k_1, \dots, k_{\nu_1+\nu_2}} \\ &= \frac{(k_0-1)!}{(\nu_1+\nu_2)!} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_{\nu_1+\nu_2}=k \\ k_1+2k_2+\dots+(\nu_1+\nu_2)k_{\nu_1+\nu_2}=\nu_1+\nu_2}} \binom{\nu_1+\nu_2}{k_1, \dots, k_{\nu_1+\nu_2}} \\ &= \frac{(k_0-1)!}{(\nu_1+\nu_2)!} \binom{\nu_1+\nu_2}{k_0} \binom{\nu_1+\nu_2-1}{k_0-1} \\ &= \frac{1}{k_0(\nu_1+\nu_2-k_0)!} \binom{\nu_1+\nu_2-1}{k_0-1}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

On raisonne de manière similaire pour l'égalité (a), avec cette fois-ci quatre variables :

$$\begin{aligned} &(1 + X_1 Y_1 + X_1 Y_1^2 + \dots X_1 Y_1^{\nu_1})^{\nu_1} (1 + X_2 Y_2 + X_2 Y_2^2 + \dots X_2 Y_2^{\nu_2})^{\nu_2} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k'_1, k'_2, \dots, k'_{\nu_1} \leq \nu_1 \\ 0 \leq k'_1 + k'_2 + \dots + k'_{\nu_1} \leq \nu_1}} \binom{\nu_1}{k'_1, \dots, k'_{\nu_1}} X_1^{k'_1 + \dots + k'_{\nu_1}} Y_1^{k'_1 + 2k'_2 + \dots + \nu_1 k'_{\nu_1}} \\ &\quad \times \sum_{\substack{0 \leq k''_1, k''_2, \dots, k''_{\nu_2} \leq \nu_2 \\ 0 \leq k''_1 + k''_2 + \dots + k''_{\nu_2} \leq \nu_2}} \binom{\nu_2}{k''_1, \dots, k''_{\nu_2}} X_2^{k''_1 + \dots + k''_{\nu_2}} Y_2^{k''_1 + 2k''_2 + \dots + \nu_2 k''_{\nu_2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme dans la démonstration précédente, ce produit est égal à :

$$\begin{aligned} &\left( \left( 1 + \frac{X_1 Y_1}{1 - Y_1} \right)^{\nu_1} + \mathcal{O}(X_1 Y^{\nu_1+1}) \right) \left( \left( 1 + \frac{X_2 Y_2}{1 - Y_2} \right)^{\nu_2} + \mathcal{O}(X_2 Y^{\nu_2+1}) \right) \\ &= \left( 1 + \frac{X_1 Y_1}{1 - Y_1} \right)^{\nu_1} \left( 1 + \frac{X_2 Y_2}{1 - Y_2} \right)^{\nu_2} + \mathcal{O}(X_1 Y^{\nu_1+1} + X_2 Y^{\nu_2+1}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$(1.17)$$

On identifie ensuite le terme en  $X_1^{k'} Y_1^{\nu_1} X_2^{k''} Y_2^{\nu_2}$  où  $k' + k'' = k$  (longueur fixée) dans ces deux expressions. Le lecteur pourra s'assurer en développant en séries entières que ce terme n'apparaît pas dans le  $\mathcal{O}$  en raison des exposants de  $Y_1$  et  $Y_2$ .

On trouve donc en prenant finalement  $X_1 = X_2 = X$  et  $Y_1 = Y_2 = Y$  :

$$\sum_{\substack{k'_1+k'_2+\dots+k'_{\nu_1}=k' \\ k'_1+2k'_2+\dots+\nu_1 k'_{\nu_1}=\nu_1}} \binom{\nu_1}{k'_1, \dots, k'_{\nu_1}} \sum_{\substack{k''_1+k''_2+\dots+k''_{\nu_2}=k'' \\ k''_1+2k''_2+\dots+\nu_2 k''_{\nu_2}=\nu_2}} \binom{\nu_2}{k''_1, \dots, k''_{\nu_2}} = \binom{\nu_1 + \nu_2}{k} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k - 1}.$$

Mais :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{H} \\ h=k_0}} |\bar{c}(\mathbf{h})| &= \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{H} \\ h=k_0}} \binom{k'_0 - 1}{k'_1, \dots, k'_{\nu_1}} \binom{k''_0 - 1}{k''_1, \dots, k''_{\nu_2}} \\ &= \frac{(k'_0 - 1)!(k''_0 - 1)!}{\nu_1! \nu_2!} \sum_{\substack{k'_1+k'_2+\dots+k'_{\nu_1}=k'_0 \\ k'_1+2k'_2+\dots+\nu_1 k'_{\nu_1}=\nu_1 \\ k''_1+k''_2+\dots+k''_{\nu_2}=k''_0 \\ k''_1+2k''_2+\dots+\nu_2 k''_{\nu_2}=\nu_2}} \binom{\nu_1}{k'_1, \dots, k'_{\nu_1}} \binom{\nu_2}{k''_1, \dots, k''_{\nu_2}} \\ &= \frac{(k'_0 - 1)!(k''_0 - 1)!}{\nu_1! \nu_2!} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k_0} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1}. \end{aligned}$$

□

Ainsi,

$$\frac{(k'_0 - 1)!(k''_0 - 1)!}{\nu_1! \nu_2!} \leq \frac{(k_0 - 1)!}{\nu_1! \nu_2!} = \frac{(\nu_1 + \nu_2)!(k_0 - 1)!(\nu_1 + \nu_2 - k_0)!}{(\nu_1 + \nu_2 - k_0)! \nu_1! \nu_2! (\nu_1 + \nu_2)!}$$

en majorant  $\frac{(\nu_1 + \nu_2)!}{(\nu_1 + \nu_2 - k_0)!}$  par  $(\nu_1 + \nu_2)(\nu_1 + \nu_2 - 1)^{k_0 - 1}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k_0=1}^{\max(\nu_1, \nu_2)} \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{H} \\ h=k_0}} |\bar{c}(\mathbf{h})| &\leq \sum_{k_0=1}^{\max(\nu_1, \nu_2)} \frac{\nu_1 + \nu_2}{k_0} \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1)^{k_0 - 1}}{\nu_1! \nu_2!} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1} \\ &\leq \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1! \nu_2!} \sum_{k_0=0}^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1} (\nu_1 + \nu_2 - 1)^{k_0 - 1} \\ &\leq \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1! \nu_2!} (\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} = \frac{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}{\nu_1! \nu_2!}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$  on en déduit :

$$\frac{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}{\nu_1! \nu_2!} \leq \left(\frac{e}{\nu_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{e}{\nu_2}\right)^{\nu_2} (2 \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2} = (2e)^{\nu_1 + \nu_2} \left(\frac{\max(\nu_1, \nu_2)}{\min(\nu_1, \nu_2)}\right)^{\min(\nu_1, \nu_2)}.$$

Et ainsi,

$$\sum_{k_0=1}^{\max(\nu_1, \nu_2)} \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{H} \\ h=k_0}} |\bar{c}(\mathbf{h})| \leq 6^{\nu_1 + \nu_2} \left( \frac{\max(\nu_1, \nu_2)}{\min(\nu_1, \nu_2)} \right)^{\min(\nu_1, \nu_2)}. \quad (1.18)$$

Cette majoration nous servira dans la démonstration des lemmes (1.5.4) et (1.5.3).

**Lemme 1.5.2.** *Pour  $\mathbf{k}$  appartenant à  $\mathbb{K}$ ,  $w(\mathbf{k}) \leq 2^{-\min(\nu_1, \nu_2)}$  et pour  $\mathbf{h}$  appartenant à  $\mathbb{H}$ ,  $\bar{w}(\mathbf{h}) \leq 2^{-\min(\nu_1, \nu_2)}$ .*

*Démonstration.* En exprimant  $w(\mathbf{k}) = e^{\log(w(\mathbf{k}))}$  on minore  $S = -\log(w(\mathbf{k})) = \sum_{j=1}^{\nu_1 + \nu_2} k_j \sum_{\ell=1}^j \log \ell$ .

$$\begin{aligned} S &\geq \log 2 \sum_{j=1}^{\nu_1 + \nu_2} k_j \sum_{\ell=2}^j 1 \\ &\geq \log 2 \sum_{j=1}^{\nu_1 + \nu_2} j k_j - \log 2 \sum_{j=1}^{\nu_1 + \nu_2} k_j \\ &\geq (\nu_1 + \nu_2) \log 2 - \max(\nu_1, \nu_2) \log 2 \geq \min(\nu_1, \nu_2) \log 2. \end{aligned}$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, en minorant  $S = -\log(\bar{w}(\mathbf{h}))$ , on trouve :

$$\begin{aligned} S &\geq \log 2 \sum_{j=1}^{\nu_1} k'_j \sum_{\ell=2}^j 1 + \log 2 \sum_{j=1}^{\nu_2} k''_j \sum_{\ell=2}^j 1 \\ &\geq \log 2 \left( \sum_{j=1}^{\nu_1} j k'_j + \sum_{j=1}^{\nu_2} j k''_j \right) - \log 2 \left( \sum_{j=1}^{\nu_1} k'_j + \sum_{j=1}^{\nu_2} k''_j \right) \\ &\geq (\nu_1 + \nu_2) \log 2 - \max(\nu_1, \nu_2) \log 2 \geq \min(\nu_1, \nu_2) \log 2. \end{aligned}$$

On en déduit la deuxième inégalité.  $\square$

**Lemme 1.5.3.**

$$(\nu_1 + \nu_2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{K}} |c(\mathbf{k})| + \nu_1 \nu_2 \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} |\bar{c}(\mathbf{h})| \leq 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{(\max(\nu_1, \nu_2))^{\min(\nu_1, \nu_2) + 1}}{(\min(\nu_1, \nu_2))^{\min(\nu_1, \nu_2) - 1}} \quad (1.19)$$

*Démonstration.* D'après le lemme (4.2.3),

$$(\nu_1 + \nu_2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{K}} |c(\mathbf{k})| \leq (\nu_1 + \nu_2) \sum_{k_0=1}^{\max(\nu_1, \nu_2)} \binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1} \frac{1}{k_0}$$

or

$$\binom{\nu_1 + \nu_2 - 1}{k_0 - 1} \frac{1}{k_0} = \frac{1}{\nu_1 + \nu_2} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k_0}$$

et

$$\sum_{k_0=1}^{\max(\nu_1, \nu_2)} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k_0} \leq \sum_{k_0=0}^{\nu_1 + \nu_2} \binom{\nu_1 + \nu_2}{k_0} = 2^{\nu_1 + \nu_2}$$

donc, en utilisant cette majoration et (1.18), on obtient :

$$\begin{aligned} (\nu_1 + \nu_2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{K}} |c(\mathbf{k})| + \nu_1 \nu_2 \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} |\bar{c}(\mathbf{h})| &\leq 2^{\nu_1 + \nu_2} + 6^{\nu_1 + \nu_2} \nu_1 \nu_2 \left( \frac{\max(\nu_1, \nu_2)}{\min(\nu_1, \nu_2)} \right)^{\min(\nu_1, \nu_2)} \\ &\leq 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{(\max(\nu_1, \nu_2))^{\min(\nu_1, \nu_2) + 1}}{(\min(\nu_1, \nu_2))^{\min(\nu_1, \nu_2) - 1}}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.5.4.**

$$(\nu_1 + \nu_2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{K}} |c(\mathbf{k})w(\mathbf{k})| + \nu_1 \nu_2 \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} |\bar{c}(\mathbf{h})\bar{w}(\mathbf{h})| \leq 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{(\max(\nu_1, \nu_2))^{\min(\nu_1, \nu_2) + 2}}{(2 \min(\nu_1, \nu_2))^{\min(\nu_1, \nu_2)}} \quad (1.20)$$

*Démonstration.* Cette majoration se déduit aisément des lemmes précédents en majorant un  $\min(\nu_1, \nu_2)$  par un  $\max(\nu_1, \nu_2)$ .

□

Le Lemme 16 de RAMARÉ 2010 comporte une erreur que nous corrigeons ici, et pour la démonstration duquel nous utilisons les deux lemmes préliminaires suivants :

**Lemme 1.5.5.** *Pour  $300 \leq a \leq b$  on a*

$$\prod_{a < p \leq b} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq 1.04 \frac{\log b}{\log a}.$$

Voir le lemme 14 de RAMARÉ 2010.

**Lemme 1.5.6.** *Soit  $H$  une fonction multiplicative positive vérifiant*

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq y} H(p) \log p &\leq \alpha y \quad \text{pour } y \geq 0 \\ \sum_p \sum_{\alpha \geq 2} H(p^\alpha) p^{-\alpha} \log(p^\alpha) &\leq \beta \end{aligned}$$

alors pour  $x > 1$  on a

$$\sum_{n \leq X} H(n) \leq (\alpha + \beta + 1) \frac{x}{\log x} \sum_{n \leq x} H(n)/n.$$

Voir le lemme 15 de RAMARÉ 2010.

Le lemme 16 s'énonce ainsi :

**Lemme 1.5.7.** *Pour  $r \geq 1$  et  $z \geq 300$  on a*

$$\sum'_{n \leq N} \frac{\tau_r(n)}{n} \leq \left(1.04 \frac{\log N}{\log z}\right)^r \quad \text{et} \quad \sum'_{n \leq N} \tau_r(n) \leq N 3^r \frac{(\log N)^{r-1}}{(\log z)^r}.$$

*Démonstration.*

$$\sum'_{n \leq N} \frac{\tau_r(n)}{n} \leq \left(\sum'_{n \leq N} \frac{1}{n}\right)^r \leq \left(\prod_{z \leq p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}\right)^r$$

puis on utilise le lemme 1.5.5. Pour la seconde inégalité, on applique le lemme 1.5.6 à la fonction  $\tau$ , en remarquant que  $r^2(2.08)^r \leq 3^r$ .  $\square$

Nous proposons ci-après des démonstrations plus détaillées de certains lemmes de RAMARÉ 2010.

## 1.5.2 Autres majorations

Dans ce qui suit sont établies un certain nombre de majorations utiles pour établir notre Théorème 1.6.1 obtenu avec un crible préliminaire. On rappelle que si  $g$  est une fonction  $C^1$  sur  $[1, X]$ ,  $\|g\|_\infty = \max_{1 \leq t \leq X} |g(t)|$ . Et on notera  $\|\cdot\|$  au lieu de  $\|\cdot\|_\infty$ . Et si  $w = w_1 \star \dots \star w_k$ , on pose  $\|w\| = \|w_1\| \dots \|w_k\|$ .

**Lemme 1.5.8.**  *$w$  étant une fonction  $C^1$  sur  $[1, X]$ ,*

$$R'_z(w, \bar{f}, D, r) \leq 3R'_z(1, \bar{f}, D, r) \|w\|.$$

C'est le lemme 19 de RAMARÉ 2010 dont la démonstration est claire (page 1168). Le lemme suivant (lemme 20 de RAMARÉ 2010) est repris avec une démonstration un peu plus détaillée.

**Lemme 1.5.9.** *Soient  $w_1, \dots, w_k$   $k$  fonctions  $C^1$  sur  $[1, X]$ , et  $w = w_1 \star \dots \star w_k$ . Alors, pour  $1 \leq D \leq X$ , on a*

$$R'_z(w, \bar{f}, X(D/X)^k, r) \leq 3(2^k - 1)R'_z(1, \bar{f}, D, r + k - 1) \|w\|.$$

*Démonstration.* On le montre par récurrence, le lemme précédent (lemme 1.5.8) nous donne le cas  $k = 1$ . Supposons que l'inégalité soit vraie au rang  $k - 1$ , c'est à dire

$$R'_z(w, \bar{f}, X(D/X)^{k-1}, r) \leq 3(2^{k-1} - 1)R'_z(1, \bar{f}, D, r + k - 2) \|w\|.$$

On note ici  $w = w_1 \star \dots \star w_{k-1}$  et  $D(k) = X(D/X)^k$  pour tout  $k$ .

On utilise la formule de l'hyperbole de Dirichlet avec  $MN = y/d$  pour calculer

$$\begin{aligned}
\sum'_{i \leq y/d} w \star w_k(i) \bar{f}(di) &= \sum'_{mn \leq y/d} w(n) w_k(m) \bar{f}(dmn) \\
&= \sum'_{n \leq N} w(n) \sum'_{m \leq y/dn} w_k(m) \bar{f}(dmn) \\
&+ \sum'_{m \leq M} w_k(m) \sum'_{N \leq n \leq y/dm} w(n) \bar{f}(dmn). \tag{1.21}
\end{aligned}$$

En supposant que  $dN \leq D$  et  $dM \leq X(D/X)^{k-1} = D(k-1)$  on a

$$\begin{aligned}
r_{d,z}(w \star w_k, y) &= \sum'_{n \leq N} w(n) r_{dn,z}(w_k, y) \\
&+ \sum'_{m \leq M} w_k(m) (r_{dm,z}(w, y) - r_{dm,z}(w, Ndm)).
\end{aligned}$$

En prenant  $M = D(k-1)/d$  et donc  $N = y/D(k-1) \leq X/D(k-1)$ , on a donc

$$\begin{aligned}
R'_z(w, \bar{f}, X(D/X)^k, r) &= \sum'_{d \leq D(k)} \tau_r(d) \max_{y \leq X} |r_{d,z}(w \star w_k, y)| \tag{1.22} \\
&\leq \sum'_{d \leq D(k)} \tau_r(d) \sum'_{n \leq X/D(k-1)} |w(n)| \max_{y \leq X} |r_{dn,z}(w_k, y)| \\
&+ 2 \sum'_{d \leq D(k)} \tau_r(d) \sum'_{m \leq D(k-1)/d} |w_k(m)| \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)|.
\end{aligned}$$

On remarque que  $dN \leq dX/D(k-1) \leq D$  d'où  $X/D(k-1) \leq D/d$  et  $D(k) \leq D$ , ainsi

$$\begin{aligned}
\sum'_{d \leq D(k)} \tau_r(d) \sum'_{n \leq D(k-1)} |w(n)| \max_{y \leq X} |r_{dn,z}(w_k, y)| &\leq \sum'_{d \leq D} \tau_r(d) \sum'_{n \leq D/d} |w(n)| \max_{y \leq X} |r_{dn,z}(w_k, y)| \\
&= \sum'_{\ell \leq D} \tau_r \star |w|(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dn,z}(w_k, y)|.
\end{aligned}$$

Et d'autre part, puisque  $D(k) \leq D(k-1)$  on a

$$\begin{aligned}
\sum'_{d \leq D(k)} \tau_r(d) \sum'_{m \leq D(k-1)/d} |w_k(m)| \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)| \\
\leq \sum'_{\ell \leq D(k-1)} \tau_r \star |w_k|(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)|. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Donc

$$R'_z(w, \bar{f}, X(D/X)^k, r) \leq \sum'_{\ell \leq D} \tau_r \star |w|(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dn,z}(w_k, y)| \\ + 2 \sum'_{\ell \leq D(k-1)} \tau_r \star |w_k|(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)|.$$

Remarquons que

$$\tau_r \star |w|(\ell) \leq \|w_1\|_\infty \dots \|w_{k-1}\|_\infty \tau_{r+k-1}(\ell). \quad (1.24)$$

En effet, on majore chaque  $w_j$  dans  $w$  par  $\|w_j\|_\infty \mathbb{1}$ . Et ainsi

$$\sum'_{\ell \leq D} \tau_r \star |w|(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dn,z}(w_k, y)| \leq \|w_1\| \dots \|w_{k-1}\| \sum'_{\ell \leq D} \tau_{r+k-1}(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dn,z}(w_k, y)| \\ \leq \|w_1\| \dots \|w_{k-1}\| R'_z(w_k, \bar{f}, D, r+k-1) \\ \leq \|w_1\| \dots \|w_{k-1}\| \times 3 \|w_k\| R'_z(1, \bar{f}, D, r+k-1)$$

d'après le lemme précédent (lemme 1.5.8).

Et d'autre part,

$$\sum'_{\ell \leq D(k-1)} \tau_r \star |w_k|(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)| \leq \|w_k\| \sum'_{\ell \leq D(k-1)} \tau_{r+1} \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)|.$$

Or  $\sum'_{\ell \leq D(k-1)} \tau_{r+1} \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)| = R'_z(w, \bar{f}, D(k-1), r+1)$  donc d'après notre hypothèse de récurrence,

$$\sum'_{\ell \leq D(k-1)} \tau_r \star |w_k|(\ell) \max_{y \leq X} |r_{dm,z}(w, y)| \\ \leq \|w_k\| \times 3(2^{k-1} - 1) R'_z(1, \bar{f}, D, r+1+k-2) \|w\|. \quad (1.25)$$

Avec bien sûr  $\|w\| = \|w_1\| \dots \|w_{k-1}\|$ . Et donc enfin

$$R'_z(w, \bar{f}, X(D/X)^k, r) \leq \\ 3 \times (1 + 2(2^{k-1} - 1)) \|w_1\| \dots \|w_{k-1}\| \times \|w_k\| R'_z(1, \bar{f}, D, r+k-1),$$

ce qui est bien le résultat attendu au rang  $k$ . □

## 1.6 Résultat avec un crible préliminaire

Pour tout ce qui suit, on notera  $MT = \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \hat{F}(X) \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}$ .

**Théorème 1.6.1.** *Sous les hypothèses précédentes, voir 1.2,*

$$\Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f, X) = \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f_0, X) + (\rho + \tilde{\rho}) \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \hat{F}(X) \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}$$

où

$$\Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f, X) = \sum'_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n) f(n) + \sum'_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n),$$

et où

$$\begin{aligned} |\rho| &\leq 2 \times (149 \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2} \\ &\times \left( Ac^2 + \left( C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e \max(\nu_1, \nu_2) \delta)^{\frac{1}{\delta}} \right) \left( \frac{c}{\delta} \right)^{2 \max(\nu_1, \nu_2)} \right) \\ \text{et } |\tilde{\rho}| &\leq 2(24 \max(\nu_1, \nu_2))^{\max(\nu_1, \nu_2)} B_0 \cdot \frac{1}{\delta^{2 \max(\nu_1, \nu_2)}} \left( \frac{\log \frac{X}{T}}{\log X} \right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)}. \end{aligned}$$

On verra après le choix du paramètre  $D$  et donc de  $T$ , et en prenant  $\nu_1 \leq \nu_2$  que

$$|\rho| \leq 2 \times (149 \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2} \times \left( Ac^2 + \left( C_0(c) e^{\delta^{3\nu_2}} + \Delta 4^{\frac{1}{\delta}} \right) \left( \frac{c}{\delta} \right)^{2\nu_2} \right)$$

et

$$|\tilde{\rho}| \leq 2(24 \nu_2)^{\nu_2} B_0 \left( 3\nu_2^2 \log \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_1 + 2\nu_2} \delta^{\nu_1}.$$

Le principe de la démonstration du théorème 1.6.1 est le suivant : avec les notations précédentes,

$$\Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f, X) = \sum'_{\ell} a(\ell) \left( S_1(f, T, \ell) + \mathcal{O}^*(S_2(f, T, \ell)) \right)$$

où on va approximer

$$S_1(f, T, \ell) = \sum'_{n \leq T} \mu_\ell(n) \sum'_{m \leq X/n} L(\ell)(m) f(mn) \quad (1.26)$$

par  $\frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_1(f_0, T, \ell)$  et

$$S_2(f, T, \ell) = \sum'_{m \leq X/T} L(\ell)(m) \sum'_{T \leq n \leq X/m} \tau_\ell(n) f(mn) \quad (1.27)$$

par  $\frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell)$ .

Car en effet,

$$\begin{aligned}
\sum'_{n \leq X} \left( \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)} \right) (n) f(n) &= \sum'_{n \leq X} \sum'_{\ell} a(\ell) \mu_{\ell} \star L(\ell)(n) f(n) \\
&= \sum'_{\ell} a(\ell) \sum'_{n \leq X} \sum'_{d|n} \mu_{\ell}(d) L(\ell) \left( \frac{n}{d} \right) f(n) \\
&= \sum'_{\ell} a(\ell) \sum'_{d \leq X} \mu_{\ell}(d) \sum'_{m \leq \frac{X}{d}} L(\ell)(m) f(dm).
\end{aligned}$$

On remplace  $d$  par  $n$  puis on divise cette somme en deux sommes, l'une jusqu'à  $T$  et l'autre entre  $T$  et  $X$  :

$$\begin{aligned}
\sum'_{n \leq X} \mu_{\ell}(n) \sum'_{m \leq \frac{X}{n}} L(\ell)(m) f(mn) &= \sum'_{n \leq T} \mu_{\ell}(n) \sum'_{m \leq \frac{X}{n}} L(\ell)(m) f(mn) \\
&\quad + \sum'_{T \leq n \leq X} \sum'_{m \leq \frac{X}{n}} \mu_{\ell}(n) L(\ell)(m) f(mn) \\
&= S_1(f, T, \ell) + \sum'_{T \leq n \leq X} \sum'_{m \leq \frac{X}{n}} \mu_{\ell}(n) L(\ell)(m) f(mn).
\end{aligned}$$

Or

$$\left| \sum'_{T \leq n \leq X} \sum'_{m \leq \frac{X}{n}} \mu_{\ell}(n) L(\ell)(m) f(mn) \right| \leq \sum'_{T \leq n \leq X} \sum'_{m \leq \frac{X}{n}} \tau_{\ell}(n) L(\ell)(m) f(mn) = S_2(f, T, \ell).$$

Et on cherchera une majoration de  $S_2(f_0, T, \ell)$ , ainsi notre estimation sera :

$$\begin{aligned}
\Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f, X) &= \sum'_{\ell} a(\ell) \left( S_1(f, T, \ell) + \mathcal{O}^*(S_2(f, T, \ell)) \right) \\
&= \sum'_{\ell} a(\ell) \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_1(f_0, T, \ell) \\
&\quad + R_1 + \sum'_{\ell} a(\ell) \mathcal{O}^* \left( \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell) \right) + R_2.
\end{aligned}$$

Car on approche  $S_1(f, T, \ell)$  par  $S_1(f_0, T, \ell)$ , le terme  $R_1$  est donc le reste résultant de cette approximation. Et on approche  $S_2(f, T, \ell)$  par  $S_2(f_0, T, \ell)$ , ainsi  $R_2$  est le terme reste résultant de cette seconde approximation.

Or

$$\Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f_0, X) = \sum'_{\ell} a(\ell) (S_1(f_0, T, \ell) + \mathcal{O}^*(S_2(f_0, T, \ell)))$$

donc

$$\sum_{\ell} a(\ell) \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_1(f_0, T, \ell) = \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f_0, X) + \sum_{\ell} a(\ell) \mathcal{O}^* \left( \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell) \right).$$

Or les  $\mathcal{O}^*$  sont des valeurs absolues, ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f, X) &= \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f_0, X) + 2 \sum_{\ell} a(\ell) \mathcal{O}^* \left( \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell) \right) \\ &\quad + R_1 + R_2 \\ &= \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \Sigma'_{\nu_1, \nu_2}(f_0, X) + (\rho + \tilde{\rho}) \text{MT} \end{aligned}$$

où  $\rho$  est tel que :

$$R_1 + R_2 = \rho \times \text{MT} \tag{1.28}$$

et

$$\tilde{\rho} = \mathcal{O} \left( \frac{2 \sum_{\ell} a(\ell) \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell)}{\text{MT}} \right), \tag{1.29}$$

et ce sont ces termes que nous allons évaluer.

## 1.6.1 Quelques lemmes

Pour les démonstrations de ces lemmes, nous renvoyons le lecteur à RAMARÉ 2010 ou G.DIAMOND et STEINIG 1970.

**Lemme 1.6.2.**

$$2\nu \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{K}} |c(\mathbf{k})w(\mathbf{k})| + \nu^2 \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} |\bar{c}(\mathbf{h})\bar{w}(\mathbf{h})| \leq (\nu + 2)2^{\nu-1}.$$

Voir RAMARÉ 2010, lemme 7.

**Lemme 1.6.3.**

$$\frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \geq \frac{1}{2c^2}.$$

où on rappelle que  $c$  est une constante telle que  $\prod_{v \leq p \leq u}^* (1 - \sigma(p))^{-1} + \prod_{v \leq p \leq u}^* (1 - \sigma_0(p))^{-1} \leq c \log u / \log v$  où  $2 \leq v \leq u$ .

Voir RAMARÉ 2010, lemme 8.

**Lemme 1.6.4.** Pour tout  $n \geq 1$  il existe un  $\theta_+ \in ]0, 1[$  tel que

$$n! = (2\pi n)^{1/2} (n/e)^n e^{\theta_+/(12n)}.$$

Voir G.DIAMOND et STEINIG 1970 p203 (2.3 Estimates), c'est également le lemme 9 de RAMARÉ 2010.

**Lemme 1.6.5.** *Soit  $m \leq M$  un entier n'ayant aucun facteur premier  $\leq z$ . Alors pour tout  $\ell$  appartenant à  $\mathbb{K}$  ou  $\mathbb{H}$ ,*

$$L(\ell)(m) \leq \tau_\ell(m) \left( \frac{e \log m}{\nu_1 + \nu_2} \right)^{\nu_1 + \nu_2} \times \frac{1}{w(\ell)}.$$

Voir RAMARÉ 2010, lemme 17.

Un lemme qui servira plusieurs fois par la suite :

**Lemme 1.6.6.** *Si  $D_0/D \geq z$  et  $\Delta(e + er\delta)^{1/\delta} \leq 1/2$ , le reste  $R'(w, \bar{f}, X(D/X)^k, r)$  est majoré par*

$$3.2^k \|w\| \left[ R(f, D_0, r+k) + \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} R(f_0, D_0, r+k) \right. \\ \left. + \left( 2C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + 2\Delta(e + er\delta)^{1/\delta} \right) V_\sigma(z) (c/\delta)^{r+k-1} \hat{F}(X) \right].$$

Voir RAMARÉ 2010, lemme 24.

**Lemme 1.6.7.**

$$\sum_{h \geq 1} \frac{h^{\nu-1}}{p^{h-1}} \leq \frac{(\nu-1)!}{(1-1/p)^\nu} \leq 2^\nu (\nu-1)!$$

Voir RAMARÉ 2010, lemme 25.

Et enfin :

**Lemme 1.6.8.** *(Lemme Fondamental du crible linéaire) Soient deux paramètres  $M \geq 2$  et  $\tilde{z} \geq 1$ .*

*Il existe deux suites  $(\lambda_m^+)$  et  $(\lambda_m^-)$  ayant les propriétés suivantes :*

$$\lambda_1^+ = \lambda_1^- = 1, \quad |\lambda_m^+|, |\lambda_m^-| \leq 1, \quad \lambda_m^+ = \lambda_m^- = 0 \quad \text{pour } m > M.$$

*Pour tout  $n$ , si  $(n, P(\tilde{z})) \neq 1$  on a*

$$\sum_{m|n} \lambda_m^- \leq 0 \leq \sum_{m|n} \lambda_m^+$$

*et si  $(n, P(\tilde{z})) = 1$  on a*

$$\sum_{m|n} \lambda_m^- = \sum_{m|n} \lambda_m^+ = 1.$$

*Pour toute fonction multiplicative  $\tilde{\sigma}$  telle que*

$$0 \leq \tilde{\sigma} < 1 \quad \text{et} \quad \prod_{v \leq p \leq u}^* (1 - \tilde{\sigma}(p))^{-1} \leq \tilde{c} \frac{\log u}{\log v} \quad (2 \leq u \leq v), \quad (1.30)$$

on a

$$\sum_{m|P(\tilde{z})} \lambda_m^+ \tilde{\sigma}(m) \leq \left(1 + C_0(\tilde{c}) e^{-\frac{\log M}{\log \tilde{z}}}\right) \prod_{p \leq \tilde{z}}^* (1 - \tilde{\sigma}(p))$$

et

$$\sum_{m|P(\tilde{z})} \lambda_m^- \tilde{\sigma}(m) \geq \left(1 - C_0(\tilde{c}) e^{-\frac{\log M}{\log \tilde{z}}}\right) \prod_{p \leq \tilde{z}}^* (1 - \tilde{\sigma}(p))$$

où  $C_0(\tilde{c})$  est un nombre qui ne dépend que de la constante  $\tilde{c}$ .

Voir FRIEDLANDER et IWANIEC 1978 p. 732, Lemme 5.

## 1.6.2 Évaluation du premier terme reste $R_1$

On majore la valeur absolue de  $S_1(f, T, \ell) - \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_1(f_0, T, \ell)$  où

$$S_1(f, T, \ell) = \sum'_{n \leq T} \mu_\ell(n) \sum'_{m \leq X/n} L(\ell)(m) f(mn). \quad (1.31)$$

En utilisant le lemme 1.6.6 avec  $\ell \leq \max(\nu_1, \nu_2)$ , les hypothèses  $(H_2)$   $(H_4)$ . Avec  $T = X(D/X)^{\max(\nu_1, \nu_2)}$  donc  $k = \max(\nu_1, \nu_2)$  et en remarquant que  $\|L(\ell)\| \leq (\log X)^{\nu_1 + \nu_2}$ , on trouve comme majorant :

$$3.2^{\max(\nu_1, \nu_2) + 1} \hat{F}(X) (\log X)^{\nu_1 + \nu_2} \times \left( \frac{A}{2 \log X} + \left( C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e\ell\delta)^{\frac{1}{\delta}} \right) V_\sigma(z) \left( \frac{c}{\delta} \right)^{\ell + \max(\nu_1, \nu_2) - 1} \right).$$

En effet, en utilisant toujours les notations de RAMARÉ 2010, le lemme 1.6.6 a permis ici de majorer  $R'_z(L(\ell), \bar{f}, T, \ell)$ , où  $r'_{n,z}(L(\ell), y) = \sum_{m \leq X/n} L(\ell) \bar{f}(mn)$ .

Ensuite on somme sur  $\ell$  en multipliant par  $a(\ell)$  sachant que  $\ell \leq \max(\nu_1, \nu_2)$  et on utilise le lemme 1.5.4. On trouve que  $R_1$  est inférieur à

$$\begin{aligned} & 3 \times 2^{\max(\nu_1, \nu_2)} \times 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{\max(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) + 1}}{\min(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) - 1}} (\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \hat{F}(X) \\ & \times \left( \frac{A}{2 \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)}} + \left( C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e \max(\nu_1 + \nu_2) \delta)^{\frac{1}{\delta}} \right) V_{\sigma_0}(z) \log X \left( \frac{c}{\delta} \right)^{2 \max(\nu_1, \nu_2) - 1} \right) \\ & = \text{MT}(\nu_1 + \nu_2 - 1)! \times 3 \times 2^{\max(\nu_1, \nu_2)} \times 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{\max(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) + 1}}{\min(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) - 1}} \times \left( \dots \right) \end{aligned}$$

(le facteur entre parenthèse reste identique). Or d'après le lemme 1.6.3,

$$\frac{A}{2 \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)}} \leq Ac^2.$$

D'après  $(H_2)$ , on a  $V_{\sigma_0}(z) < \frac{c}{\delta/\log X}$ , donc

$$V_{\sigma_0}(z) \log X \left(\frac{c}{\delta}\right)^{2\max(\nu_1, \nu_2)-1} \leq \frac{c^{2\max(\nu_1, \nu_2)}}{\delta^{2\max(\nu_1, \nu_2)}}.$$

On majore ensuite

$$(\nu_1 + \nu_2 - 1)! \times 3 \times 2^{\max(\nu_1, \nu_2)} \times 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{\max(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2)+1}}{\min(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2)-1}} \quad (1.32)$$

par  $(149 \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2}$ .

*Démonstration.* En effet, on utilise le lemme 1.6.4 qui permet de majorer  $(\nu_1 + \nu_2)!$  par

$$\sqrt{2\pi(\nu_1 + \nu_2)} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{e}\right)^{\nu_1 + \nu_2} e^{\frac{1}{12(\nu_1 + \nu_2)}},$$

et on passe au logarithme.

On minore  $\min(\nu_1, \nu_2)$  par 1,  $\nu_1 + \nu_2$  par 2 et on majore le  $\max(\nu_1, \nu_2)$  en facteur par  $\nu_1 + \nu_2$ , on majore  $\log(\nu_1 + \nu_2)$  par  $\log 2 + \log(\max(\nu_1, \nu_2))$  et on trouve que le logarithme de tout ça est inférieur à :

$$\begin{aligned} (\nu_1 + \nu_2) \left( \log\left(\frac{8}{e}\right) + 2 \log(2) + \frac{\log \pi + \frac{1}{24}}{2} \right) + (\nu_1 + \nu_2) \log(\max(\nu_1, \nu_2)) \\ \leq (\nu_1 + \nu_2)(5 + \log(\max(\nu_1, \nu_2))). \end{aligned}$$

□

Ainsi :

$$\begin{aligned} R_1 \leq MT \times (149 \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2} \\ \times \left( Ac^2 + \left( C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e \max(\nu_1, \nu_2) \delta)^{\frac{1}{\delta}} \right) (c/\delta)^{2\max(\nu_1, \nu_2)} \right). \end{aligned}$$

### 1.6.3 Évaluation du second terme reste $R_2$

On veut majorer la valeur absolue de  $S_2(f, T, \ell) - \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell)$  c'est à dire  $S_2(\bar{f}, T, \ell)$  où

$$S_2(\bar{f}, T, \ell) = \sum'_{m \leq \frac{X}{T}} L(\ell)(m) \sum'_{T \leq n \leq X/m} \tau_\ell(n) \bar{f}(mn). \quad (1.33)$$

Pour cela, on va majorer  $L(\ell)(m)$  par  $\|L(\ell)\| \leq (\log \frac{X}{T})^{\nu_1 + \nu_2}$  et utiliser encore le lemme 1.6.6 avec cette fois-ci  $r = 1$ ,  $w = \tau_\ell$  et  $k = \max(\nu_1, \nu_2)$ .

Le lemme 1.6.6 permet donc de majorer  $R'_z(\tau_\ell, \bar{f}, T, 1)$  en supposant  $T \leq X \left(\frac{D}{X}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)}$ . On trouve :

$$\begin{aligned} & \sum'_{m \leq \frac{X}{T}} \left| \sum'_{T \leq n \leq X/m} \tau_\ell(n) \bar{f}(mn) \right| \\ & \leq 3 \times 2^{\max(\nu_1, \nu_2)} \left( R(f, D_0, \max(\nu_1, \nu_2) + 1) + \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} R(f_0, D_0, \max(\nu_1, \nu_2) + 1) \right. \\ & \quad \left. + \left( 2C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + 2\Delta(e + e\delta)^{\frac{1}{\delta}} \right) V_\sigma(z) \left(\frac{C}{\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \hat{F}(X) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (H<sub>4</sub>) et la majoration de  $\|L(\ell)\|$  on trouve :

$$\begin{aligned} |S_2(\bar{f}, T, \ell)| & \leq 3 \times 2^{\max(\nu_1, \nu_2)+1} \left( \log \frac{X}{T} \right)^{\nu_1 + \nu_2} \\ & \quad \left( \frac{A \hat{F}(X)}{2 \log X} + (C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e\delta)^{\frac{1}{\delta}}) V_\sigma(z) \left(\frac{C}{\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \hat{F}(X) \right) \\ & \leq 3 \times 2^{\max(\nu_1, \nu_2)+1} \hat{F}(X) \left( \log \frac{X}{T} \right)^{\nu_1 + \nu_2} \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \\ & \quad \left( \frac{A}{2 \log X} \times \frac{V_{\sigma_0}(z)}{V_\sigma(z)} + (C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e\delta)^{\frac{1}{\delta}}) V_{\sigma_0}(z) \left(\frac{C}{\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \right). \end{aligned}$$

On majore  $\frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)}$  par  $2c^2$  d'après le lemme 1.6.3 et  $V_{\sigma_0}(z)$  par  $\frac{c}{\log z}$  selon (H<sub>2</sub>). On multiplie par  $a(\ell)$  et on somme sur  $\ell$  en utilisant le lemme 1.6.2 pour majorer. On trouve un reste qui est donc inférieur à

$$\begin{aligned} & 3 \times 2^{\max(\nu_1, \nu_2)+1} \times 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{\max(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2)+1}}{\min(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2)-1}} \hat{F}(X) \left( \log \frac{X}{T} \right)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \\ & \quad \left( \frac{Ac^2 \log \frac{X}{T}}{\log X} + (C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e\delta)^{\frac{1}{\delta}}) V_{\sigma_0}(z) \left(\frac{C}{\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} c \frac{\log \frac{X}{T}}{\log z} \right). \end{aligned}$$

On cherche à rapprocher cette expression du majorant de  $R_1$ . On note que c'est  $\left(\log \frac{X}{T}\right)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}$  à la place de  $(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}$ , et qu'à l'intérieur de la parenthèse plusieurs majorations peuvent être faites :

$$\frac{Ac^2 \log \frac{X}{T}}{\log X} \leq Ac^2$$

$$(e + e\delta)^{\frac{1}{\delta}} \leq (e + e \max(\nu_1, \nu_2) \delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

car  $1/\delta > 1$ .

$$\left(\frac{c}{\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} c \frac{\log \frac{X}{T}}{\log z} \leq \left(\frac{c}{\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} c \frac{\log X}{2 \log z} \leq \left(\frac{c}{\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)+1} \leq \left(\frac{c}{\delta}\right)^{2 \max(\nu_1, \nu_2)+1}$$

car  $T^2 \geq X$ .

Ainsi on trouve que  $R_2$  est inférieur au majorant de  $R_1$  multiplié par

$$2 \left(\frac{\log \frac{X}{T}}{\log X}\right)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \leq 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \leq 1. \quad (1.34)$$

#### 1.6.4 Majoration de $\sum_{\ell} a(\ell) \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell)$

D'après  $(H_1)$ ,  $f_0$  est majorée par  $B_0 \frac{\hat{F}(X)}{X}$  donc il suffit ici de majorer  $S_2(\mathbb{1}, T, \ell)$ . On utilise pour cela le lemme 1.5.7 et le fait que  $X/m \geq T \geq \sqrt{X}$ .

$$\begin{aligned} S_2(\mathbb{1}, T, \ell) &= \sum'_{m \leq X/T} L(\ell)(m) \sum'_{T < n \leq X/m} \tau_{\ell}(n) \\ &\leq X \frac{3^{\ell} (\log \frac{X}{T})^{\ell-1}}{(\log z)^{\ell}} \sum'_{m \leq X/T} \frac{L(\ell)(m)}{m} \\ &\leq X \frac{3^{\ell} (\log \sqrt{X})^{\ell-1}}{(\log z)^{\ell}} \sum'_{m \leq X/T} \frac{L(\ell)(m)}{m}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

En utilisant le lemme 1.6.5 et en rappelant que  $\delta = \frac{\log z}{\log X}$  on obtient :

$$\begin{aligned} S_2(\mathbb{1}, T, \ell) &\leq \frac{2X}{\log X} \left(\frac{3}{2\delta}\right)^{\ell} \sum'_{m \leq \frac{X}{T}} \frac{\tau_{\ell}(m)}{m} \left(\frac{e \log \frac{X}{T}}{\nu_1 + \nu_2}\right)^{\nu_1 + \nu_2} \times \frac{1}{w(\ell)} \\ &\leq \frac{2X}{\log X} \left(\frac{3}{2\delta}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \left(\frac{e \log \frac{X}{T}}{\nu_1 + \nu_2}\right)^{\nu_1 + \nu_2} \times \frac{1}{w(\ell)} \left(1.04 \frac{\log \frac{X}{T}}{\log z}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

En ayant utilisé pour la dernière ligne le lemme 1.5.7 et le fait que  $\ell \leq \max(\nu_1, \nu_2)$ . On remplace  $\log z$  par  $\delta \log X$  dans le dernier facteur et on majore  $\nu_1 + \nu_2$  par

$2 \max(\nu_1, \nu_2)$  pour trouver :

$$S_2(\mathbb{1}, T, \ell) \leq \frac{2X}{\log X} \left(\frac{12}{\delta^2}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \cdot \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}} \cdot \frac{1}{w(\ell)} \cdot \left(\log \frac{X}{T}\right)^{\nu_1 + \nu_2} \cdot \left(\frac{\log \frac{X}{T}}{\log X}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)}$$

ainsi, on trouve que :

$$w(\ell) S_2(f_0, T, \ell) \leq \frac{2X}{\log X} \left(\frac{12}{\delta^2}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}} \left(\log \frac{X}{T}\right)^{\nu_1 + \nu_2} \left(\frac{\log \frac{X}{T}}{\log X}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} B_0 \frac{\hat{F}(X)}{X}.$$

On somme enfin sur  $\ell$  en multipliant par  $c(\ell) \times \frac{V_{\sigma_0}(z)}{V_{\sigma}(z)}$  et on utilise la majoration du lemme 1.5.3. Ainsi :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell} a(\ell) \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell) \\ & \leq \frac{2X}{\log X} \left(\frac{12}{\delta^2}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}} \left(\log \frac{X}{T}\right)^{\nu_1 + \nu_2} \left(\frac{\log \frac{X}{T}}{\log X}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \\ & \quad \times B_0 \frac{\hat{F}(X)}{X} 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{\max(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) + 1}}{\min(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) - 1}} \frac{V_{\sigma_0}(z)}{V_{\sigma}(z)} \\ & \leq 2 \left(\frac{12}{\delta^2}\right)^{\max(\nu_1, \nu_2)} \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}} \left(\frac{\log \frac{X}{T}}{\log X}\right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \\ & \quad \times 8^{\nu_1 + \nu_2} \frac{\max(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) + 1}}{\min(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) - 1}} B_0 \cdot \text{MT} \cdot (\nu_1 + \nu_2 - 1)! \end{aligned}$$

Ici on a simplifié les  $X$ , et en réintroduisant  $\text{MT}$  on a divisé par  $(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}$  donc un  $\log X$  s'est simplifié et les autres sont regroupés.

On obtient finalement :

$$\sum_{\ell} a(\ell) \frac{V_{\sigma}(z)}{V_{\sigma_0}(z)} S_2(f_0, T, \ell) \leq \text{Cste} \cdot B_0 \cdot \text{MT} \frac{1}{\delta^{2 \max(\nu_1, \nu_2)}} \left(\frac{\log \frac{X}{T}}{\log X}\right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \quad (1.37)$$

où la constante est inférieure ou égale à  $(24 \max(\nu_1, \nu_2))^{\max(\nu_1, \nu_2)}$ . En effet, en utilisant le lemme 1.6.4 pour majorer  $(\nu_1 + \nu_2)!$ , on trouve que

$$\text{Cste} \leq 2 \times 12^{\max(\nu_1, \nu_2)} \times \left(\frac{8}{e}\right)^{\nu_1 + \nu_2} \frac{\max(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) + 1}}{\min(\nu_1, \nu_2)^{\min(\nu_1, \nu_2) - 1}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{(\nu_1 + \nu_2)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{12(\nu_1 + \nu_2)}}.$$

On passe au logarithme, on majore  $\log(\text{Cste})$  par

$$\begin{aligned} & \log 2 + \max(\nu_1, \nu_2) \log 12 + (\nu_1 + \nu_2) \log \frac{8}{e} + (\min(\nu_1, \nu_2) + 1) \log(\max(\nu_1, \nu_2)) \\ & - (\min(\nu_1, \nu_2) - 1) \log(\min(\nu_1, \nu_2)) + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\nu_1 + \nu_2) + \frac{1}{12(\nu_1 + \nu_2)} \\ & \leq \log 2 + \frac{1}{2} \log(\pi) + \frac{1}{24} + \max(\nu_1, \nu_2) \log \left( \left( \frac{8}{e} \right)^2 \max(\nu_1, \nu_2) \right) \\ & \leq \max(\nu_1, \nu_2) \left( 1 + \log \left( \left( \frac{8}{e} \right)^2 \max(\nu_1, \nu_2) \right) \right), \end{aligned}$$

on a minoré  $\nu_1 + \nu_2$  par 2,  $\min(\nu_1, \nu_2)$  par 1, et on majore  $\nu_1 + \nu_2$  par  $2 \max(\nu_1, \nu_2)$  et  $\frac{\log 2 + \frac{1}{2} \log(\pi) + \frac{1}{24}}{\max(\nu_1, \nu_2)}$  par 1.

On trouve donc :

$$\log(\text{Cste}) \leq \max(\nu_1, \nu_2) (\log(24 \max(\nu_1, \nu_2))).$$

## 1.6.5 Choix du paramètre D (et donc de T)

On cherche ici à minimiser simultanément les majorations  $|\rho|$  et  $|\tilde{\rho}|$ . Tout d'abord, rappelons que

$$\begin{cases} \log z = \delta \log X \\ \log D_0 = (1 - \delta) \log X \end{cases} \quad (1.38)$$

Aussi, on a supposé

$$X \geq T \geq \sqrt{X} \geq z \text{ et } T = X \left( \frac{D}{X} \right)^{\max(\nu_1, \nu_2)}.$$

Posons  $\eta$  telle que

$$\log T = (1 - \eta \max(\nu_1, \nu_2)) \log X$$

ainsi on a  $\log D = (1 - \eta) \log X$ . Lorsqu'on cherche à minimiser  $|\rho|$  avec

$$\begin{aligned} |\rho| & \leq 2 \times (149 \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2} \\ & \times \left( Ac^2 + \left( C_0(c) e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} + \Delta(e + e \max(\nu_1, \nu_2) \delta)^{\frac{1}{\delta}} \right) \left( \frac{c}{\delta} \right)^{2 \max(\nu_1, \nu_2)} \right), \end{aligned}$$

$\Delta$  étant typiquement très petit (voire nul) (ainsi que  $A$ ) on cherche à minimiser

$$e^{-\frac{\log \frac{D_0}{D}}{\log z}} \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)} = e^{-\frac{\eta - \delta}{\delta}} \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)}. \quad (1.39)$$

Et en même temps, on cherche à minimiser  $|\tilde{\rho}|$  avec

$$|\tilde{\rho}| \leq (24 \max(\nu_1, \nu_2))^{\max(\nu_1, \nu_2)} B_0 \cdot \frac{1}{\delta^{2 \max(\nu_1, \nu_2)}} \left( \frac{\log \frac{X}{T}}{\log X} \right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)}.$$

Donc ici on cherche à minimiser

$$\left( \frac{\log \frac{X}{T}}{\log X} \right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)} = (\eta \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)}.$$

On choisit

$$\eta = 3 \max(\nu_1, \nu_2) \delta \log \frac{1}{\delta}. \quad (1.40)$$

Alors

$$e^{-\frac{\eta-\delta}{\delta}} \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)} = \exp(-3 \max(\nu_1, \nu_2) \log \frac{1}{\delta} + 1) \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)} = e \delta^{\max(\nu_1, \nu_2)}$$

tandis que

$$\begin{aligned} & (\eta \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)} \\ &= \left( 3 \max(\nu_1, \nu_2)^2 \delta \log \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \delta^{-2 \max(\nu_1, \nu_2)} \\ &= \left( 3 \max(\nu_1, \nu_2)^2 \log \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \delta^{\min(\nu_1, \nu_2)}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$|\rho| \leq 2 \times (149 \max(\nu_1, \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2} \times \left( A c^2 + (C_0(c) e \delta^{3 \max(\nu_1, \nu_2)} + \Delta(e + e \max(\nu_1, \nu_2) \delta)^{\frac{1}{\delta}}) \left( \frac{c}{\delta} \right)^{2 \max(\nu_1, \nu_2)} \right)$$

et

$$|\tilde{\rho}| \leq 2 \times (24 \max(\nu_1, \nu_2))^{\max(\nu_1, \nu_2)} B_0 \left( 3 \max(\nu_1, \nu_2)^2 \log \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_1 + \nu_2 + \max(\nu_1, \nu_2)} \delta^{\min(\nu_1, \nu_2)}.$$

Ceci conclut la démonstration.

## 1.7 Retrait du crible préliminaire

Dans cette partie, nous retirons le crible préliminaire en majorant tout ce qui n'a pas été majoré précédemment, c'est à dire la somme sur les entiers ayant un facteur premier inférieur à  $z$ , mais en utilisant ici notre expression initiale, à

savoir

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n)g(n) + \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n)g(n)$$

où, on le rappelle,  $\Lambda^{(\nu)}(n) = \frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$ , et où  $g$  peut être  $f$  ou  $f_0$ .

On est dans le cas où  $\delta \log X \geq \nu_1 + \nu_2 + 1$  et  $z \geq e^{\nu_1 + \nu_2 + 1}$ .

La première somme contient peu de termes et on majorera  $f$  ou  $f_0$  en utilisant ( $H_8$ ). La seconde somme sera calculée en trois parties : on sait que  $n$  possède au plus deux facteurs premiers. On écrit  $n = p^h m$  avec  $p \leq z$  et on considère le cas  $n \leq X^{1/2}$ , puis le cas où  $m$  est une puissance d'un facteur premier  $\leq X^{1/2}$  et enfin le cas où  $n = p^h m > X^{1/2}$  avec  $m$  premier  $> X^{1/2}$  (et donc  $p^h \leq X^{1/2}$ ). Dans les deux premiers cas on majorera encore  $f$  ou  $f_0$  en utilisant ( $H_8$ ). Le troisième cas est plus délicat.

Deux majorations nous seront utiles, voir ROSSER et SCHOENFELD 1962 (p. 1175) (pour  $X > 1$ ) :

$$\sum_{p \leq X} \frac{\log p}{p} < \log X \quad \text{et} \quad \pi(X) \leq 1.26 \frac{X}{\log X}. \quad (1.41)$$

Enfin, on rappelle que  $MT = \hat{F}(X) \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} V_\sigma(z)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)! V_{\sigma_0}(z)}$ .

Remarque : dans toute la suite, on va considérer que  $\nu_1 \leq \nu_2$  et donc  $\nu_1 = \min(\nu_1, \nu_2)$  et  $\nu_2 = \max(\nu_1, \nu_2)$  afin de ne pas alourdir les notations. Le lecteur pourra vérifier que les calculs restent corrects quels que soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  mais ainsi la majoration finale est plus évidente.

### 1.7.1 Premier terme : majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n) f(n)$

Les seuls termes non nuls de cette somme sont les puissances d'un facteur premier  $n = p^h \leq X$  et auquel cas  $\Lambda(n) = \log p$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda(n)(\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} &= \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{\log p}} (\log p)^{\nu_1 + \nu_2} h^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \\ &\leq \sum_{p \leq z} (\log p)^{\nu_1 + \nu_2} \left( \frac{\log X}{\log p} \right)^{\nu_1 + \nu_2} \leq 1.26 (\log X)^{\nu_1 + \nu_2} \frac{z}{\log z}. \end{aligned}$$

On divise par  $(\nu_1 + \nu_2 - 1)!$  et on utilise le lemme 1.6.3  $\frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \geq \frac{1}{2c^2}$ , on majore  $f$  par B d'après ( $H_8$ ) et ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n) f(n) &\leq \text{MT} \cdot B \cdot c^2 \times 2.52 \frac{z}{\hat{F}(X)} \frac{\log X}{\log z} \\ &\leq 2.52 B c^2 \text{MT} \frac{\delta^{\nu_2}}{\sqrt{X}}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

On a utilisé ( $H_8$ ) pour minorer  $\hat{F}(X)$ .

Notons qu'on peut en déduire la majoration :

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n) f(n) \leq \frac{B}{\log X} c^2 \text{MT} \delta^{\nu_2}. \quad (1.43)$$

### 1.7.2 Majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n)$ pour $n \leq X^{1/2}$

Dans ce cas  $n$  s'écrit comme le produit  $p^h m$  tels que  $p^h$  et  $m$  sont  $\leq X^{1/2}$ . Le calcul du produit de convolution ne se fait que pour les  $p \leq z$ . Il sera égal à

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X^{1/2} \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda(\log)^{\nu_1 - 1} \star \Lambda(\log)^{\nu_2 - 1}(n) &= \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{2 \log p}} (\log p)^{\nu_1} h^{\nu_1 - 1} \sum_{m \leq \frac{\sqrt{X}}{p^h}} \Lambda(m) (\log m)^{\nu_2 - 1} \\ &+ \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{2 \log p}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2 - 1} \sum_{m \leq \frac{\sqrt{X}}{p^h}} \Lambda(m) (\log m)^{\nu_1 - 1}. \end{aligned}$$

On va donc majorer le premier terme de cette somme qu'on appelle  $\Sigma^1$ , puis on gardera la même majoration en échangeant  $\nu_1$  et  $\nu_2$  pour le deuxième terme.

$$\begin{aligned} \Sigma^1 &= \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{2 \log p}} (\log p)^{\nu_1} h^{\nu_1 - 1} \sum_{m \leq \frac{\sqrt{X}}{p^h}} \Lambda(m) (\log m)^{\nu_2 - 1} \\ &\leq \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{2 \log p}} (\log p)^{\nu_1} h^{\nu_1 - 1} \pi \left( \frac{\sqrt{X}}{p^h} \right) \left( \log \frac{\sqrt{X}}{p^h} \right)^{\nu_2}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

En utilisant la majoration de  $\pi \left( \frac{\sqrt{X}}{p^h} \right)$  comme précédemment, on aura

$$\Sigma^1 \leq 1.26 \left( \frac{1}{2} \log X \right)^{\nu_2 - 1} \sqrt{X} \sum_{p \leq z} \frac{(\log p)^{\nu_1}}{p} \sum_{h \leq \frac{\log X}{2 \log p}} \frac{h^{\nu_1 - 1}}{p^{h-1}}.$$

Or d'après le lemme 1.6.7,  $\sum_{h \geq 1} \frac{h^{\nu_1-1}}{p^{h-1}} \leq 2^{\nu_1}(\nu_1 - 1)!$  (on utilise cette majoration dans le facteur tout à droite) et de plus  $\sum_{p \leq z} \frac{(\log p)^{\nu_1}}{p} \leq (\log z)^{\nu_1-1} \sum_{p \leq z} \frac{\log p}{p} \leq (\log z)^{\nu_1}$  ainsi :

$$\begin{aligned} \sum^1 &\leq 1.26 \times 2^{\nu_1-\nu_2+1}(\nu_1 - 1)!\sqrt{X}(\log X)^{\nu_2-1}(\log z)^{\nu_1} \\ &\leq 2.52 \times 2^{\nu_1-\nu_2}(\nu_1 - 1)!\sqrt{X}(\log X)^{\nu_1+\nu_2-1}\delta^{\nu_1}. \end{aligned}$$

On divise cette somme par  $(\nu_1 - 1)!(\nu_2 - 1)!$ ,

$$\sum^1 \leq 2.52\text{MT}.2c^2 \times 2^{\nu_1-\nu_2} \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}{(\nu_2 - 1)!} \frac{\sqrt{X}}{\hat{F}(X)} \delta^{\nu_1}. \quad (1.45)$$

Ici encore on utilise la majoration ( $H_8$ ) et le lemme 1.6.4 qui permet de majorer  $(\nu_1 + \nu_2)!$  par  $\sqrt{2\pi(\nu_1 + \nu_2)} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{e}\right)^{\nu_1 + \nu_2} e^{\frac{1}{12(\nu_1 + \nu_2)}}$  et de minorer  $\nu_2!$  par  $\sqrt{2\pi\nu_2} \left(\frac{\nu_2}{e}\right)^{\nu_2}$  ainsi notre majorant devient :

$$\begin{aligned} &5.04\text{MT}.c^2 \times 2^{\nu_1-\nu_2} \delta^{\nu_1} \frac{\sqrt{\nu_2}}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{e}\right)^{\nu_1 + \nu_2} \times \left(\frac{e}{\nu_2}\right)^{\nu_2} \frac{\delta^{\max(\nu_1, \nu_2)}}{z} \\ &\leq 5.04\text{MT}.c^2 \times 2^{\nu_1-\nu_2} \frac{((\nu_1 + \nu_2)\delta)^{\nu_1 + \nu_2}}{ze^{\nu_1}\nu_2^{\nu_2}} \frac{\sqrt{\nu_2}}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}}. \end{aligned}$$

En effet, on a majoré  $\delta^{\nu_1 + \max(\nu_1, \nu_2)}$  par  $\delta^{\nu_1 + \nu_2}$  (en fait ils sont égaux puisqu'on a considéré que  $\nu_2 = \max(\nu_1, \nu_2)$ ).

Le deuxième terme

$$\sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{2 \log p}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2-1} \sum_{m \leq \frac{\sqrt{X}}{ph}} \Lambda(m) (\log m)^{\nu_1-1}$$

sera quant à lui majoré par

$$5.04\text{MT}.c^2 \times 2^{\nu_2-\nu_1} \frac{((\nu_1 + \nu_2))^{\nu_1 + \nu_2} \delta^{2\nu_2}}{ze^{\nu_2}\nu_1^{\nu_1}} \frac{\sqrt{\nu_1}}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}}.$$

Et comme  $\delta^{2\nu_2} \leq \delta^{\nu_1 + \nu_2}$  et en majorant  $f(n)$  par  $B$  dans les deux expressions précédentes, on a aisément :

$$\sum_{\substack{n \leq X^{1/2} \\ (n, \bar{P}(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n) \leq 0.01\text{MT}.B.c^2((\nu_1 + \nu_2)\delta)^{\nu_1 + \nu_2}.$$

Mais la majoration suivante sera plus utile (dans notre application au cas

$f(n) = \Lambda(n+2)$  :

$$\sum_{\substack{n \leq X^{1/2} \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n) \leq 11MT \frac{B}{X^\delta} c^2 \left(\frac{2}{e}\right)^{\nu_2} ((\nu_1 + \nu_2)\delta)^{\nu_1 + \nu_2}. \quad (1.46)$$

En supposant  $X$  suffisamment grand pour avoir  $11/X^\delta \leq 1/\log X$ , on en déduit :

$$\sum_{\substack{n \leq X^{1/2} \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n) \leq MT \frac{B}{\log X} c^2 \left(\frac{2}{e}\right)^{\nu_2} ((\nu_1 + \nu_2)\delta)^{\nu_1 + \nu_2}. \quad (1.47)$$

### 1.7.3 Majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n)$ pour $m \leq X^{1/2}$

Dans cette partie on majore  $\sum_{\substack{n \leq X \\ (n, P(z)) \neq 1}} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n)$  dans le cas où  $n = p^h m$  où  $m = p^k \leq X^{1/2}$ .

On notera  $\Sigma_m$  cette somme.

On majore le produit de convolution de façon similaire à la partie 1.7.1 et en utilisant la majoration de  $\pi(n)$  énoncée plus haut. Toujours en raison des facteurs n'annulant pas la fonction  $\Lambda$  et en notant que  $m = p^k \leq X^{1/2}$  équivaut à  $k \leq \frac{\log X}{\log p'}$ , la somme (sans les factorielles) sera égale à

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{\log p}} (\log p)^{\nu_1} h^{\nu_1 - 1} \sum_{p' \leq \sqrt{X}} \sum_{k \leq \frac{\log X}{2 \log p'}} (\log p')^{\nu_2} k^{\nu_2 - 1} \\ + \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{\log p}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2 - 1} \sum_{p' \leq \sqrt{X}} \sum_{k \leq \frac{\log X}{\log p'}} (2 \log p')^{\nu_1} k^{\nu_1 - 1} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq z} \sum_{h \leq \frac{\log X}{\log p}} (\log p)^{\nu_1} h^{\nu_1 - 1} \sum_{p' \leq \sqrt{X}} \sum_{k \leq \frac{\log X}{2 \log p'}} (\log p')^{\nu_2} k^{\nu_2 - 1} \quad (1.48) \\ \leq \sum_{p \leq z} \left(\frac{\log X}{\log p}\right)^{\nu_1} (\log p)^{\nu_1} \sum_{p' \leq \sqrt{X}} \left(\frac{\log X}{2 \log p'}\right)^{\nu_2} (\log p')^{\nu_2} \\ \leq 2^{-\nu_2} (\log X)^{\nu_1 + \nu_2} \pi(z) \pi(\sqrt{X}) \leq 1.26^2 2^{-\nu_2} (\log X)^{\nu_1 + \nu_2} \frac{z}{\log z} \frac{\sqrt{X}}{\log \sqrt{X}} \\ \leq 1.26^2 \times \frac{1}{2^{\nu_2 - 1}} (\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 2} \frac{z \sqrt{X}}{\delta}. \quad (1.49) \end{aligned}$$

L'autre terme sera majoré par la même expression avec un  $\frac{1}{2^{\nu_1 - 1}}$ . Donc finalement

on prend comme majorant :

$$1.26^2 \times \frac{1}{2^{\nu_1-2}} (\log X)^{\nu_1+\nu_2-2} \frac{z\sqrt{X}}{\delta}.$$

On divise cette somme par  $(\nu_1 - 1)!(\nu_2 - 1)!$ , on majore cette fois encore  $f(n)$  par  $B$  et on utilise le lemme 1.6.3.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Sigma_m &\leq 1.26^2 \times \frac{1}{2^{\nu_1-2}} \text{MT}.B. \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}{(\nu_1 - 1)!(\nu_2 - 1)!} 2c^2 \frac{z\sqrt{X}}{\delta \hat{F}(X) \log X} \\ &\leq 1.26^2 \times \frac{1}{2^{\nu_1-3}} c^2 \text{MT}.B. \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}{(\nu_1 - 1)!(\nu_2 - 1)!} \frac{\delta^{\nu_2}}{\log X}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

En effet, on utilise  $(H_8)$  et on majore  $\frac{1}{2^{\nu_1-3}}$  par 4, et grâce encore au lemme 1.6.4 on majore  $(\nu_1 + \nu_2)!$  par  $\sqrt{2\pi(\nu_1 + \nu_2)} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{e}\right)^{\nu_1 + \nu_2} e^{\frac{1}{12(\nu_1 + \nu_2)}}$  et on minore  $(\nu_i)!$  par  $\sqrt{2\pi\nu_i} \left(\frac{\nu_i}{e}\right)^{\nu_i}$  pour  $i \in \{1; 2\}$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_m &\leq 1.26^2 \times 4c^2 \text{MT}.B. \frac{\delta^{\nu_2}}{\log X} \frac{\sqrt{\nu_1}\sqrt{\nu_2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} e^{\frac{1}{12(\nu_1 + \nu_2)}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}{\nu_1^{\nu_1} \nu_2^{\nu_2}} \\ &\leq 3c^2 \text{MT}.B. \delta^{\nu_2} \frac{\sqrt{\nu_1}\sqrt{\nu_2}}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} \frac{(2\nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}{\nu_1^{\nu_1} \nu_2^{\nu_2}} \\ &\leq 3c^2 \text{MT}. \frac{B}{\log X} \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\nu_1} (4\delta)^{\nu_2}. \end{aligned}$$

#### 1.7.4 Majoration de $\sum \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n)$ pour $m$ premier $\geq X^{1/2}$

Remarquons que la condition  $m \geq \sqrt{X}$  implique  $p^h \leq \sqrt{X}$ . On calcule maintenant

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{p^h \leq \sqrt{X} \\ p \leq z}} (\log p)^{\nu_1} h^{\nu_1-1} \sum_{\substack{\sqrt{X} \leq p' \leq \frac{X}{p^h}}} (\log p')^{\nu_2} f(p'p^h) \\ &+ \sum_{\substack{p^h \leq \sqrt{X} \\ p \leq z}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2-1} \sum_{\substack{\sqrt{X} \leq p' \leq \frac{X}{p^h}}} (\log p')^{\nu_1} f(p'p^h). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Ces deux termes sont symétriques en  $\nu_1$  et  $\nu_2$  donc on majore l'un des deux puis on échange  $\nu_1$  et  $\nu_2$  pour obtenir la majoration de l'autre terme. En pratique on prendra le double du plus grand comme majoration finale.

On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{p^h \leq \sqrt{X} \\ p \leq z}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2-1} \sum_{\sqrt{X} \leq p' \leq \frac{X}{p^h}} (\log p')^{\nu_1} f(p'p^h) \\
& \leq \sum_{\substack{p^h \leq \sqrt{X} \\ p \leq z}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2-1} \max_{p' \leq X/p^h} (\log p')^{\nu_1} \sum_{p' \leq \frac{X}{p^h}} f(p'p^h). \tag{1.52}
\end{aligned}$$

A  $p$  fixé, on majore la seconde somme sur les  $p'$  premiers par la somme sur tous les entiers  $n$  tels que  $n$  premier avec  $P(\tilde{z})$  mais pas avec  $p$ , on note  $P_p(\tilde{z})$  le produit de tous les nombres premiers inférieurs à  $\tilde{z}$  sauf  $p$ , où  $\tilde{z} = X^{1/4}$ . Autrement dit on utilise un nouveau crible et on fera appel au lemme fondamental (lemme 1.6.8) avec  $M = \tilde{z} = X^{1/4}$ ,  $\tilde{\sigma} = \sigma$  et du coup la constante  $\tilde{c} = c$ . On fera intervenir les  $\lambda_d^+$  ainsi générés, d'une part :

$$\sum_{p' \leq \frac{X}{p^h}} f(p'p^h) \leq \sum_{\substack{n \leq X/p^h \\ (n, P(\tilde{z}))=1 \\ (n, p)=1}} f(np^h)$$

et notre crible s'écrit donc :

$$\sum_{\substack{n \leq X/p^h \\ (n, P(\tilde{z}))=1 \\ (n, p)=1}} f(np^h) \leq \sum_{n \leq X/p^h} \sum_{\substack{d | P_p(\tilde{z}) \\ d | n}} \lambda_d^+ f(np^h) \leq \sum_{d | P_p(\tilde{z})} \lambda_d^+ \sum_{\substack{n \leq X/p^h \\ d | n}} f(np^h). \tag{1.53}$$

En posant  $n = dm$  (puisque  $d | n$ ) dans la seconde somme, on obtient  $\sum_{m \leq \frac{X}{dp^h}} f(mdp^h)$ .

On utilise enfin l'approximation (1.1), à savoir

$$\sum_{n \leq y/d} f(dn) = \sigma(d)F(y) + r_d(f, y)$$

avec ici  $y = X$  et les  $d$  sont nos  $dp^h$ .

En outre, les  $\lambda_d^+$  sont nuls pour tout  $d \geq M = X^{1/4}$  et majorés par 1, ainsi si on considère la partie « reste » :

$$\begin{aligned}
& \sum_{p^h \leq \sqrt{X}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2-1} \max_{p' \leq X/p^h} (\log p')^{\nu_1} \sum_{d | P_p(\tilde{z})} \lambda_d^+ r_{dp^h}(f, X) \\
& \leq \sum_{q \leq D_0} \sum_{p^h | q} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2-1} \max_{p' \leq X/p^h} (\log p')^{\nu_1} r_q(f, X) \\
& \leq \sum_{q \leq D_0} (\log p)^{\nu_2-1} h^{\nu_2-1} \max_{p' \leq X/p^h} (\log p')^{\nu_1} \sum_{p^h | q} (\log p) r_q(f, X)
\end{aligned} \tag{1.54}$$

où  $D_0 \geq X^{3/4} (= \sqrt{X}X^{1/4})$  et on a posé  $q = dp^h$ .

La somme sur le  $p^h$  est une somme sur  $p$  et sur  $h$ . En étudiant les variations de la fonction  $y \rightarrow (\log(y))^{\nu_2-1} (\log(\frac{X}{y}))^{\nu_1}$  pour  $y \leq \sqrt{X}$ , le lecteur vérifiera que le

maximum est atteint sur  $\mathbb{R}$  en  $y = X^{\frac{\nu_2-1}{\nu_1+\nu_2-1}} > \sqrt{X}$  (on suppose que  $\nu_2 \geq \nu_1 + 1$ ) or  $y \leq \sqrt{X}$ , et en utilisant le fait que  $\sum_{p^h|q} \log p = \log q \leq \log X$ , on majore le terme précédent par

$$\frac{1}{2^{\nu_1+\nu_2-1}} (\log X)^{\nu_1+\nu_2-1} \log X \sum_{q \leq D_0} r_q(f, X) \leq \frac{1}{2^{\nu_1+\nu_2-1}} (\log X)^{\nu_1+\nu_2} R(f, D_0, 1). \quad (1.55)$$

On notera que  $d \mid P_p(\tilde{z})$  implique  $d$  premier avec  $p$ , et  $\sigma$  étant multiplicative,  $\sigma(dp^h) = \sigma(d)\sigma(p^h)$ .

Ce qui fait, après application du lemme fondamental, que notre quantité initiale est inférieure à :

$$\begin{aligned} (\log X)^{\nu_1} \sum_{\substack{p^h \leq \sqrt{X} \\ p \leq z}} (\log p)^{\nu_2} h^{\nu_2-1} \sigma(p^h) \frac{V_\sigma(X^{1/4})}{1-\sigma(p)} \hat{F}(X) (1 + C_0(c)) \\ + \frac{1}{2^{\nu_1+\nu_2-1}} (\log X)^{\nu_1+\nu_2} R(f, D_0, 1). \end{aligned}$$

En effet on a ici  $e^{-(\log M)/\log z} = e^{-1} \leq 1$  et le produit eulérien de la majoration est inférieur ou égal à  $\frac{V_\sigma(X^{1/4})}{1-\sigma(p)}$  (il manque éventuellement le facteur  $1 - \sigma(p)$  dans le cas où  $p \leq X^{1/4}$  car  $(n, p) = 1$ ). Dans le premier terme, on a majoré simplement  $\max_{p' \leq X/p^h} (\log p')^{\nu_1}$  par  $(\log X)^{\nu_1}$ .

En ce qui concerne ce premier terme, l'hypothèse  $(H_1)$  implique en prenant  $u = v = p$  que  $(1 - \sigma(p))^{-1} \leq c$ , et en utilisant l'hypothèse  $(H_6)$  on majore  $\sigma(p^h)$  par  $\frac{c}{p^h}$ .

Le premier terme est donc inférieur à

$$(\log X)^{\nu_1} V_\sigma(X^{1/4}) \sum_{p \leq z} \frac{(\log p)^{\nu_2}}{p} \sum_{h \geq 1} \frac{h^{\nu_2-1}}{p^{h-1}} c^2 \hat{F}(X) (1 + C_0(c)).$$

On utilise ensuite le lemme 1.6.7 d'une part. D'autre part, l'hypothèse  $(H_2)$  permet de majorer  $V_{\sigma_0}(z)$  par  $c/\log z$ , on majore  $V_{\sigma_0}(X^{1/4})$  grâce à l'hypothèse  $(H_7)$  par  $c/\log X$  mais pour majorer  $V_\sigma(X^{1/4})$  on laissera le lecteur lire (44) et (45) de RAMARÉ 2010, il vient une constante  $u$  égale à  $c$  dans le cas de  $\sigma_0$  et égale à  $ce^{c\Delta}$  dans le cas de  $\sigma$  et notre majorant devient :

$$(\log X)^{\nu_1} \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \frac{u}{\log X} (\log z)^{\nu_2} 2^{\nu_2} (\nu_2 - 1)! c^2 \hat{F}(X) (1 + C_0(c)).$$

On divise ensuite ces deux termes par  $(\nu_1 - 1)!(\nu_2 - 1)!$  en encadrant encore une fois les factorielles selon le lemme 1.6.4 pour obtenir le majorant suivant

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{p^h p' \leq X \\ p^h \leq \sqrt{X} \\ p \leq z}} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n) \\
& \leq \text{MT}.u(2\delta)^{\nu_2} \frac{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}{\nu_2^{\nu_2}} e^{-\nu_1} e^{\frac{1}{24}} c^2 (1 + C_0(c)) + \frac{1}{2^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2}}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} R(f, D_0, 1) \\
& \leq \text{MT}.u \left( 2\delta \left( 1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} \right) \right)^{\nu_2} \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{e} \right)^{\nu_1} c^2 e^{\frac{1}{24}} (1 + C_0(c)) + \frac{1}{2^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2}}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} R(f, D_0, 1) \\
& \leq \text{MT}.u(4\delta)^{\nu_2} (\nu_2)^{\nu_1} c^2 e^{\frac{1}{24}} (1 + C_0(c)) + \frac{1}{2^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2}}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} R(f, D_0, 1).
\end{aligned}$$

Le second terme sera donc majoré par

$$\text{MT}.u(4\delta)^{\nu_1} (\nu_1)^{\nu_2} c^2 e^{\frac{1}{24}} (1 + C_0(c)) + \frac{1}{2^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2}}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} R(f, D_0, 1)$$

et ainsi le produit de convolution sera majoré par

$$2\text{MT}.u(4\delta)^{\nu_1} (\nu_1)^{\nu_2} c^2 e^{\frac{1}{24}} (1 + C_0(c)) + \frac{1}{2^{\nu_1 + \nu_2 - 2}} \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2}}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} R(f, D_0, 1).$$

### 1.7.5 Bilan

On additionne les majorations obtenues dans les quatre parties précédentes pour  $f_0$  et  $f$ , en utilisant  $(H_9)$  pour majorer les contributions des  $R(f, D_0, 1)$  par  $A' \hat{F}(X) / (\log X)^2$  et on trouve un majorant global  $(\theta_1 + \theta_2)\text{MT}$  où

$$|\theta_1| \leq 4 \frac{B}{\log X} c^3 (1 + e^{c\Delta}) (1 + C_0(c)) (4\delta)^{\nu_1} \nu_1^{\nu_2} \quad (1.56)$$

et

$$|\theta_2| \leq \frac{1}{2^{\nu_1 + \nu_2 - 2}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} \frac{V_{\sigma_0}}{V_{\sigma}} \frac{A'}{\log X}. \quad (1.57)$$

Et, en utilisant le lemme 1.6.4,

$$\frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} \leq \frac{\sqrt{\nu_1} \sqrt{\nu_2}}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} e^{\frac{1}{24}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}{\nu_1^{\nu_1} \nu_2^{\nu_2}},$$

on majore encore  $\frac{V_{\sigma_0}}{V_{\sigma}}$  par  $2c^2$  et on trouve :

$$|\theta_2| \leq 4 \frac{\sqrt{\nu_1} \sqrt{\nu_2}}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} e^{\frac{1}{24}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)^{\nu_1 + \nu_2}}{(2\nu_1)^{\nu_1} (2\nu_2)^{\nu_2}} 2c^2 \frac{A'}{\log X}. \quad (1.58)$$

En posant  $\nu_1 = x(\nu_1 + \nu_2)$ , majorer l'expression précédente revient à majorer  $\exp(h(x))$  où

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log(1-x) - x(\nu_1 + \nu_2) \log x - (1-x)(\nu_1 + \nu_2) \log(1-x) \\ &= \left(\frac{1}{2} - x(\nu_1 + \nu_2)\right) \log x + \left(\frac{1}{2} - (1-x)(\nu_1 + \nu_2)\right) \log(1-x) \end{aligned}$$

dont la dérivée est

$$h'(x) = (\nu_1 + \nu_2)(\log(1-x) - \log(x)) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right).$$

Le maximum de  $h$  est donc atteint en  $x = \frac{1}{2}$  ainsi  $\nu_1 = \nu_2$ . On obtient finalement

$$|\theta_2| \leq 4c^2 \sqrt{\nu_1 + \nu_2} e^{\frac{1}{24}} \frac{A'}{\log X} \leq 5c^2 \sqrt{\nu_1 + \nu_2} \frac{A'}{\log X} \leq 0.01A'. \quad (1.59)$$

## 1.8 Résultat final

Le résultat final, voir 1.2 est donc :

Pour tous  $1 \leq \nu_1 \leq \nu_2$ ,

$$\begin{aligned} &\sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n) f(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f(n) \\ &= \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \left( \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)}(n) f_0(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) f_0(n) \right) \\ &\quad + (\rho + \theta) \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \hat{F}(X) \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \end{aligned}$$

où

$$|\rho| \leq \frac{3}{2} \times (149\nu_2)^{\nu_1 + \nu_2} \times \left( Ac^2 + (C_0(c)e\delta^{3\nu_2} + \Delta 4^{\frac{1}{\delta}}) \left(\frac{c}{\delta}\right)^{2\nu_2} \right)$$

et on majore  $|\theta|$  en gardant d'une part la contribution de Reste1 et Reste2 du crible ( $\rho$ ) et en regroupant d'autre part l'autre contribution du crible ( $\tilde{\rho}$ ) et celles des termes  $\theta_1$  et  $\theta_2$  obtenus lors du retrait du crible. Dans le deuxième terme la dernière ligne,  $2c^2(1 + e^{c\Delta})(1 + C_0(c))$  peut être considéré comme majoré par

une constante et  $Cste \times (4\delta)^{\nu_2} \nu_2^{\nu_1} \leq (24\nu_2)^{\nu_2} \left(3\nu_2^2 \log \frac{1}{\delta}\right)^{\nu_1+2\nu_2} \delta^{\nu_1}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\theta| &\leq 2(24\nu_2)^{\nu_2} B_0 \left(3\nu_2^2 \log \frac{1}{\delta}\right)^{\nu_1+2\nu_2} \delta^{\nu_1} + 2 \frac{B}{\log X} c^2 (1 + e^{c\Delta}) (1 + C_0(c)) (4\delta)^{\nu_2} \nu_2^{\nu_1} + A' \\
&\leq 2 \times 648^{\nu_2} \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2} \left(\frac{B}{\log X} + B_0\right) \delta^{\nu_1} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\nu_1+2\nu_2} + A'.
\end{aligned}$$

(1.60)

# 2 Une avancée vers le théorème des nombres premiers jumeaux

## 2.1 Conjecture

Nous travaillons sous la conjecture suivante :

**Conjecture 2.1.1.** *Pour tout  $\delta$  et pour tout  $\theta$ , il existe une constante  $A_0(\delta, \theta)$  telle que*

$$\sum_{\substack{d \leq X^{1-\delta} \\ (d,2)=1}} \max_{y \leq X} \left| \psi(y; d, 2) - \frac{y}{\varphi(d)} \right| \leq A_0(\delta, \theta) \frac{X}{(6 \log X)^\theta}. \quad (2.1)$$

C'est une conjecture de type Elliott-Halberstam forte (mais sur une seule classe de congruence). Cette hypothèse est à rapprocher de ZHANG 2014,

$$\sum_{\substack{q \leq X^{0.5+2\omega} \\ p|q \Rightarrow p \leq X^\omega}} |\psi(X; q, a) - X/\varphi(q)| \ll X/(\log X)^c$$

pour  $\omega = 1/1168$  et pour tout entier  $a$  tel que  $p|a \Rightarrow p \leq X^\omega$ .

## 2.2 Application du théorème 1.2.1 au cas

$$f(n) = \Lambda(n + 2)$$

Ce théorème s'applique aux nombres premiers jumeaux en prenant  $f(n) = \Lambda(n + 2)$  et  $f_0(n) = 1$ .

On commence par calculer les asymptotiques impliquant  $f_0$ .

### 2.2.1 Asymptotiques de référence

Nous avons besoin dans cette partie des définitions et lemmes suivants :

**Définition 2.2.1.** *Pour tout entier  $\kappa \geq 1$ ,*

$$\mathcal{F}_\kappa(X) = \int_1^X \log^{\kappa-1} t dt. \quad (2.2)$$

Alors on a

**Lemme 2.2.2.**

$$\mathcal{F}_\kappa(X) = X \sum_{1 \leq k \leq \kappa} (-1)^{k-1} \frac{(\kappa-1)!}{(\kappa-k)!} \log^{\kappa-k} X + (-1)^\kappa (\kappa-1)!$$

Voir RAMARÉ 2010, lemme 26. Et ainsi

$$\mathcal{F}_\kappa(X) \asymp X \log^{\kappa-1} X. \quad (2.3)$$

On a également les résultats suivants (voir RAMARÉ 2010, lemmes 27 et 28) :

**Lemme 2.2.3.** *Il existe une constante positive  $c$  telle que, pour  $X \geq 3$  et  $X \geq \mathfrak{f} \geq 1$ ,*

$$\sum_{n \leq X}^* \Lambda^{(\kappa)}(n) = \frac{\mathcal{F}_\kappa(X)}{(\kappa-1)!} (1 + \mathcal{O}(\mathcal{L}^c))$$

où  $\mathcal{L}^c$  est le terme d'erreur du théorème des nombres premiers, pour une certaine constante  $c$  et  $\mathcal{L} = \exp\left(-\frac{\log^{3/5} X}{\log \log^{1/5} X}\right)$ .

**Lemme 2.2.4.**  *$\nu_1$  et  $\nu_2$  étant des entiers positifs, on a pour  $X \geq 1$ ,*

$$\int_1^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(X/t) \mathcal{F}_{\nu_2}(t)}{(\nu_1-1)! (\nu_2-1)!} dt = \frac{\mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2}(X)}{(\nu_1+\nu_2-1)!}.$$

On en déduit le lemme suivant :

**Lemme 2.2.5.** *Il existe une constante positive  $c$  telle que, pour  $X \geq 3$  et  $X \geq \mathfrak{f} \geq 1$  on a*

$$\sum_{n \leq X}^* \Lambda^{(\nu_1+\nu_2)}(n) + \sum_{n \leq X}^* \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) = \frac{2\mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2}(X)}{(\nu_1+\nu_2-1)!} (1 + \mathcal{O}(\mathcal{L}^c)). \quad (2.4)$$

*Démonstration.* Le lemme 2.2.3 nous donne le premier terme de la somme de gauche. Pour le second terme (produit de convolution), on utilise le principe de l'hyperbole de Dirichlet :  $\sum_{\ell \leq X} \sum_{m \leq X/\ell} = \sum_{\substack{\ell \leq \sqrt{X} \\ m \leq X/\ell}} + \sum_{\substack{m \leq \sqrt{X} \\ \ell \leq X/m}} - \sum_{\substack{\ell \leq \sqrt{X} \\ m \leq \sqrt{X}}}$ .

Ainsi on calcule :

$$\sum_{\ell \leq \sqrt{X}}^* \sum_{m \leq X/\ell}^* \Lambda^{(\nu_1)}(\ell) \Lambda^{(\nu_2)}(m). \quad (2.5)$$

D'après le lemme 2.2.3, il existe une constante  $c_1$  telle que ce dernier terme soit égal à

$$\sum_{\ell \leq \sqrt{X}}^* \Lambda^{(\nu_1)}(\ell) \frac{\mathcal{F}_{\nu_2}\left(\frac{X}{\ell}\right)}{(\nu_2-1)!} (1 + \mathcal{O}(\mathcal{L}^{c_1})).$$

En utilisant le lemme 2.2.2 et le lemme 1.6.4, on s'aperçoit que le terme reste sera

de l'ordre de

$$X \frac{\log^{\nu_1 + \nu_2} X}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} \mathcal{L}^{c_1} \ll \frac{\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(X)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \mathcal{L}^{c_2}$$

où  $c_2$  est une autre constante. Quant au terme principal, on le calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \leq \sqrt{X}}^* \Lambda^{(\nu_1)}(\ell) \frac{\mathcal{F}_{\nu_2}(\frac{X}{\ell})}{(\nu_2 - 1)!} &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}}^* \frac{\Lambda^{(\nu_1)}(\ell)}{(\nu_2 - 1)!} \int_1^{\frac{X}{\ell}} \mathcal{F}'_{\nu_2}(t) dt \\ &= \int_1^X \sum_{\ell \leq \min(\frac{X}{t}, \sqrt{X})}^* \frac{\Lambda^{(\nu_1)}(\ell) \mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt \\ &= \int_1^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\min(\frac{X}{t}, \sqrt{X}))}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt + \text{terme d'erreur.} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\min(\frac{X}{t}, \sqrt{X}))}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt &= \\ &= \int_1^{\sqrt{X}} \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\sqrt{X})}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt + \int_{\sqrt{X}}^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\frac{X}{t})}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt \end{aligned}$$

où

$$\int_1^{\sqrt{X}} \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\sqrt{X})}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt = \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\sqrt{X}) \mathcal{F}_{\nu_2}(\sqrt{X})}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!}.$$

On reprend le principe de l'hyperbole de Dirichlet, par symétrie sur  $\ell$  et  $m$  on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X}^* \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)}(n) &= \int_{\sqrt{X}}^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\frac{X}{t})}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt + \int_{\sqrt{X}}^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_2}(\frac{X}{t})}{(\nu_2 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_1}(t)}{(\nu_1 - 1)!} dt \\ &\quad + \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\sqrt{X}) \mathcal{F}_{\nu_2}(\sqrt{X})}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(X)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \mathcal{L}^{c_2}\right). \end{aligned}$$

On a utilisé ici aussi le lemme 2.2.3 pour le terme à soustraire

$$\sum_{\substack{\ell \leq \sqrt{X} \\ m \leq \sqrt{X}}}^* \Lambda^{(\nu_1)}(\ell) \Lambda^{(\nu_2)}(m) = \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\sqrt{X}) \mathcal{F}_{\nu_2}(\sqrt{X})}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)!} (1 + \mathcal{O}(\mathcal{L}^{c_1})).$$

Ensuite, en utilisant une intégration par parties, puis en posant le changement de variable  $u = X/t$ , on trouve que

$$\int_{\sqrt{X}}^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_1}(\frac{X}{t})}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_2}(t)}{(\nu_2 - 1)!} dt = \int_1^{\sqrt{X}} \frac{\mathcal{F}'_{\nu_1}(u)}{(\nu_1 - 1)!} \frac{\mathcal{F}_{\nu_2}(\frac{X}{u})}{(\nu_2 - 1)!} du \quad (2.6)$$

et ainsi on trouve que le terme principal est égal à

$$\int_1^X \frac{\mathcal{F}_{\nu_2}(\frac{X}{t})\mathcal{F}'_{\nu_1}(t)}{(\nu_1-1)!(\nu_2-1)!} dt = \frac{\mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2}(X)}{(\nu_1+\nu_2-1)!} \quad (2.7)$$

d'après le lemme 2.2.4. Ce qui conclut la démonstration.  $\square$

## 2.2.2 Utilisation du théorème 1.2.1

On applique maintenant notre théorème dans le cas

$$f = 2, \quad \sigma(d) = \frac{\mathbb{1}_{(d,2)=1}}{\varphi(d)}, \quad \sigma_0(d) = \frac{1}{d}, \quad f_0(n) = 1, \quad \hat{F}(X) = X$$

et  $F(y) = y$ . Pour  $f(n) = \Lambda(n+2)$  et  $f_0(n) = 1$ , on a  $B = \log X$  et  $B_0 = 1$ .

La conjecture 2.1 appliquée au cas  $\theta = 5(\nu_1 + \nu_2)^2 + 5$  nous donne l'hypothèse suivante : pour tout  $\delta$  il existe une constante  $A_0$  ne dépendant que de  $\delta$ , telle que

$$\sum_{\substack{d \leq X^{1-\delta} \\ (d,2)=1}} \max_{y \leq X} \left| \psi(y; d, 2) - \frac{y}{\varphi(d)} \right| \leq \frac{A_0}{\log^2 X} \frac{X}{(6 \log X)^{5(\nu_1+\nu_2)^2+3}}. \quad (H_{10})$$

Et pour la suite on pose  $A'' = A_0 / \log^2 X$ .

**Corollaire 2.2.6.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $X$  assez grand, sous la conjecture 2.1, pour tout  $\delta > 100/\sqrt{\log X}$ , et pour tous  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , tels que  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq (\log X)^{1/10}$  et  $\nu_2^2 \delta \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \leq \frac{1}{8}$ , on a*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)(\Lambda^{(\nu_1+\nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)})(n) \\ = \frac{2\mathfrak{S}_2 \mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2}(X)}{(\nu_1+\nu_2-1)!} (1 + \mathcal{O}(\mathcal{L}^c + \sqrt{A''} + \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2} \delta^{\frac{\nu_1}{2}})) \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{S}_2 = \prod_{3 \leq p} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$  est la constante des nombres premiers jumeaux ( $\mathfrak{S}_2 = 0,660\dots$ ).  
Ou plus simplement,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)(\Lambda^{(\nu_1+\nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)})(n) \\ = \frac{2\mathfrak{S}_2 \mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2}(X)}{(\nu_1+\nu_2-1)!} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2} \delta^{\frac{\nu_1}{2}}\right) \right) \end{aligned}$$

car par définition  $\mathcal{L}^c$  et  $\sqrt{A''}$  sont tous les deux des  $\mathcal{O}(1/\log X)$ .

*Démonstration.* On veut appliquer le théorème 1.2.1 qui s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \left( \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)} \right) (n) \\ &= \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} \sum_{n \leq X} \left( \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)} \right) (n) + (\rho + \theta) \frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} X \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \end{aligned}$$

où

$$\frac{V_\sigma(z)}{V_{\sigma_0}(z)} = \prod_{3 \leq p \leq z} \frac{1 - \frac{1}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{3 \leq p \leq z} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = \mathfrak{S}_2(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{z})) = \mathfrak{S}_2(1 + \mathcal{O}(X^{-\delta})). \quad (2.8)$$

Pour cela, on vérifie toutes les hypothèses.

Notamment  $(H_9)$  qui vient d'une part du théorème de Brun-Titchmarsh avec  $C = \mathcal{O}(\log(\log X))$  et d'autre part de l'hypothèse  $(H_{10})$ . En effet, elle nous donne la majoration de  $R(f, D_0, 1)$  où  $D_0 = X^{1-\delta}$  et  $f(n) = \Lambda(n+2)$ . De plus, (en gardant les notations de la partie 1) on vérifie également la majoration de  $R(1, X^{1-\delta}, 1)$  car  $f_0(n) = 1$ , et sachant que  $r_d(1, y)$  est la partie fractionnaire de  $y/d$  puisque  $\sigma_0(d) = 1/d$  et  $F(y) = y$  et  $\sum_{n \leq y/d} 1 = \frac{1}{d} \times y + r_d(1, y)$ . D'où  $R(1, X^{1-\delta}, 1) \leq X^{1-\delta} \leq \frac{X}{(\log X)^\theta}$  pour tout  $\theta$ . Et enfin notons que  $V_\sigma(z)/V_{\sigma_0}(z) = \mathfrak{S}_2(1 + \mathcal{O}(X^{-\delta}))$  d'après le calcul ci-dessus.

Ainsi il nous faut  $A'$  tel que

$$A' \geq A'' (6 \log X)^{-5(\nu_1 + \nu_2)^2 - 1} + \mathfrak{S}_2 X^{-\delta} \log^2 X. \quad (2.9)$$

En outre, d'après le lemme précédent,

$$\sum_{n \leq X} \left( \Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)} \right) (n) = \frac{2\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(X)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} (1 + \mathcal{O}(\mathcal{L}^c)) \quad (2.10)$$

et on notera que

$$X \frac{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} = \mathcal{O} \left( \frac{\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(X)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \right).$$

Et enfin, dans le théorème 1.2.1 et (1.60) nous avons

$$\begin{aligned} |\rho| + |\theta| \ll & \frac{3}{2} \times (149\nu_2)^{\nu_1 + \nu_2} \times \left( Ac^2 + (C_0(c)e\delta^{3\nu_2} + \Delta 4^{\frac{1}{5}}) \left( \frac{c}{\delta} \right)^{2\nu_2} \right) \\ & 2 \times 648^{\nu_2} \nu_2^{2\nu_1 + 5\nu_2} \left( \frac{B}{\log X} + B_0 \right) \delta^{\nu_1} \left( \log \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_1 + 2\nu_2} + A' \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{\substack{p^a \leq X \\ p \geq z}} |\sigma(p^a) - \sigma_0(p^a)| = \sum_{\substack{p^a \leq X \\ p \geq z \\ (p,2)=1}} \left| \frac{1}{\varphi(p^a)} - \frac{1}{p^a} \right| = \sum_{\substack{p^a \leq X \\ p \geq z \\ (p,2)=1}} \frac{1}{p^a} \times \frac{1}{p-1} \\ &\leq \frac{1}{z} \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \ll X^{-\delta} \log X. \end{aligned}$$

Et ici  $\frac{B}{\log X} + B_0 = 2$ . Nous voulons simplifier cette majoration.

Montrons d'abord que  $4^{\frac{1}{\delta}} \Delta$  est inférieur à  $\delta^{3\nu_2}$  pour  $X$  assez grand.

On a d'une part

$$4^{\frac{1}{\delta}} \Delta \leq 4^{\frac{1}{\delta}} \frac{\log X}{X^\delta} \quad \text{et} \quad \left( \frac{100}{\sqrt{\log X}} \right)^{3\nu_2} < \delta^{3\nu_2},$$

en passant au logarithme et en minorant encore  $\delta$  par  $\frac{100}{\sqrt{\log X}}$ , on montre que

$$4^{\frac{1}{\delta}} \frac{\log X}{X^\delta} \leq \left( \frac{100}{\sqrt{\log X}} \right)^{3\nu_2}$$

équivalent à

$$\log(\log X) \left( 1 + \frac{3}{2} \nu_2 \right) \leq 3\nu_2 \log 100 + \left( 100 - \frac{1}{25} \right) \sqrt{\log X}.$$

D'autre part,  $A'$  est clairement (très) inférieur à  $\frac{1}{2}(149\nu_2)^{\nu_1+\nu_2} Ac^2$  donc pour les contributions en  $A$  et  $A'$  on gardera simplement  $2(149\nu_2)^{\nu_1+\nu_2} Ac^2$ .

En prenant  $A = c_1(149\nu_2)^{-\nu_1-\nu_2} \sqrt{A''}$ , et en majorant  $\log(\log X)$  par  $\log X$  dans la constante  $C$ , on trouve que

$$A'' \ll (149\nu_2)^{2(\nu_1+\nu_2)} c^4 (2 \log X)^{4\nu_2^2+1} A' \ll (6 \log X)^{5\nu_2^2+1} A'$$

en supposant  $4 \leq \nu_2 \leq (\log X)^{\frac{1}{10}}$  et encore  $\nu_1 \leq \nu_2$ .

Enfin, pour  $\delta$  assez petit on a

$$648^{\nu_2} \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2} \delta^{\nu_1} \left( \log \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_1+2\nu_2} \ll \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2} \delta^{\frac{\nu_1}{2}}.$$

□

## 2.3 Conséquence : Un théorème sur des nombres presque premiers jumeaux

### 2.3.1 Simplification de l'asymptotique

Dans cette section, on note

$$\Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n) = (\Lambda^{(\nu_1 + \nu_2)} + \Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)})(n)$$

et

$$\tilde{\Lambda}_{\nu_1, \nu_2}(n) = \frac{\Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{(\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}.$$

On remarque alors que

$$\tilde{\Lambda}_{\nu_1, \nu_2}(n) = \frac{\Lambda(n)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} + \frac{\sum_{d_1 d_2 = n} \Lambda(d_1) (\log d_1)^{\nu_1 - 1} \Lambda(d_2) (\log d_2)^{\nu_2 - 1}}{(\nu_1 - 1)! (\nu_2 - 1)! (\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}. \quad (2.11)$$

Et ainsi le corollaire 2.2.6 peut s'écrire

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n) = \frac{2\mathfrak{S}_2 \mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(X)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \left( 1 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1 + 5\nu_2} \delta^{\frac{\nu_1}{2}} \right) \right).$$

On travaillera ici sous les conditions

$$\delta > 100/\sqrt{\log X} \quad \nu_1, \nu_2 \leq \left(\frac{1}{2} \log X\right)^{1/10} \quad \nu_2^2 \delta \log \left(\frac{1}{\delta}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

On s'intéresse à

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \nu_2}(n) = \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \frac{\Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{(\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}}, \quad (2.12)$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \frac{\Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{(\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} &= \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n) \left( \int_n^X -\frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1) dt}{t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2}} + \frac{1}{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n) \\ &\quad - \int_2^X \sum_{n \leq t} \Lambda(n+2) \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2}} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale va en fait être un terme d'erreur. Pour l'estimer on utilise le fait que  $\int_2^X = \int_2^{\sqrt{X}} + \int_{\sqrt{X}}^X$  et on peut utiliser le corollaire 2.2.6 pour le deuxième terme car on a bien la condition  $\nu_1, \nu_2 \leq \min_{\sqrt{X} \leq t \leq X} (\log t)^{1/10} = \left(\frac{1}{2} \log X\right)^{1/10}$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{X}}^X \sum_{n \leq t} \Lambda(n+2) \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2}} dt \\ &= \int_{\sqrt{X}}^X \frac{2\mathfrak{G}_2 \mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(t)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)! t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2}} \left( 1 + \mathcal{O}\left( \frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1 + 5\nu_2} \delta^{\frac{\nu_1}{2}} \right) \right) dt. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.2,

$$\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(t) \sim t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}. \quad (2.13)$$

Plus précisément,  $\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(t)$  étant une somme alternée on a même

$$\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(t) \leq t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2 - 1} + (\nu_1 + \nu_2 - 1)!$$

Cette intégrale est donc un  $\mathcal{O}\left(\frac{X}{\log X}\right)$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_2^{\sqrt{X}} \sum_{n \leq t} \Lambda(n+2) \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2}} dt \\ & \leq \int_2^{\sqrt{X}} \log(t+2) \sum_{n \leq t} \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2}} dt \end{aligned}$$

et d'après le lemme 2.2.5,

$$\sum_{n \leq t} \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n) = \frac{2\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(t)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} (1 + \mathcal{O}(\mathcal{L}^c)) \quad (2.14)$$

avec encore ici  $\mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(t) \sim t(\log t)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}$  donc cette seconde intégrale est un  $\mathcal{O}(\sqrt{X})$ .

On peut donc écrire maintenant

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \frac{\Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n)}{(\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} = \frac{1}{(\log X)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n) + \mathcal{O}\left(\frac{X}{\log X}\right). \quad (2.15)$$

Pour évaluer le terme principal, on utilise encore le corollaire 2.2.6 :

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \Lambda_{\nu_1, \nu_2}(n) = \frac{2\mathfrak{G}_2 \mathcal{F}_{\nu_1 + \nu_2}(X)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \left( 1 + \mathcal{O}\left( \frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1 + 5\nu_2} \delta^{\frac{\nu_1}{2}} \right) \right)$$

et comme  $\mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2}(X) \sim X(\log X)^{\nu_1+\nu_2-1}$  et plus précisément, d'après le lemme 2.2.2

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2}(X) &= X(\log X)^{\nu_1+\nu_2-1} - (\nu_1 + \nu_2 - 1)\mathcal{F}_{\nu_1+\nu_2-1}(X) \\ &= X(\log X)^{\nu_1+\nu_2-1} + \mathcal{O}(X(\log X)^{\nu_1+\nu_2-2}),\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}& \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\tilde{\Lambda}_{\nu_1, \nu_2}(n) \\ &= \frac{2\mathfrak{S}_2(X(\log X)^{\nu_1+\nu_2-1} + \mathcal{O}(X(\log X)^{\nu_1+\nu_2-2}))}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!(\log X)^{\nu_1+\nu_2-1}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2}\delta^{\frac{\nu_1}{2}}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{X}{\log X}\right) \\ &= \frac{2\mathfrak{S}_2 X}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2}\delta^{\frac{\nu_1}{2}}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{X}{\log X}\right) \\ &= \frac{2\mathfrak{S}_2 X}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2}\delta^{\frac{\nu_1}{2}}\right)\right)\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\frac{2\mathfrak{S}_2 X}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log X} + \nu_2^{2\nu_1+5\nu_2}\delta^{\frac{\nu_1}{2}}\right)\right). \quad (2.16)$$

Or  $\nu_2^{2\nu_1+5\nu_2}\delta^{\frac{\nu_1}{2}} = \mathcal{O}((\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1+\nu_2)}\delta^{\frac{1}{2}})$ . Notre résultat peut donc s'énoncer ainsi :

**Théorème 2.3.1.**

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n+2)\Lambda(n)}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \frac{(\Lambda^{(\nu_1)} \star \Lambda^{(\nu_2)})(n)}{(\log n)^{\nu_1+\nu_2-1}} \\ = \frac{2\mathfrak{S}_2 X}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \left(1 + \mathcal{O}((\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1+\nu_2)}\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X})\right).\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par  $(\nu_1 + \nu_2 - 1)!$ , ce théorème peut s'écrire :

**Théorème 2.3.2.** *Pour tous  $\nu_1, \nu_2 \geq 1$ ,*

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\Lambda(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} f_{\nu_1, \nu_2} \left(\frac{\log d_1}{\log n}\right) \\ = 2\mathfrak{S}_2 X \left(1 + \mathcal{O}((\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1+\nu_2)}\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X})\right)\end{aligned}$$

où

$$f_{\nu_1, \nu_2}(x) = (\nu_1 + \nu_2 - 1) \binom{\nu_1 + \nu_2 - 2}{\nu_1 - 1} x^{\nu_1-1} (1-x)^{\nu_2-1}. \quad (2.17)$$

En effet, le produit de convolution peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)(\log d_1)^{\nu_1-1}}{(\nu_1-1)!} \frac{\Lambda(d_2)(\log d_2)^{\nu_2-1}}{(\nu_2-1)!} \frac{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!}{(\log n)^{\nu_1 + \nu_2 - 1}} \\ &= \sum_{d_1 d_2 = n} (\nu_1 + \nu_2 - 1) \binom{\nu_1 + \nu_2 - 2}{\nu_1 - 1} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right)^{\nu_1-1} \left( \frac{\log n - \log d_1}{\log n} \right)^{\nu_2-1} \frac{1}{\log n}. \end{aligned}$$

On peut déduire immédiatement du théorème 2.3.2 le lemme suivant (on retrouve ici un résultat bien connu) :

**Lemme 2.3.3.**

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\Lambda(n) = \mathcal{O}(X)$$

et

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} = \mathcal{O}(X).$$

*Démonstration.* D'après le théorème précédent, la somme de ces deux termes positifs étant un  $\mathcal{O}(X)$ , on a  $\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\Lambda(n) = \mathcal{O}(X)$  et pour tous  $\nu_1, \nu_2$ ,  $\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} f_{\nu_1, \nu_2} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) = \mathcal{O}(X)$ . On l'applique à  $f_{1,2}$  et  $f_{2,1}$ . Par définition de ces fonctions on a  $f_{1,2} + f_{2,1} = 2$  ( $= \nu_1 + \nu_2 - 1$ ). D'où le résultat.  $\square$

## 2.4 Application par approximation d'une fonction

### 2.4.1 Lien avec les polynômes de Bernstein et résultats utiles sur ces polynômes

On remarque maintenant que

$$f_{\nu_1, \nu_2}(x) = (\nu_1 + \nu_2 - 1) b_{\nu_1-1, \nu_1+\nu_2-2}(x) \quad (2.18)$$

où  $b_{k,m}$  est le polynôme de Bernstein :

$$b_{k,m} = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}. \quad (2.19)$$

Le résultat essentiel sur ces polynômes (voir M.PHILLIPS 2003) est le suivant :

**Théorème 2.4.1.** *Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ , la suite  $(B_m(f; \cdot))_{m \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ , avec*

$$B_m(f; x) = \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) b_{k,m}(x) = \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}.$$

Nous démontrons ce résultat dans le sous-chapitre suivant.  
Un autre résultat remarquable est que quel que soit  $k$ ,

$$\int_0^1 b_{k,m}(t)dt = \frac{1}{m+1}. \quad (2.20)$$

Ainsi

$$\int_0^1 f_{\nu_1, \nu_2}(t)dt = 1. \quad (2.21)$$

On pose pour la suite  $\nu' = \nu_1 + \nu_2 - 2$  et ainsi  $f_{\nu_1, \nu_2}(x) = f_{\nu_1, \nu' - \nu_1 + 2}(x) = (\nu' + 1)b_{\nu_1 - 1, \nu'}(x)$ .

Pour toute fonction  $F$  continue sur  $[0; 1]$ , on pose

$$F_{\nu'}(x) = \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} f_{\nu_1, \nu' - \nu_1 + 2}(x)$$

où

$$\alpha_{\nu_1, \nu'+1} = \frac{F\left(\frac{\nu_1-1}{\nu'}\right)}{\nu'+1}.$$

Alors, d'après le théorème sur les polynômes de Bernstein, la suite  $(F_{\nu'})$  converge uniformément vers  $F$  sur  $[0, 1]$ .

## 2.4.2 Convergence de la suite des $B_m(f; \cdot)$ vers $f$

### 2.4.2.1 Calcul préliminaire

Pour tout  $x \in [0, 1]$  et pour tout  $m$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} &= \sum_{k=0}^m \left( \left(\frac{k}{m}\right)^2 - 2\frac{k}{m}x + x^2 \right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ &= B_m(x^2, x) - 2xB_m(x, x) + x^2 B_m(1, x). \end{aligned}$$

Or, voir M.PHILLIPS 2003,

$$\begin{cases} B_m(x^2, x) = x^2 + \frac{1}{m}x(1-x) \\ B_m(x, x) = x \\ B_m(1, x) = 1 \end{cases}$$

Et donc

$$\sum_{k=0}^m \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = \frac{1}{m}x(1-x). \quad (2.22)$$

### 2.4.2.2 Démonstration de la convergence

*Démonstration.* Soit une fonction continue sur  $[0, 1]$  et bornée sur  $[0, 1]$  par  $M$ .  
 $f$  est donc uniformément continue. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x, x' \in [0, 1], \quad (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon). \quad (2.23)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $\delta$  qui satisfait les inégalités ci-dessus de l'uniforme continuité.

Nous allons démontrer la convergence uniforme de  $(B_m(f; \cdot))$  vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

Soit un entier  $N > \frac{M}{\varepsilon \delta^2}$ . Pour tout  $m > N$  et pour tout  $x \in [0, 1]$  on considère

$$S_\delta = \{k \in \{0, 1, \dots, m\}, |\frac{k}{m} - x| \geq \delta\}.$$

Autrement dit  $s_\delta$  est l'ensemble des  $k$  tels que  $\frac{k}{m}$  n'est pas proche de  $x$ .

On remarque que  $|\frac{k}{m} - x| \geq \delta$  implique  $\frac{1}{\delta^2} \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 \geq 1$ , et ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k \in S_\delta} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k \in S_\delta} \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^m \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{m} x(1-x) \end{aligned}$$

d'après le calcul préliminaire (2.22).

Or  $\forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$  donc on en déduit :

$$\sum_{k \in S_\delta} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \leq \frac{1}{4m\delta^2}. \quad (2.24)$$

On évalue maintenant la différence :

$$\begin{aligned} f(x) - B_m(f; x) &= \sum_{k=0}^m \left(f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ &= \sum_{k \in S_\delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ &\quad + \sum_{k \notin S_\delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \end{aligned}$$

en remarquant que  $k \notin S_\delta$  équivaut à  $|\frac{k}{m} - x| < \delta$ .

Et donc,

$$|f(x) - B_m(f; x)| \leq \sum_{k \in S_\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ + \sum_{k \notin S_\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}.$$

Comme  $f$  est bornée,  $|f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)| \leq 2M$ , et donc d'après (2.24),

$$\sum_{k \in S_\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \leq \frac{M}{2m\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

car on avait choisi  $m > N > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$ .

Et  $\forall k \notin S_\delta$ ,  $|\frac{k}{m} - x| < \delta$  donc  $|f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , donc

$$\sum_{k \notin S_\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin S_\delta} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - B_m(f; x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui conclut la démonstration. □

## 2.5 Résultat final

### 2.5.1 Création d'une fonction "plateau" et de fonctions "pics"

On considère une fonction infiniment dérivable qui vaut 0 en 0 et 1 en 1 et qui passe très rapidement de 0 à 1 (avec dérivées nulles en 0 et 1). Par exemple soit la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f_m(x) = (4x(1-x))^m$  et  $F_m(x) = \frac{1}{a_m} \int_0^x f_m(t) dt$  où  $a_m = \int_0^1 f_m(t) dt$ . (Remarque :  $a_m = 4^m \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k+m+1} \binom{m}{k}$ ). Plus la valeur de  $m$  est grande et plus la fonction passe rapidement de 0 à 1 mais cette valeur importe relativement peu pour le résultat (on peut supposer  $m \geq 10$  par exemple).

On construit maintenant une fonction "plateau"  $F$  qui est nulle pour tout  $x \leq \beta$  et pour tout  $x \geq \gamma$  et constante sur un intervalle proche (et intérieur) de  $[\beta, \gamma]$  de la façon suivante :

Soit tout d'abord la fonction  $h$  définie par :

$$\begin{cases} h(x) = 0 & \text{sur } [0, \beta] \\ h(x) = F_m\left(\frac{x-\beta}{\epsilon}\right) & \text{sur } [\beta, \beta + \epsilon] \\ h(x) = 1 & \text{sur } [\beta + \epsilon, \gamma - \epsilon] \\ h(x) = F_m\left(\frac{\gamma-x}{\epsilon}\right) & \text{sur } [\gamma - \epsilon, \gamma] \\ h(x) = 0 & \text{sur } [\gamma, 1] \end{cases}$$

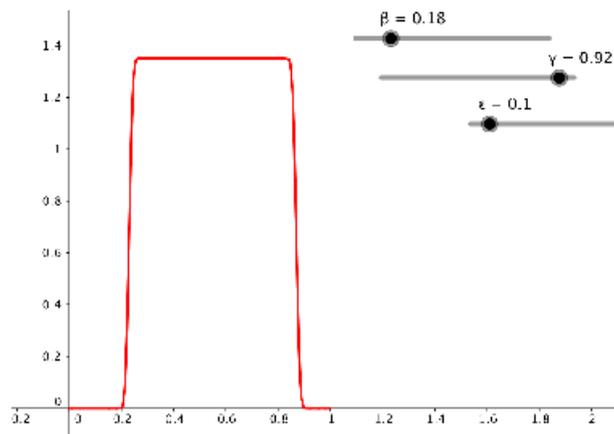
On appelle ensuite  $\mathcal{A}_{\beta,\gamma} = \int_0^1 h(t)dt$  et on pose  $F(x) = \frac{h(x)}{\mathcal{A}_{\beta,\gamma}}$ . On a, par définition de  $h$ ,

$$\mathcal{A}_{\beta,\gamma} = \gamma - \beta + \mathcal{O}(\epsilon)$$

et donc

$$\frac{1}{\mathcal{A}_{\beta,\gamma}} = \frac{1}{\gamma - \beta} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (2.25)$$

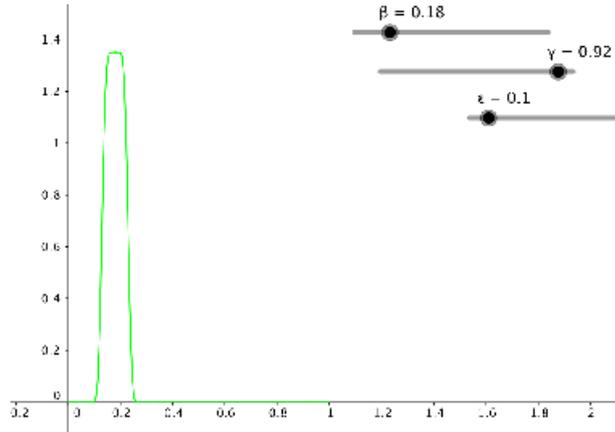
Ainsi l'intégrale de  $F$  sur  $[0, 1]$  vaut exactement 1 (voir graphique ci-dessous pour un exemple de fonction "plateau").



Et on construit une fonction "pic en  $\beta$ " de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_\beta(x) = 0 & \text{sur } [0, \beta - \epsilon] \\ F_\beta(x) = \frac{1}{\mathcal{A}_{\beta,\gamma}} F_m\left(\frac{x-\beta+\epsilon}{\epsilon}\right) & \text{sur } [\beta - \epsilon, \beta] \\ F_\beta(x) = \frac{1}{\mathcal{A}_{\beta,\gamma}} F_m\left(\frac{\beta+\epsilon-x}{\epsilon}\right) & \text{sur } [\beta, \beta + \epsilon] \\ F_\beta(x) = 0 & \text{sur } [\beta + \epsilon, 1]. \end{cases}$$

La fonction  $F_\gamma$  ("pic en  $\gamma$ ") sera définie de façon similaire. Ces deux fonctions sont donc des "pics" ayant la même hauteur que la fonction "plateau" définie précédemment et toutes ces fonctions sont dérivables sur  $[0, 1]$ . On peut voir un exemple de fonction "pic en  $\beta$ " ci-dessous.



## 2.5.2 Théorème pour une fonction continue d'intégrale 1

Soit  $F$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  telle que  $F(t) = 0$  pour  $0 \leq t \leq \beta$  et pour  $\gamma \leq t \leq 1$ . Où  $0 \leq \beta < \gamma < 1$ . Et telle que  $\int_0^1 F(t)dt = 1$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après ce qui précède, il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $\nu' \geq N$  on a  $|F - F_{\nu'}| < \varepsilon$ .

De plus, dans le théorème 1.2.1, pour tout  $\nu_1 \geq 1$ , on a  $|\rho + \theta| < \varepsilon$ .

Soit  $\nu' > N$ , alors  $F = F_{\nu'} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Et d'après le théorème 2.3.2,

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} f_{\nu_1, \nu' - \nu_1 + 2} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \\ &= \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} F_{\nu'} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \\ &= \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} 2\mathfrak{G}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}((\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}) \right). \end{aligned}$$

Or, d'une part,

$$\sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} = \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \frac{F\left(\frac{\nu_1-1}{\nu'}\right)}{\nu' + 1} \quad (2.26)$$

où

$$\left| \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \frac{F\left(\frac{\nu_1-1}{\nu'}\right)}{\nu' + 1} - \int_0^1 F(t)dt \right| \leq \frac{\sup_{t \in [0,1]} |F'(t)|}{\nu'} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu'}\right).$$

Dans le cas où la fonction considérée est à variations bornées.

Remarque : lorsqu'on considèrera la fonction "plateau" définie plus haut, le membre de droite sera égal à  $\frac{1}{a_m A_{\beta, \gamma, \varepsilon \nu'}}$  car  $F'(x) = \frac{1}{A_{\beta, \gamma, \varepsilon}} F'_m(x)$  et le maximum de  $F'_m(x)$  est  $F'_m(1/2) = 1/a_m$ .

Donc

$$\sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} = \left( \frac{\nu'}{\nu'+1} \right) \left( \int_0^1 F(t) dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu'}\right) \right) \quad (2.27)$$

donc

$$\sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu'}\right). \quad (2.28)$$

Et d'autre part d'après le lemme 2.3.3,

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} = \mathcal{O}(X).$$

On cherche à approximer

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} F\left(\frac{\log d_1}{\log n}\right) \\ &= \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{1 \leq d_1 \leq n \\ d_1 | n}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda\left(\frac{n}{d_1}\right)}{\log n} F\left(\frac{\log d_1}{\log n}\right) \end{aligned}$$

où  $F = F_{\nu'} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ , ce qui nous donne un deuxième terme égal à

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{1 \leq d_1 \leq n \\ d_1 | n}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda\left(\frac{n}{d_1}\right)}{\log n} F_{\nu'}\left(\frac{\log d_1}{\log n}\right) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} \mathcal{O}(\varepsilon).$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{1 \leq d_1 \leq n \\ d_1 | n}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda\left(\frac{n}{d_1}\right)}{\log n} F_{\nu'}\left(\frac{\log d_1}{\log n}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon X) \\ &+ \left(1 - \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1}\right) \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2). \end{aligned}$$

Et d'après le théorème 2.3.2, cette expression est égale à

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} 2\mathfrak{G}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}\left((\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}\right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon X) \\ &+ \left(1 - \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1}\right) \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$2\mathfrak{S}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}((\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}) \right) \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu'}\right) \right) \\ + \mathcal{O}(\varepsilon X) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu'}\right) \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2).$$

D'après le lemme 2.3.3

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) = \mathcal{O}(X) \quad (2.29)$$

Et  $\nu' = \nu_1 + \nu_2 - 2$  donc finalement notre théorème peut s'écrire

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $F$  une fonction continue et à variations bornées sur  $[0; 1]$  telle que  $F(t) = 0$  pour  $0 \leq t \leq \beta$  et pour  $\gamma \leq t \leq 1$ . Où  $0 \leq \beta < \gamma < 1$ , vérifiant l'hypothèse  $(H_{10})$  et telle que  $\int_0^1 F(t) dt = 1$ .*

*Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N'$  tel que pour tout  $\nu_1 + \nu_2 \geq N' + 2$ ,*

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} F\left(\frac{\log d_1}{\log n}\right) \\ = 2\mathfrak{S}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu_1 + \nu_2 - 2} + \varepsilon + (\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}\right) \right).$$

Et on en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.2.** *Soit  $F$  une fonction continue et à variations bornées sur  $[0; 1]$  telle que  $F(t) = 0$  pour  $0 \leq t \leq \beta$  et pour  $\gamma \leq t \leq 1$ . Où  $0 \leq \beta < \gamma < 1$ , vérifiant l'hypothèse  $(H_{10})$  et telle que  $\int_0^1 F(t) dt = \mathcal{A}$ .*

*Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N'$  tel que pour tout  $\nu_1 + \nu_2 \geq N' + 2$ ,*

$$\mathcal{A} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} F\left(\frac{\log d_1}{\log n}\right) \\ = 2\mathcal{A}\mathfrak{S}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu_1 + \nu_2 - 2} + \varepsilon + (\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}\right) \right).$$

Dans les calculs suivants, lors de l'utilisation de ce corollaire, on gardera les  $\sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} = \mathcal{A}(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\nu'}))$ .

### 2.5.3 Vers l'asymptotique final

On considère maintenant la fonction presque caractéristique de l'intervalle  $[\beta, \gamma]$ , qu'on note  $1_{[\beta, \gamma]}^*$ , qui est nulle sur  $[0, \beta]$  et sur  $[\gamma, 1]$  et constamment égale

à  $\frac{1}{\mathcal{A}_{\beta,\gamma}}$  sur  $[\beta, \gamma]$  (c'est pour cela qu'elle est "presque" caractéristique, sinon elle devrait valoir 1 sur  $[\beta, \gamma]$ ). On a alors  $|1_{[\beta,\gamma]} - F| \leq F_\beta + F_\gamma$  où  $F$ ,  $F_\beta$  et  $F_\gamma$  sont les fonctions "plateau" et "pics" définies précédemment.

On applique le théorème 2.3.2 et le corollaire 2.5.2 précédents aux fonctions  $F$  et  $G = F_\beta + F_\gamma$  de la façon suivante :

On appelle

$$\alpha'_{\nu_1, \nu'+1} = \frac{G\left(\frac{\nu_1-1}{\nu'}\right)}{\nu' + 1}$$

et  $G_{\nu'}$  définie de façon similaire à  $F_{\nu'}$ . On remarque que

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha'_{\nu_1, \nu'+1} &\leq \frac{\nu'}{\nu' + 1} \left( \int_0^1 (F_\beta + F_\gamma)(t) dt + \frac{\sup_{t \in [0,1]} |(F_\beta + F_\gamma)'(t)|}{\nu'} \right) \\ &= \frac{\nu'}{\nu' + 1} \left( \frac{4\epsilon}{\mathcal{A}_{\beta,\gamma}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu'}\right) \right) = \mathcal{O}\left(\epsilon + \frac{1}{\nu'}\right). \end{aligned}$$

Le théorème 2.3.2 s'appliquera comme suit à la fonction  $G_{\nu'}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha'_{\nu_1, \nu'+1} \sum_{n \leq X} \Lambda(n)\Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} G_{\nu'} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \\ = \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha'_{\nu_1, \nu'+1} 2\mathfrak{S}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}\left((\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}\right) \right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Et comme on l'a vu précédemment pour la fonction  $F_\nu$ , on aura de la même manière  $G = G_{\nu'} + \varepsilon$  à partir d'un certain  $N'$ , et de plus

$$1_{[\beta,\gamma]} = F + G + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.31}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n)\Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} 1_{[\beta,\gamma]} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \\ = \sum_{n \leq X} \Lambda(n)\Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} (F + G + \mathcal{O}(\epsilon)) \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \end{aligned}$$

ce qui est égal à

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{1 \leq d_1 \leq n \\ d_1 | n}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda\left(\frac{n}{d_1}\right)}{\log n} F_{\nu'} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon X) + \left(1 - \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1}\right) \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) \\
&+ \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} G_{\nu'} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon X) + \mathcal{O}(\varepsilon X).
\end{aligned}$$

En opérant de la même manière pour introduire les  $\alpha'_{\nu_1, \nu'+1}$ , les deux derniers termes deviennent :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha'_{\nu_1, \nu'+1} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{1 \leq d_1 \leq n \\ d_1 | n}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda\left(\frac{n}{d_1}\right)}{\log n} G_{\nu'} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \\
&+ \left(1 - \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} - \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha'_{\nu_1, \nu'+1}\right) \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \mathcal{O}((\varepsilon + \varepsilon')X).
\end{aligned}$$

Or

$$\left(1 - \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha_{\nu_1, \nu'+1} - \sum_{\nu_1=1}^{\nu'+1} \alpha'_{\nu_1, \nu'+1}\right) \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) = \mathcal{O}\left(\left(\varepsilon + \frac{1}{\nu'}\right)X\right). \quad (2.32)$$

Et après application du théorème 2.3.2 et du corollaire 2.5.2 aux fonctions  $F_{\nu'}$  et  $G_{\nu'}$  on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} 1_{[\beta, \gamma]} \left( \frac{\log d_1}{\log n} \right) \\
&= 2\mathfrak{G}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu_1 + \nu_2 - 2} + \varepsilon + \varepsilon' + (\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}\right) \right).
\end{aligned}$$

Et ainsi, d'après la définition de la fonction  $1_{[\beta, \gamma]}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \frac{1}{\mathcal{A}_{\beta, \gamma}} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} \\
&= 2\mathfrak{G}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu_1 + \nu_2 - 2} + \varepsilon + \varepsilon' + (\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}\right) \right). \quad (2.33)
\end{aligned}$$

## 2.5.4 Théorème final

On détermine maintenant les paramètres exacts pour un résultat pratique.

Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $\epsilon = \varepsilon$  dans les définitions de 2.5.1. Et et soit  $\nu = \max(N, \frac{1}{\varepsilon})$ , où  $N$  est tel que pour tout  $\nu' \geq N$ ,  $|F - F_{\nu'}| < \varepsilon$  dans le théorème (2.4.1).

Soit  $\delta$  tel que  $(\nu_1 + \nu_2)^{5(\nu_1 + \nu_2)} \delta^{1/2} < \varepsilon$  où  $\nu_1 + \nu_2 - 2 = \nu' > \nu$ . Autrement dit

$$\delta < \frac{\varepsilon^2}{(\nu + 2)^{10(\nu+2)}}. \quad (2.34)$$

En prenant  $X_0 = e^{\frac{10000}{\delta}}$  on a pour tout  $X \geq X_0$ ,

$$\frac{1}{\log X} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta > \frac{100}{\sqrt{\log X}}.$$

Remarque : La conjecture 2.1 reformulée hypothèse ( $H_{10}$ ) appliquée au  $\delta$  ci-dessus (et, on le rappelle,  $\theta = 5(\nu_1 + \nu_2)^2 + 5$ ) nous donne l'existence d'une constante  $A_0$  qui ne dépend plus que de  $\varepsilon$  et on en déduit  $A''$  qui reste un  $\mathcal{O}(1/\log X)$ .

Ainsi, dans l'égalité (2.33), le terme de droite devient  $2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$ .

En outre, d'après (2.25), on remplace  $\frac{1}{\mathcal{A}_{\beta,\gamma}}$  par  $\frac{1}{\gamma - \beta} + \mathcal{O}(\varepsilon)$  et on utilise le lemme 2.3.3 :

$$\mathcal{O}(\varepsilon) \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} = \mathcal{O}(\varepsilon X).$$

On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 2.5.3.** *Sous la conjecture 2.1, pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tous  $\beta \geq 0$  et  $\gamma > \beta$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \frac{1}{\gamma - \beta} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

En particulier, en prenant  $\beta = 0$  on obtient le théorème suivant :

**Théorème 2.5.4.** *Sous la conjecture 2.1, , pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\gamma$  où  $0 < \gamma < 1$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \frac{1}{\gamma} \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.5.** *Sous la conjecture 2.1, il existe une infinité de nombres  $n$  tels que  $n + 2$  est premier et  $n$  est le produit d'au plus deux puissances de nombres premiers dont l'une des deux est relativement petite, c'est à dire inférieure à une petite puissance de  $n$ , et il est possible d'en donner un asymptotique exact.*

## Cas particulier : Un théorème sur les nombres premiers jumeaux en variables non localisées

**Théorème 2.5.6.** *Sous la conjecture 2.1, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\Lambda(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)).$$

*Démonstration.* On applique le théorème 2.3.2 à  $f_{1,2}$  et  $f_{2,1}$ , par somme des deux asymptotiques et on simplifie par 2. En utilisant l'égalité

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n+2)\Lambda(n) + \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{d_1 d_2 = n} \frac{\Lambda(d_1)\Lambda(d_2)}{\log n} = 2\mathfrak{S}_2 X \left( 1 + \mathcal{O}(3^{15}\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log X}) \right)$$

avec  $\delta$  et  $X_0$  choisis comme précédemment. □

On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.7.** *Sous la conjecture 2.1, il existe une infinité de nombres  $n$  tels que  $n + 2$  est premier et  $n$  est le produit d'au plus deux puissances de nombres premiers, et il est possible d'en donner un asymptotique exact.*

## 2.6 Théorème sans puissances de nombres premiers

On veut maintenant se rapprocher du théorème des nombres premiers jumeaux en "retirant" les puissances de nombres premiers. On évalue donc leur contribution dans cette partie.

Posons  $\Lambda_1(n) = \log n$  si  $n$  est premier et 0 sinon. On veut montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n) \Lambda_1(n+2) + \frac{1}{\gamma - \beta} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1) \Lambda_1(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{G}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

On montre ci-dessous qu'en effet, la contribution des puissances de nombres premiers est un  $\mathcal{O}(X/\log X)$ .

En effet, on a d'une part

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n) \Lambda_1(n+2) &= \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) - \sum_{n \leq X} (\Lambda - \Lambda_1)(n) \Lambda(n+2) \\ &\quad - \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n) (\Lambda - \Lambda_1)(n+2) \end{aligned}$$

or

$$\sum_{n \leq X} (\Lambda - \Lambda_1)(n) \Lambda_1(n+2) \leq \log(X+2) \sum_{n \leq X} (\Lambda - \Lambda_1)(n)$$

et (voir TENENBAUM 1990 par exemple)

$$\sum_{n \leq X} (\Lambda - \Lambda_1)(n) = \psi(X) - \theta(X) = \mathcal{O}(\sqrt{X})$$

( $\psi$  et  $\theta$  sont ici les fonction de Tchebychev). Et de même,

$$\sum_{n \leq X} \Lambda_1(n) (\Lambda - \Lambda_1)(n+2) \leq \log(X) \sum_{n \leq X} (\Lambda - \Lambda_1)(n+2)$$

On trouve

$$\sum_{n \leq X} \Lambda_1(n) \Lambda_1(n+2) = \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda(n+2) + \mathcal{O}(\sqrt{X} \log X). \quad (2.35)$$

Pour l'autre terme, on utilise le lemme ci-dessous

**Lemme 2.6.1.**  *$a$  étant un nombre premier ou une puissance de nombre premier, le nombre de nombres premiers  $p$  inférieurs ou égaux à  $X$  tels que  $ap + 2$  est premier est inférieur ou égal à  $\mathfrak{C} \frac{X}{\log^2 X}$  où  $\mathfrak{C}$  est une constante indépendante de  $X$  et  $a$ . (En conséquence, ce nombre est un  $\mathcal{O}\left(\frac{X}{\log^2 X}\right)$ ).*

*Démonstration.* Il s'agit du théorème 3.12 de Heini HALBERSTAM et RICHERT 2011 appliqué au cas  $k = l = 1$  avec  $b = 2$  et  $a$  une puissance de nombre premier.

On remarque que  $\prod_{p > 2} \frac{p-1}{p^{2a}}$  ne comporte qu'un facteur pour tout  $a$  puissance de nombre premier, ce produit est donc  $\leq 2$ . La constante  $\mathfrak{C}$  est donc bien indépendante de  $X$  et  $a$ .  $\square$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1) \Lambda_1(d_2)}{\log n} &= \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} \\
&- \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2) - \Lambda_1(d_1) \Lambda_1(d_2)}{\log n} \\
&- \sum_{n \leq X} (\Lambda - \Lambda_1)(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1) \Lambda_1(d_2)}{\log n} \\
&= \sum_{n \leq X} \Lambda(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_1) \Lambda(d_2)}{\log n} + T_1 + T_2
\end{aligned}$$

Pour majorer  $|T_2|$ , on majore  $\Lambda_1(d_1)$  par  $\log X^\gamma = \gamma \log X$  et  $\Lambda_1(d_2)$  par  $\log X$ , et de plus, pour chaque  $n$ , le nombre de termes de la somme sur  $d_1$  et  $d_2$  est inférieur à deux fois le nombre de facteurs premiers de  $n$  (puisque  $d_1$  et  $d_2$  sont nécessairement premiers). Or d'après JEAN-LOUIS NICOLAS 1981, le nombre de facteurs premiers de  $n$  est inférieur à

$$\frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1)) \leq 2 \frac{\log n}{\log \log n}$$

On trouve donc

$$|T_2| \leq \sum_{n \leq X} \frac{4 \log n}{\log \log n} \times \frac{\gamma \log^2 X}{\log n} (\Lambda - \Lambda_1)(n+2)$$

Et on a vu précédemment que  $\sum_{n \leq X} (\Lambda - \Lambda_1)(n) = \mathcal{O}(\sqrt{X})$ . Ainsi

$$|T_2| \leq \mathcal{O}(\sqrt{X} \log^2 X) \quad (2.36)$$

Pour majorer  $|T_1|$ , on remarque que

$$\Lambda(d_1) \Lambda(d_2) - \Lambda_1(d_1) \Lambda_1(d_2) = \Lambda(d_2) (\Lambda - \Lambda_1)(d_1) + \Lambda_1(d_1) (\Lambda - \Lambda_1)(d_2)$$

et on calcule

$$\sum_{X < n \leq 2X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_2) (\Lambda - \Lambda_1)(d_1)}{\log n} \quad (2.37)$$

Cette somme est inférieure ou égale à 2 fois la somme :

$$\begin{aligned} & \sum_{X < n \leq 2X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ d_1 \leq d_2}} \frac{\Lambda(d_2)(\Lambda - \Lambda_1)(d_1)}{\log n} \\ & \leq \frac{1}{\log X} \sum_{d_1 \leq \sqrt{X}} (\Lambda - \Lambda_1)(d_1) \sum_{\substack{X < n \leq 2X \\ n = d_1 d_2}} \Lambda_1(n+2) \Lambda(d_2) \end{aligned}$$

On a

$$\Lambda(d_2) = \Lambda_1(d_2) + (\Lambda - \Lambda_1)(d_2) \quad (2.38)$$

La contribution du deuxième terme (différence  $\Lambda - \Lambda_1$ ) étant inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log X} \sum_{d_1 \leq \sqrt{X}} (\Lambda - \Lambda_1)(d_1) \sum_{\substack{\frac{X}{d_1} < d_2 \leq \frac{2X}{d_1}}} (\Lambda - \Lambda_1)(d_2) \log(2X+2) \\ & \ll \frac{1}{\log X} \sum_{d_1 \leq \sqrt{X}} (\Lambda - \Lambda_1)(d_1) \sqrt{\frac{2X}{d_1}} \log(2X+2) \\ & \ll \frac{1}{\log X} \sqrt{2X} \log(2X+2) \sqrt{\sqrt{X}} = \mathcal{O}(X^{3/4}) \end{aligned}$$

On cherche donc à évaluer

$$\frac{1}{\log X} \sum_{d_1 \leq \sqrt{X}} (\Lambda - \Lambda_1)(d_1) \sum_{\substack{X < n \leq 2X \\ n = d_1 d_2}} \Lambda_1(n+2) \Lambda_1(d_2)$$

Qui est inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log X} \sum_{d_1 \leq \sqrt{X}} (\Lambda - \Lambda_1)(d_1) \sum_{\substack{p \in \left[ \frac{X}{d_1}, \frac{2X}{d_1} \right] \\ p \text{ premier} \\ d_1 p + 2 \text{ premier}}} \log(X+2) \log X \\ & \leq \frac{1}{\log X} \sum_{d_1 \leq \sqrt{X}} (\Lambda - \Lambda_1)(d_1) \log(X+2) \log X \times \mathcal{O}\left(\frac{X/d_1}{\log^2(X/d_1)}\right) \end{aligned}$$

d'après le lemme (2.6.1) appliqué à  $a = d_1$ . Et donc on a un terme

$$\leq \sum_{d_1 \leq \sqrt{X}} \frac{(\Lambda - \Lambda_1)(d_1)}{d_1} \mathfrak{C}' \frac{X}{\log X}$$

Où  $\mathfrak{C}'$  est une constante indépendante de  $d_1$ .

En outre la série  $\sum \frac{(\Lambda - \Lambda_1)(d_1)}{d_1}$  converge donc les sommes partielles sont bornées.

On pose

$$\mathfrak{e}'' = \sum_{n \geq 1} \frac{(\Lambda - \Lambda_1)(n)}{n} \mathfrak{e}'$$

on a donc

$$\sum_{X < n \leq 2X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_2)(\Lambda - \Lambda_1)(d_1)}{\log n} \leq \mathfrak{e}'' \frac{X}{\log X} \quad (2.39)$$

Où  $\mathfrak{e}''$  est indépendante de  $X$ .

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_2)(\Lambda - \Lambda_1)(d_1)}{\log n} &= \sum_{\frac{X}{2} < n \leq X} \dots + \sum_{\frac{X}{4} < n \leq \frac{X}{2}} \dots + \dots \\ &\leq \mathfrak{e}'' \frac{X}{2 \log(X/2)} + \mathfrak{e}'' \frac{X}{4 \log(X/4)} + \dots = \mathfrak{e}'' X \sum_{k < \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k \log \frac{X}{2^k}} \end{aligned}$$

Or pour tout  $k \leq \frac{\log X}{2 \log 2}$ ,  $2^k \log(X/2^k) \geq 2^{k-1} \log X$  donc on divise cette dernière somme en deux parties :

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k \log \frac{X}{2^k}} &= \sum_{k < \frac{\log X}{2 \log 2}} \frac{1}{2^k \log \frac{X}{2^k}} + \sum_{\frac{\log X}{2 \log 2} \leq k < \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k \log \frac{X}{2^k}} \\ &\leq \frac{1}{\log X} \sum_{1 \leq k \leq \frac{\log X}{2 \log 2}} \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{\log \sqrt{X}} \sum_{\frac{\log X}{2 \log 2} \leq k < \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \leq \frac{5}{\log X} \end{aligned}$$

Et donc

$$\sum_{X < n \leq 2X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda(d_2)(\Lambda - \Lambda_1)(d_1)}{\log n} \leq \frac{10\mathfrak{e}'' X}{\log X} \quad (2.40)$$

On aura de la même manière

$$\sum_{X < n \leq 2X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1)(\Lambda - \Lambda_1)(d_2)}{\log n} \leq \frac{10\mathfrak{e}'' X}{\log X} \quad (2.41)$$

Et au final

$$|T_1| \leq \frac{20\mathfrak{e}'' X}{\log X} = \mathcal{O}\left(\frac{X}{\log X}\right) \quad (2.42)$$

On peut donc énoncer le théorème sans les puissances de nombres premiers :

**Théorème 2.6.2.** *Soit  $\Lambda_1(n) = \log n$  si  $n$  est premier et 0 sinon. Sous la conjecture*

2.1, pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tous  $\beta \geq 0$  et  $\gamma > \beta$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n) \Lambda_1(n+2) + \frac{1}{\gamma - \beta} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ n^\beta \leq d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1) \Lambda_1(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

Et en prenant  $\beta = 0$  on obtient le théorème suivant :

**Théorème 2.6.3.** *Sous la conjecture 2.1, , pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\gamma$  où  $0 < \gamma < 1$ , il existe un réel  $X_0$  tel que pour tout  $X \geq X_0$ ,*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n) \Lambda_1(n+2) + \frac{1}{\gamma} \sum_{n \leq X} \Lambda_1(n+2) \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ d_1 \leq n^\gamma}} \frac{\Lambda_1(d_1) \Lambda_1(d_2)}{\log n} \\ = 2\mathfrak{S}_2 X (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

On rappelle que pour ces deux théorème,  $X_0$  est choisi tel que  $\frac{1}{\log X} < \varepsilon$ .

# 3 Un résultat plus faible obtenu sans crible préliminaire

*Ce chapitre montre comment une méthode plus simple de calcul d'asymptotique est nettement moins intéressante puisque nous avons nécessité une hypothèse plus forte (et fausse) de type Elliot-Halberstam "faible" et que l'asymptotique obtenu est moins bon que celui obtenu avec un crible préliminaire. Néanmoins, son intérêt, en plus de mettre en avant l'efficacité du crible, est qu'elle comporte de nombreux calculs de sommations, notamment impliquant la fonction de Möbius. Ces calculs sont volontairement très détaillés et donc utilisables par un lecteur débutant.*

## 3.1 Introduction

La somme

$$S = \sum_{n \leq X} \left( \Lambda \log^2 + (\Lambda \star \Lambda) \log + \Lambda \star (\Lambda \log) + \Lambda \star \Lambda \star \Lambda \right) (n) \Lambda(n+2)$$

nous intéresse parce qu'elle a pour support les entiers  $n$  ayant au plus 3 facteurs premiers et tels que  $n+2$  est une puissance d'un nombre premier, ainsi  $n$  est nécessairement impair ou  $n=2$ , et elle est égale à (formule de Selberg, voir FRIEDLANDER et IWANIEC 1978, lemme 1) :

$$S = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} (\mu \star \log^3)(n) \Lambda(n+2) + \left( \Lambda \log^2 + (\Lambda \star \Lambda) \log + \Lambda \star (\Lambda \log) + \Lambda \star \Lambda \star \Lambda \right) (2) \Lambda(4)$$

c'est à dire

$$S = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} (\mu \star \log^3)(n) \Lambda(n+2) + 3 \log^2 2 + 3 \log^3 2 + \log^4 2.$$

Nous en calculons un asymptotique sous la condition suivante :

**Conjecture 3.1.1.** *Il existe un entier positif  $B$  et un réel  $X_0$  tels que pour tout*

$X \geq X_0$

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \max_{y \leq X} \left| \psi(y; d, 2) - \frac{y}{\varphi(d)} \right| \ll \frac{X}{(\log X)^2}. \quad (C)$$

Remarque : elle est à rapprocher de la conjecture faible d'Elliot-Halberstam avec ici encore une seule classe de congruence. Il a été prouvé qu'elle ne peut pas avoir lieu.

Notre théorème s'énonce donc ainsi :

**Théorème 3.1.2.** *Sous la condition (C), on a*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \left( \Lambda \log^2 + (\Lambda \star \Lambda) \log + \Lambda \star (\Lambda \log) + \Lambda \star \Lambda \star \Lambda \right) (n) \Lambda(n+2) \\ = 6\mathfrak{S}_2 X \log^2 X + o(X \log^2 X) \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{S}_2$  est la constante des nombres premiers jumeaux.

On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1.3.** *Sous la condition qu'il existe un entier positif  $B$  tel que*

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \max_{y \leq X} \left| \psi(y; d, 2) - \frac{y}{\varphi(d)} \right| \leq \frac{X}{(\log X)^2}$$

*il existe une infinité de nombres  $n$  comportant au plus 3 facteurs premiers tels que  $n+2$  est un nombre premier. Et il est possible d'en donner un asymptotique exact.*

Nous calculons dans cette partie beaucoup de sommes, notamment des  $\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n)}{n} \log^k n$  permettant ensuite d'obtenir des  $\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^k n$ . Ces sommes sont calculées successivement pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tout  $n \leq X$  et sur les entiers impairs.

Dans cet objectif, nous avons eu besoin de définir une fonction  $h_0(n) = \frac{(-1)^{\omega(n)}}{\varphi(n)f_2(n)}$  qui est en fait un élément correctif de l'approximation de  $\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}$  par  $\frac{\mu(n)}{n}$ . On trouve  $h_0$  en appliquant la méthode de convolution qui est décrite dans la partie 3.4.

## 3.2 Résultats préliminaires

### 3.2.1 Des sommes partielles utiles

Ces deux résultats nous serviront à établir quelques lemmes suivants sur des sommes impliquant la fonction de Möbius restreintes aux entiers impairs.

**Lemme 3.2.1.** Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 + \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

*Démonstration.* Pour tout réel  $x \neq 1$  non nul, on a

$$\sum_{k=0}^n kx^k = x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = xP(x).$$

Or  $P(x) = Q'(x)$  où  $Q(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ , ainsi

$$\sum_{k=0}^n kx^k = xQ'(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

et on applique ce résultat à  $x = \frac{1}{2}$ . □

**Corollaire 3.2.2.** Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right).$$

**Lemme 3.2.3.** Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}.$$

*Démonstration.* Avec les notations précédentes, pour tout réel  $x \neq 1$  non nul, on a

$$\sum_{k=0}^n k^2 x^k = x^2 \sum_{k=1}^n k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=1}^n kx^k = x^2 Q''(x) + \sum_{k=0}^n kx^k$$

où  $Q''(x)$  est égal à

$$\frac{(n^2 - n)x^{n+2} + (-3n^2 + n + 2)x^{n+1} + (3n^2 + n - 2)x^n - (n^2 + n)x^{n-1} - 2x + 2}{(1-x)^4}.$$

On multiplie par  $x^2$  et on applique le résultat à  $x = \frac{1}{2}$ . On trouve

$$\frac{n^2 - n}{2^n} + \frac{-3n^2 + n + 2}{2^{n-1}} + \frac{3n^2 + n - 2}{2^{n-2}} - \frac{n^2 + n}{2^{n-3}} - 2 \times 2 + 2 \times 4$$

auquel on ajoute

$$2 + \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n-1}},$$

et ainsi on trouve

$$6 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{-3n^2 + 1}{2^{n-1}} + \frac{3n^2 + n - 2}{2^{n-2}} - \frac{n^2 + n}{2^{n-3}} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}.$$

□

**Corollaire 3.2.4.** *Pour tout  $n \geq 1$ ,*

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2^k} = 6 + \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{2^n}\right).$$

## 3.3 Sommes partielles avec la fonction de Möbius

### 3.3.1 Valeurs des $\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log^k n}{n}$

**Lemme 3.3.1.**

$$\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1 \quad , \quad \sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} = -2\gamma$$

et  $\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log^3 n}{n} = -6(\gamma_1 + \gamma^2)$

où  $\gamma = 0,577\dots$  est la constante d'Euler et  $\gamma_1 = -0,072\dots$  est la deuxième constante de Stieltjes, voir FINCH 2003.

*Démonstration.* Rappelons que le théorème des nombres premiers équivaut à

$$\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1$$

mais pour montrer que  $\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1$  on peut également reconnaître au signe près la valeur en 1 de la dérivée de la série de Dirichlet

$$\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

donc

$$\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log n}{n^s} = -\left(\frac{1}{\zeta}\right)'(s).$$

Et plus généralement, pour tout  $k \geq 1$

$$\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log^k n}{n^s} = (-1)^k \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{(k)}(s).$$

Si on donne un développement limité de  $1/\zeta(s)$  en 1, ou de  $\frac{1}{\zeta(s+1)}$  en 0, on trouve

$$\frac{1}{\zeta(s+1)} = s - \gamma s^2 + (\gamma_1 + \gamma^2)s^3 + o(s^3).$$

Et ainsi on en déduit :

$$\frac{1}{\zeta(1)} = 0 \quad \left(\frac{1}{\zeta}\right)'(1) = 1 \quad \left(\frac{1}{\zeta}\right)''(1) = -2\gamma \quad \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{(3)}(1) = 6(\gamma_1 + \gamma^2) \quad (3.1)$$

donc d'après les propriétés de dérivation des séries de Dirichlet on en déduit :

$$\sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1 \quad \sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} = -2\gamma \quad \sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n) \log^3 n}{n} = -6(\gamma_1 + \gamma^2).$$

□

### 3.3.2 Sommes partielles des $\frac{\mu(n) \log^k n}{n}$ où $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

**Lemme 3.3.2.** *Pour tout réel  $X \geq 1$  et pour tout entier strictement positif  $A$ ,*

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$$

*Démonstration.* Soit  $A > 0$ , on sait que pour tout  $X > 1$  on a

$$\sum_{n \leq X} \mu(n) = \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\log X)^{A+2}}\right)$$

En effet, on trouve dans LANDAU 1955 qu'il existe une constante strictement positive  $a$  telle que  $\sum_{n \leq X} \mu(n) = \mathcal{O}\left(X \exp(-a\sqrt{\log X \log \log X})\right)$  (et de façon élémentaire dans LAVRIK et SOBIROV 1973, on a  $\sum_{n \leq X} \mu(n) = \mathcal{O}\left(X \exp(-(\log X)^{\frac{1}{7}} (\log \log X)^{-2})\right)$  pour un  $\log \log X \geq 100$ ). Ces deux majorations nous permettent d'en déduire que pour tout  $A$  on a  $\sum_{n \leq X} \mu(n) = \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\log X)^A}\right)$ .

Et donc

$$\sum_{n \leq X} \mu(n) = \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\log X + 1)^{A+1}}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n} &= \sum_{n \leq X} \mu(n) \left( \int_n^X \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{X} \right) \\ &= \frac{1}{X} \sum_{n \leq X} \mu(n) + \int_1^X \frac{1}{t^2} \sum_{n \leq t} \mu(n) dt.\end{aligned}$$

Ainsi, le premier terme est un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^{A+1}}\right)$  et en ce qui concerne le second terme :

$$\int_1^X \frac{1}{t^2} \sum_{n \leq t} \mu(n) dt = \int_1^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt - \int_X^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt$$

or

$$\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt = \frac{1}{\zeta(1)} = 0 \quad (3.2)$$

En effet, pour tout  $s > 1$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(s)} &= \sum_{1 \leq n} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{1 \leq n} \mu(n) \int_n^\infty \frac{s}{t^{s+1}} dt \\ &= s \int_1^\infty \frac{1}{t^{s+1}} M(t) dt\end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s > 1}} \frac{1}{\zeta(s)} = 0 = \int_1^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt$$

et

$$\left| \int_X^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_X^\infty \frac{t}{t^2 (\log t)^{A+1}} dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

Ainsi,  $\sum_{n \leq X} \mu(n)/n = \mathcal{O}\left((\log X + 1)^{-A}\right)$ .

□

**Lemme 3.3.3.** *Pour tout réel  $X > 1$  et pour tout entier naturel  $A > 0$*

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^A}\right),$$

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} = -2\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^A}\right),$$

et

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log^3 n}{n} = -6(\gamma_1 + \gamma^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^A}\right).$$

*Démonstration.* Soit  $A > 0$ , on a

$$M(X) = \sum_{n \leq X} \mu(n) \ll \frac{X}{(\log X)^A} \quad (3.3)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log n}{n} &= \sum_{n \leq X} \mu(n) \int_n^X \frac{\log t - 1}{t^2} dt + M(X) \frac{\log X}{X} \\ &= \int_1^X \sum_{n \leq t} \mu(n) \frac{\log t - 1}{t^2} dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^{A-1}}\right) \\ &= \int_1^X M(t) \frac{\log t - 1}{t^2} dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^{A-1}}\right). \end{aligned}$$

Et de la même manière, on a

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log^k n}{n} = \int_1^X M(t) \frac{\log^k t - k \log^{k-1} t}{t^2} dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^{A-k}}\right).$$

Or  $\int_1^{+\infty} M(t) \frac{\log t - 1}{t^2} dt$  converge absolument car  $|M(t)| < \frac{t}{(\log t)^A}$ . Donc en réajustant ce  $A$  de (3.3) par  $A + 2$ , on a

$$\int_1^X M(t) \frac{\log t - 1}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} M(t) \frac{\log t - 1}{t^2} dt - \int_X^{+\infty} M(t) \frac{\log t - 1}{t^2} dt$$

où  $\int_1^{+\infty} M(t) \frac{\log t - 1}{t^2} dt$  est une constante :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \sum_{n \leq t} \mu(n) \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) dt &= \sum_{1 \leq n} \mu(n) \int_n^{+\infty} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) dt \\ &= \sum_{1 \leq n} \mu(n) \frac{\log n}{n} = -1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \int_X^{+\infty} M(t) \frac{\log t - 1}{t^2} dt \right| &< \int_X^{+\infty} \frac{t}{(\log t)^{A+2}} \frac{\log t - 1}{t^2} dt = \mathcal{O}\left(\int_X^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^{A+1}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^A}\right). \end{aligned}$$

On trouve donc que

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^A}\right).$$

De la même manière, on a

$$\int_X^{+\infty} M(t) \frac{\log^k t - k \log^{k-1} t}{t^2} dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^{A-1-k}}\right)$$

et en ajustant ici aussi le  $A$  de la majoration (3.3) et en utilisant le lemme 3.3.1 pour ces sommes, on trouve  $\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} = -2\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^A}\right)$  et  $\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log^3 n}{n} = -6(\gamma_1 + \gamma^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X)^A}\right)$ . □

### 3.3.3 Mêmes sommes partielles restreintes aux entiers impairs

**Lemme 3.3.4.** *Soit  $A > 1$ . On a*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

*Démonstration.* Tout d'abord, remarquons que

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} + \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2) \neq 1}} \frac{\mu(n)}{n} = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n}$$

or

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2) \neq 1}} \frac{\mu(n)}{n} = \sum_{\substack{k \leq X/2 \\ (k,2)=1}} \frac{\mu(2k)}{2k} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n \leq X/2 \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n}$$

En effet les  $\mu(2k)$  sont nuls pour les  $k$  pairs.

Donc

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \leq X/2 \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n}. \quad (3.4)$$

D'après le lemme précédent 3.3.2 appliqué à  $A + 2$ , il existe une constante  $K$  strictement positive telle que

$$\left| \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq \frac{K}{(\log X + 1)^{A+1}} \quad (3.5)$$

donc

$$\left| \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq \frac{K}{(\log X + 1)^{A+1}} + \frac{1}{2} \left| \sum_{\substack{n \leq X/2 \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \right|$$

avec

$$\left| \sum_{\substack{n \leq X/2 \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq \frac{K}{(\log(X/2) + 1)^{A+1}} + \frac{1}{2} \left| \sum_{\substack{n \leq X/4 \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \right|.$$

Donc on aura de proche en proche

$$\left| \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq \frac{K}{(\log X + 1)^{A+1}} + \frac{1}{2} \left( \frac{K}{(\log(X/2) + 1)^{A+1}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\log(X/4) + 1)^{A+1}} + \frac{1}{2} \dots \right) \right)$$

donc

$$\left| \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq K \sum_{k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \frac{1}{(\log(X/2^k) + 1)^{A+1}}. \quad (3.6)$$

Or chaque terme de cette somme est inférieur à  $\frac{1}{(\log X + 1)^{A+1}}$  (on peut étudier à  $X$  fixé les variations de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x} \frac{1}{(\log(X/x) + 1)^{A+1}}$  pour constater qu'elle est strictement décroissante), et il y a  $\left\lceil \frac{\log X}{\log 2} \right\rceil + 1$  termes. Donc

$$\left| \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq \left( \left\lceil \frac{\log X}{\log 2} \right\rceil + 1 \right) \frac{K}{(\log X + 1)^{A+1}} \leq \frac{K'}{(\log X + 1)^A}.$$

□

**Lemme 3.3.5.** *Pour tout réel  $X > 1$  et pour tout entier naturel  $A > 0$*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -2 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{(\log X + 1)^A} \right)$$

*Démonstration.* Le principe de la démonstration est un peu différent de celle du lemme 3.3.4 pour lequel on aurait pu faire la même.

On cherche à calculer

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \log n = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n} \log n \times 1_{(n,2)=1}(n) \quad (3.7)$$

où  $1_{(n,2)=1}$  est l'indicatrice des nombres impairs.

Or la fonction  $f_1$  multiplicative et définie par

$$\begin{cases} f_1(1) = 1 \\ f_1(p) = 0 & \text{pour tout } p \neq 2 \\ f_1(2^k) = 1 & \text{pour tout } k \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

est telle que  $\mu \times 1_{(n,2)=1} = f_1 \star \mu$ . Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier rapidement.

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \log n &= \sum_{n \leq X} \frac{(f_1 \star \mu)(n)}{n} \log n = \sum_{\ell m \leq X} \frac{f_1(\ell) \mu(m)}{\ell m} \log(\ell m) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m)}{m} \log(2^k m) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k \log 2}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m)}{m} + \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m) \log m}{m} \end{aligned}$$

et d'après le lemme 3.3.2,  $\sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m)}{m}$  est un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/2^k)+1)^{A+2}}\right)$ , et d'après le lemme 3.3.3,  $\sum_{n \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/2^k)+1)^{A+1}}\right)$ . Pour tout  $k$ ,  $\frac{1}{2^k} \frac{1}{(\log(X/2^k)+1)^{A+2}} \leq \frac{1}{(\log X+1)^{A+2}}$  (idem avec  $A+1$ ) et il y a  $\left\lfloor \frac{\log X}{\log 2} \right\rfloor + 1$  termes dans les sommes. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \log n &= \log 2 \left( \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} k \right) \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^{A+2}}\right) \\ &\quad - \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} + \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^{A+1}}\right) \\ &= \log 2 \frac{\left(\left\lfloor \frac{\log X}{\log 2} \right\rfloor + 1\right) \left\lfloor \frac{\log X}{\log 2} \right\rfloor}{2} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^{A+2}}\right) \\ &\quad - 2 \left(1 - \frac{1}{2^{\left\lfloor \frac{\log X}{\log 2} \right\rfloor + 1}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right) \\ &= -2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right). \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.3.6.** *Pour tout réel  $X > 1$  et pour tout entier naturel  $A > 0$*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} = -4 \log 2 - 4\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

*Démonstration.* On utilise le même principe que précédemment avec la fonction  $f_1$  définie ci-dessus.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} &= \sum_{\ell m \leq X} \frac{f_1(\ell) \mu(m)}{\ell m} \log^2(\ell m) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m)}{m} (\log^2 2^k + 2 \log 2^k \log m + \log^2 m) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k^2 \log^2 2}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m)}{m} + 2 \log 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m) \log m}{m} \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m) \log^2 m}{m}. \end{aligned}$$

Ici encore, d'après le lemme 3.3.2 et le lemme 3.3.3, en ajustant les puissances  $A$ , et sachant que pour tout  $k$  et tout  $A > 0$ ,  $\frac{1}{2^k (\log(X/2^k) + 1)^A} \leq \frac{1}{(\log X + 1)^A}$ , on obtient pour le premier terme :

$$\log^2 2 \left( \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} k^2 \right) \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^{A+3}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right),$$

pour le second terme :

$$2 \log 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k}{2^k} \left( -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/2^k) + 1)^{A+2}}\right) \right)$$

ce qui d'après le lemme 3.2.1 est égal à

$$-4 \log 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

Et enfin le dernier terme est :

$$-2\gamma \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) = -4\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

□

**Lemme 3.3.7.** *Pour tout réel  $X > 1$  et pour tout entier naturel  $A > 0$*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n) \log^3 n}{n} = -18 \log^2 2 - 12\gamma \log 2 - 12(\gamma_1 + \gamma^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

*Démonstration.* On reprend rapidement la démonstration précédente toujours avec la fonction  $f_1$  et en utilisant les lemmes 3.3.2 et 3.3.3, en ajustant les puissances  $A$ , et sachant que pour tout  $k$  et tout  $A > 0$ ,  $\frac{1}{2^k (\log(X/2^k)+1)^A} \leq \frac{1}{(\log X+1)^A}$ . On obtient cette fois :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n) \log^3 n}{n} &= \log^3 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k^3}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m)}{m} + 3 \log^2 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k^2}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m) \log m}{m} \\ &+ 3 \log 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m) \log^2 m}{m} + \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \sum_{m \leq \frac{X}{2^k}} \frac{\mu(m) \log^3 m}{m}. \end{aligned}$$

Le premier terme est un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right)$  (il fallait prendre  $A+4$  dans le lemme 3.3.2), et en utilisant les lemmes 3.2.1 et 3.2.3, on trouve que la somme des 3 termes suivants est :

$$\begin{aligned} &3 \log^2 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k^2}{2^k} \left( -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/2^k) + 1)^{A+3}}\right) \right) \\ &+ 3 \log 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{k}{2^k} \left( -2\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/2^k) + 1)^{A+2}}\right) \right) \\ &+ \sum_{0 \leq k \leq \frac{\log X}{\log 2}} \frac{1}{2^k} \left( -6(\gamma_1 + \gamma^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/2^k) + 1)^{A+1}}\right) \right) \end{aligned}$$

dont le résultat est

$$-18 \log^2 2 - 12\gamma \log 2 - 12(\gamma_1 + \gamma^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

□

### 3.4 Définition de $h_0$ , propriétés

**Définition 3.4.1.** *On définit la fonction multiplicative  $h_0$  par  $h_0(1) = 1$  et pour tout  $p$  premier et tout entier  $\alpha \geq 1$ ,  $h_0(p^\alpha) = -\frac{1}{p^\alpha(p-1)} = -\frac{1}{p\varphi(p^\alpha)}$ .*

Autrement dit, pour tout  $n$  on a

$$h_0(n) = \frac{(-1)^{\omega(n)}}{\varphi(n)f_2(n)}$$

où

$$f_2(n) = \prod_{p^\alpha | n} p$$

$f_2$  est la fonction qui enlève l'ordre de multiplicité des facteurs premiers. Et  $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ .

**Lemme 3.4.2.** Si  $f_0(n) = \frac{\mu(n)}{\varphi(n)}$  et  $g_0(n) = \frac{\mu(n)}{n}$  alors  $f_0 = g_0 \star h_0$  où  $h_0$  est la fonction définie précédemment.

*Démonstration.* On utilise pour cela la méthode de convolution qui est explicitée dans l'article OLIVIER RAMARÉ 2012 et dans le chapitre 4, dont le principe est le suivant :

On cherche l'ordre moyen ou la somme partielle d'une fonction multiplicative  $f$ . Pour cela on exprime sa série de Dirichlet  $D(f, s)$  comme le produit de deux séries de Dirichlet  $D(g, s)D(h, s)$  où  $g$  est une fonction dont l'ordre moyen est plus facile à calculer et "proche" de  $f$ , tandis que  $h$  est une fonction "plus petite", perçue comme une perturbation.  $g$  et  $h$  sont également des fonctions multiplicatives. Par le théorème d'unicité de la série de Dirichlet et les propriétés de calcul, on en déduit que  $f = g \star h$  et on utilise l'ordre moyen de  $g$  pour trouver celui de  $f$ .

Dans notre cas, on a  $f_0(n) = \frac{\mu(n)}{\varphi(n)}$  et  $g_0(n) = \frac{\mu(n)}{n}$ , on va chercher à expliciter la fonction  $h_0$  en exprimant les séries de Dirichlet comme des produits eulériens :

$$\begin{aligned} D(f_0, s) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)n^s} = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(p^k)}{\varphi(p^k)p^{ks}} \right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{(p-1)p^s} \right). \end{aligned}$$

Car pour tout  $k \geq 2$ ,  $\mu(p^k) = 0$ .

Et d'autre part,

$$D(g_0, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^{s+1}} = \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{p^{s+1}} \right)$$

ainsi,

$$D(f_0, s) = D(g_0, s) \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{(p-1)p^s} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s+1}}} \right).$$

On cherche donc à identifier

$$\prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)p^s}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s+1}}}\right) = D(h_0, s) = \prod_{p \geq 2} \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{h_0(p^k)}{p^{ks}}\right). \quad (3.9)$$

On a

$$\begin{aligned} \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)p^s}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s+1}}}\right) &= \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{(1 - \frac{1}{p})p^{s+1}}\right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{(s+1)k}}\right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k}\right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{(s+1)k}}\right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{k+s}}\right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{(s+1)k}}\right). \end{aligned}$$

On développe et on arrange ce produit pour obtenir

$$\begin{aligned} &= \prod_{p \geq 2} \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{k+s}} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{(s+1)k}} - \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k' \geq 1}} \frac{1}{p^{k+s+(s+1)k'}}\right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{1}{p^s} \left(-\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p^{2s}} \left(\frac{1}{p^2} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{k+1}}\right) + \frac{1}{p^{3s}} \left(\frac{1}{p^3} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{k+2}}\right) + \dots\right). \end{aligned}$$

On retrouve donc la fonction  $h_0$  multiplicative par sa définition sur les puissances des nombres premiers :

$$\begin{cases} h_0(1) = 1 \\ h_0(p) = -\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p} = -\frac{1}{p(p-1)} \\ h_0(p^\alpha) = \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha+k-1}} = \frac{1}{p^\alpha} - \frac{1}{p^{\alpha-1}} \frac{1}{p-1} \quad \text{pour } \alpha \geq 2 \end{cases} \quad (3.10)$$

On a bien  $h_0(1) = 1$  et pour tout  $p$  premier et tout entier  $\alpha \geq 1$ ,  $h_0(p^\alpha) = -\frac{1}{p^\alpha(p-1)} = -\frac{1}{p^\alpha \varphi(p^\alpha)}$ .

Remarque : on s'attend à trouver une abscisse de convergence de  $D(h_0, s)$  strictement inférieure à celle de  $D(f_0, s)$  (qui doit être la même que  $D(g_0, s)$ ). De fait, l'abscisse de convergence de  $D(g_0, s)$  est 1 alors que celle d'absolue convergence de  $D(h_0, s)$  est  $-1$ . En effet, si on considère le cas  $s$  réel uniquement,

$$\sum_{\alpha \geq 1} \frac{|h_0(p^\alpha)|}{p^{\alpha s}} = \mathcal{O} \left(1 + \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha s + s + 1}}\right)$$

or

$$1 + \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha s + s + 1}} = 1 + \frac{1}{p^{(s+1)+1}} \sum_{\beta \geq 0} \frac{1}{p^{\beta(s+1)}} = \text{Ctse} \times \left(1 + \frac{1}{p^{s+2}}\right).$$

On a  $D(|h_0|, s)$  convergente pour tout  $s + 2 > 1$  donc  $s > -1$ .

□

**Lemme 3.4.3.**  $h_0$  étant la fonction définie précédemment, on a

$$\sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ (\ell, 2) = 1}} h_0(\ell) = \mathfrak{S}_2$$

(où  $\mathfrak{S}_2$  est la constante des nombres premiers jumeaux).

*Démonstration.* On calcule  $\sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell)$  à l'aide d'un produit eulérien. En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) &= \prod_{p \geq 2} \left(1 + \sum_{k \geq 1} h_0(p^k)\right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k(p-1)}\right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p-1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) = \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0$$

et

$$\sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ (\ell, 2) = 1}} h_0(\ell) = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = \mathfrak{S}_2.$$

□

**Lemme 3.4.4.** Pour toute fonction  $h$  dont la série de Dirichlet est absolument convergente d'abscisse de convergence  $-1$ , c'est à dire  $D(|h|, s)$  converge pour tout  $s > -1$ , on a pour tout  $X > 1$

$$\sum_{\sqrt{X} \leq \ell} h(\ell) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{\sqrt{X} \leq \ell \leq X} h(\ell) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right).$$

*Démonstration.* C'est la méthode de Rankin. Pour tout  $a > 0$

$$\sum_{\ell \geq \sqrt{X}} |h(\ell)| \leq \sum_{\ell \geq \sqrt{X}} |h(\ell)| \left(\frac{\ell}{\sqrt{X}}\right)^a$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq \sqrt{X}} |h(\ell)| \left( \frac{\ell}{\sqrt{X}} \right)^a &\leq \sum_{\ell \geq 1} |h(\ell)| \left( \frac{\ell}{\sqrt{X}} \right)^a \\ &\leq \sum_{\ell \geq 1} \frac{|h(\ell)|}{\ell^{-a}} \left( \frac{1}{\sqrt{X}} \right)^a = D(|h|, -a) \left( \frac{1}{\sqrt{X}} \right)^a \end{aligned}$$

or  $D(|h|, -a)$  converge pour tout  $-a > -1$  donc en prenant  $a = \frac{2}{3}$  on trouve que

$$\sum_{\ell \geq \sqrt{X}} |h(\ell)| \leq K' \times \left( \frac{1}{\sqrt{X}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.11)$$

d'où  $\sum_{\sqrt{X} \leq \ell} h(\ell) = \mathcal{O}\left(X^{-\frac{1}{3}}\right)$ .

Et la seconde inégalité :

$$\left| \sum_{\sqrt{X} < \ell \leq X} h(\ell) \right| \leq \sum_{\ell \geq \sqrt{X}} |h(\ell)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$$

□

Remarquons qu'on aura également

$$\left| \sum_{\substack{\sqrt{X} < \ell \leq X \\ (\ell, 2) = 1}} h(\ell) \right| \leq \sum_{\substack{\ell \geq \sqrt{X} \\ (\ell, 2) = 1}} |h(\ell)| \leq \sum_{\ell \geq \sqrt{X}} |h(\ell)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right).$$

**Lemme 3.4.5.** *Pour toute fonction  $f$  définie par  $f = g \star h$  où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions telles que la série  $\sum g(n)$  est convergente et pour tout  $X > 1$*

$$\sum_{n \leq X} g(n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$$

et  $D(|h|, s)$  converge pour tout  $s > -1$ , on a

$$\sum_{n \leq X} f(n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

*Démonstration.* Pour tout  $n$ ,  $f(n) = \sum_{\ell m = n} h(\ell)g(m)$ , et donc

$$\sum_{n \leq X} f(n) = \sum_{\ell \leq X} h(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m)$$

qu'on calcule maintenant en divisant cette somme en deux termes :

$$\sum_{\ell \leq X} h(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m) = \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m) + \sum_{\sqrt{X} < \ell \leq X} h(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m) \quad (3.12)$$

or, en ce qui concerne le premier terme,

$$\sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/\ell) + 1)^A}\right) \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log \sqrt{X} + 1)^A}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m) \right| &\leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log \sqrt{X} + 1)^A}\right) \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} |h(\ell)| \\ &\leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log \sqrt{X} + 1)^A}\right) \sum_{\ell \geq 1} |h(\ell)| \end{aligned}$$

où  $\sum_{\ell \geq 1} |h(\ell)|$  est une constante (série convergente). Donc  $\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$ .

En ce qui concerne le deuxième terme,  $\sum_{\sqrt{X} < \ell \leq X} h(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m)$ , on utilise la méthode de Rankin, lemme 3.4.4 pour le majorer (grâce à l'abscisse de convergence de  $D(h, s)$  qui vaut  $-1$ ). On sait que pour tout  $\ell$ ,  $|\sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g(m)| \leq K$  une certaine constante (les sommes partielles sont bornées car la série  $\sum g(n)$  est convergente).

Ainsi ce deuxième terme est un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$ .  $\square$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'on peut faire la même démonstration avec la condition  $(n, 2) = 1$  et qu'on obtient donc le même lemme avec les sommes sur les entiers impairs uniquement :

**Lemme 3.4.6.** *Pour toute fonction  $f$  définie par  $f = g \star h$  où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions telles que la série  $\sum g(n)$  est convergente et pour tout  $X > 1$ ,  $\sum_{\substack{n \leq X \\ (n, 2) = 1}} g(n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$  et  $D(|h|, s)$  converge pour tout  $s > -1$ , on a*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n, 2) = 1}} f(n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

### 3.5 Sommes des $\frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^k n$

En utilisant les deux lemmes précédents en prenant  $f(n) = f_0(n) = \frac{\mu(n)}{\varphi(n)}$  et  $g(m) = g_0(m) = \frac{\mu(m)}{m}$ , on obtient

**Lemme 3.5.1.**

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

**Lemme 3.5.2.** *Pour tout  $A > 0$ , et pour tout  $X > 1$ ,*

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$$

et

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log n = -2\mathfrak{E}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

*Démonstration.* Avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log n &= \sum_{n \leq X} f_0(n) \log n = \sum_{n \leq X} g_0 \star h_0(n) \log(n) \\ &= \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log(m\ell) \\ &= \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} + \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m) \log m}{m}. \end{aligned}$$

Le premier terme se calcule en utilisant le lemme 4.6.1. En effet, la série de Dirichlet  $D(h_0 \log, s)$  est (au signe près) la dérivée de la série  $D(h_0, s)$  et elle converge elle aussi absolument pour tout  $s > -1$ . On trouve donc que ce terme est un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$ .

En ce qui concerne le second terme, on s'inspire de la même méthode qu'au lemme 4.6.1 mais ici on sait d'après le lemme 3.3.1 que

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \quad (3.13)$$

et en remplaçant directement dans  $\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m) \log m}{m}$  on obtiendrait un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log \frac{X}{\ell} + 1)^A}\right)$  pour un  $\ell$  allant jusqu'à  $X$  ce qui pose un problème.

On reprend donc le calcul comme dans le lemme 4.6.1 :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m) \log m}{m} &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m) \log m}{m} \\ &\quad + \sum_{\sqrt{X} \leq \ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m) \log m}{m} \\ &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \left( -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log \frac{X}{\sqrt{X}} + 1)^A}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right). \end{aligned}$$

Le  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$  provenant ici encore du lemme 3.4.4 avec la série convergente  $\sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m) \log m}{m}$ .

On évalue  $-\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell)$  : d'après le lemme 4.6.1,  $\sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) = 0$  donc

$$\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) - \sum_{\ell \geq \sqrt{X}} h_0(\ell) = 0 - \sum_{\ell \geq \sqrt{X}} h_0(\ell) \quad (3.14)$$

Et d'après le lemme 3.4.4,  $\sum_{\ell \geq \sqrt{X}} h_0(\ell) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$ . D'où

$$\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right) \quad (3.15)$$

et

$$\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m) \log m}{m} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$$

et donc

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right). \quad (3.16)$$

En ce qui concerne la somme sur les entiers impairs, d'après le lemme 3.3.5 on remplace la ligne (3.13) de ce qui précède par

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right),$$

et la ligne (3.14) par

$$\sum_{\substack{\ell \leq \sqrt{X} \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) - \sum_{\substack{\ell \geq \sqrt{X} \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) = \mathfrak{S}_2 - \sum_{\substack{\ell \geq \sqrt{X} \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell).$$

Et ainsi on trouve

$$\sum_{\substack{\ell \leq X \\ (\ell, 2)=1}} h_0(\ell) \sum_{\substack{m \leq X/\ell \\ (m, 2)=1}} \frac{\mu(m) \log m}{m} = \left( \mathfrak{S}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{1/3}}\right) \right) \left( -2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \right).$$

□

Nous venons de calculer  $\sum_{\substack{n \leq X \\ (n, 2)=1}} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log n$  en passant par  $\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log n$ . On fait la même chose avec un  $\log^2$ , puis avec un  $\log^3$ .

**Lemme 3.5.3.** *Pour tout  $X > 1$  et pour tout entier  $A > 0$ ,*

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^2 n = -2K_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$$

où  $K_1 = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) \log \ell$  est une constante.

*Démonstration.* On calcule de la même manière que dans le lemme précédent :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^2 n &= \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2(m\ell) \\ &= \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} (\log^2 m + 2 \log m \log \ell + \log^2 \ell) \\ &= \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log^2 \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} + 2 \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m \\ &\quad + \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 m. \end{aligned}$$

Etudions les 3 termes du membre de droite :

Remarquons encore une fois que les séries de Dirichlet  $D(h_0 \log, s)$  et  $D(h_0 \log^2, s)$  sont convergentes pour tout  $s > -1$ . On utilise lemme 3.4.4 avec  $h_0 \log$  et  $h_0 \log^2$  car la série  $\sum_{\ell \geq 1} \frac{h_0(\ell) \log^k(\ell)}{\ell^{-a}}$  converge pour tout  $-a \geq -1$ .

Ainsi le premier terme, selon le lemme 4.6.1 sera un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$ . Pour le second terme, nommons  $K_1 = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) \log \ell = -D'(h_0, 1)$ , c'est à dire l'opposé de la

dérivée de  $D(h_0, s)$  en  $s = 1$ . La convergence est acquise car  $1 > -1$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m \\ &\quad + \sum_{\sqrt{X} < \ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m \\ &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell \left( -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right) \end{aligned}$$

et ainsi, en utilisant le lemme 3.4.4 appliqué à la fonction  $h_0 \log$

$$\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) \log \ell - \sum_{\ell > \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell = K_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right),$$

on a

$$\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m = -K_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right). \quad (3.17)$$

Enfin on procède exactement de la même manière pour le troisième terme, on sépare la somme en deux parties, avant et après  $\sqrt{X}$ , et en remarquant que d'après le lemme 3.3.3,  $\sum_{n \leq X/\ell} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} = -2\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/\ell)+1)^A}\right) = -2\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(\sqrt{X})+1)^A}\right)$  pour des  $\ell < \sqrt{X}$  et en utilisant le lemme 3.4.4 on a

$$\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 m = \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \left( -2\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$$

le dernier  $\mathcal{O}$  venant du lemme 3.4.4 et comme  $\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$  (cf (3.15)), ce dernier terme est lui-même un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$ . Et ainsi on trouve

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^2 n = -2K_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

□

Remarque : on a également besoin de définir  $K'_1 = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ (\ell, 2)=1}} h_0(\ell) \log \ell$ .

**Lemme 3.5.4.** *Pour tout  $X > 1$  et pour tout entier  $A > 0$ ,*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n, 2)=1}} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^2 n = -4(K'_1 + \mathfrak{S}_2 \log 2 + \mathfrak{S}_2 \gamma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right).$$

*Démonstration.* On reprend exactement la démonstration précédente, on obtient une somme de trois termes dont le premier est ici encore un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right)$ . Le deuxième est

$$\sum_{\substack{\ell \leq X \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) \log \ell \sum_{\substack{m \leq X/\ell \\ (m,2)=1}} \frac{\mu(m)}{m} \log m = \sum_{\substack{\ell \leq \sqrt{X} \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) \log \ell \left( -2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$$

et

$$\sum_{\substack{\ell \leq \sqrt{X} \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) \log \ell = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) \log \ell - \sum_{\substack{\ell > \sqrt{X} \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) \log \ell = K'_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$$

donc on a pour le deuxième terme (le second facteur 2 vient du double produit)

$$-4K'_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right).$$

Ici encore, pour le troisième terme, on sépare la somme en deux parties, avant et après  $\sqrt{X}$ , d'après le lemme 3.3.5,  $\sum_{\substack{n \leq X/\ell \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n) \log^2 n}{n} = -4 \log 2 - 4\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(X/\ell)+1)^A}\right) = -4 \log 2 - 4\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(\sqrt{X})+1)^A}\right)$  pour des  $\ell < \sqrt{X}$  et en utilisant le lemme 3.4.4 et comme  $\sum_{\substack{\ell \leq \sqrt{X} \\ (\ell,2)=1}} h_0(\ell) = \mathfrak{S}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$  (cf (3.15)), on trouve pour le dernier terme :

$$-4\mathfrak{S}_2 \log 2 - 4\mathfrak{S}_2 \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right).$$

□

**Lemme 3.5.5.** *Pour tout  $X > 1$  et pour tout entier  $A > 0$ ,*

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^3 n = -6\gamma K_1 - 3K_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X+1)^A}\right)$$

où  $K_2 = \sum_{\ell \geq 1} h(\ell) \log^2 \ell$ .

*Démonstration.* On démontre cette égalité de la même manière que dans les lemmes précédents,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^3 n &= \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^3(m\ell) \\
&= \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} (\log^3 m + 3 \log^2 m \log \ell + 3 \log m \log^2 \ell + \log^3 \ell)
\end{aligned}$$

qu'on développe :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log^3 \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} + 3 \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 m \\
&+ 3 \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log^2 \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m + \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^3 m.
\end{aligned}$$

Etudions les 4 termes du membre de droite comme précédemment :

Ajoutons simplement que la série de Dirichlet  $D(h_0 \log^3, s)$  est elle aussi convergente pour tout  $s > -1$ . En outre, comme on l'a déjà dit, le lemme 3.4.4 s'applique avec des fonctions  $h_0 \log^k$  car la série  $\sum_{\ell \geq 1} \frac{h_0(\ell) \log^k(\ell)}{\ell^{-a}}$  convergera pour tout  $-a \geq -1$  donc on prend encore  $a = \frac{2}{3}$ .

Ainsi le premier terme, selon le lemme 4.6.1 est un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right)$ . Pour le second terme, on a toujours  $K_1 = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) \log \ell$ . Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 m &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 m \\
&\quad + \sum_{\sqrt{X} < \ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 m \\
&= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell \left( -2\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)
\end{aligned}$$

et ainsi, puisque en utilisant le lemme 3.4.4

$$\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) \log \ell - \sum_{\ell > \sqrt{X}} h_0(\ell) \log \ell = K_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right),$$

on a

$$\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 m = -2\gamma K_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right). \quad (3.18)$$

Pour le troisième terme, si  $K_2 = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) \log^2 \ell = D''(h_0, 1)$ , c'est à dire la dérivée seconde de  $D(h_0, s)$  en  $s = 1$ . La convergence est acquise car  $1 > -1$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log^2 \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log^2 \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m \\ &\quad + \sum_{\sqrt{X} < \ell \leq X} h_0(\ell) \log^2 \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m \\ &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log^2 \ell \left( -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right). \end{aligned}$$

Et encore, puisque en utilisant le lemme 3.4.4

$$\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \log^2 \ell = \sum_{\ell \geq 1} h_0(\ell) \log^2 \ell - \sum_{\ell > \sqrt{X}} h_0(\ell) \log^2 \ell = K_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$$

on a

$$\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \log^2 \ell \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log m = -K_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \quad (3.19)$$

Enfin cette fois-ci le dernier terme sera

$$\sum_{\ell \leq X} h_0(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{\mu(m)}{m} \log^3 m = \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) \left( -6(\gamma_1 + \gamma^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right).$$

En effet, on utilise le lemme 3.3.3, le dernier  $\mathcal{O}$  vient du lemme 3.4.4 et comme  $\sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_0(\ell) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$ , ce terme est lui-même un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}\right)$  selon (3.15). Et ainsi on trouve

$$\sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^3 n = -6\gamma K_1 - 3K_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log X + 1)^A}\right). \quad (3.20)$$

□

En nommant  $K'_2 = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ (\ell, 2)=1}} h_0(\ell) \log^2 \ell$  et en procédant exactement de la même manière sur les entiers impairs on obtient :

**Lemme 3.5.6.** *Pour tout  $X > 1$  et pour tout entier  $A > 0$ ,*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \log^3 n = -12K'_1(\log 2 + \gamma) - 6K'_2 \\ - 6\mathfrak{G}_2 \left( 3 \log^2 2 + 2\gamma \log 2 + 2(\gamma_1 + \gamma^2) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{(\log X + 1)^A} \right).$$

## 3.6 Démonstration du théorème 3.1.2

On calcule maintenant

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,2)=1}} (\mu \star \log^3)(n) \Lambda(n+2) = \sum_{d \leq X} \mu(d) \sum_{\ell \leq X/d} \log^3(\ell) \Lambda(d\ell + 2).$$

On coupe cette somme en deux parties :

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \mu(d) \sum_{\substack{\ell \leq X/d \\ (\ell,2)=1}} \log^3(\ell) \Lambda(d\ell + 2) + \sum_{\substack{\frac{X}{(\log X)^B} \leq d \leq X \\ (d,2)=1}} \mu(d) \sum_{\substack{\ell \leq X/d \\ (\ell,2)=1}} \log^3(\ell) \Lambda(d\ell + 2) \\ = S_1 + S_2.$$

(3.21)

On évalue donc ces deux sommes...

### 3.6.0.1 Evaluation de $S_2$

On commence par majorer le deuxième terme de (3.21), c'est à dire

$$\sum_{\substack{\frac{X}{(\log X)^B} \leq d \leq X \\ (d,2)=1}} \mu(d) \sum_{\substack{\ell \leq X/d \\ (\ell,2)=1}} \log^3(\ell) \Lambda(d\ell + 2).$$

Ce terme, en valeur absolue, est inférieur à

$$\sum_{\substack{\frac{X}{(\log X)^B} \leq d \leq X}} \sum_{\ell \leq X/d} \log^3(\ell) \Lambda(d\ell + 2) \leq \sum_{\substack{\frac{X}{(\log X)^B} \leq d \leq X}} \log^3 \left( \frac{X}{d} \right) \sum_{\ell \leq X/d} \Lambda(d\ell + 2)$$

or d'après le théorème de Brun-Titchmarsh, voir H.L.MONTGOMERY et R.C.VAUGHAN 1973

$$\sum_{\ell \leq X/d} \Lambda(d\ell + 2) \leq \frac{2(X+2) \log(X+2)}{\varphi(d) \log \frac{X+2}{d}}$$

donc on trouve comme majorant (en majorant  $\log \frac{X}{d}$  par  $\log \frac{X+2}{d}$  et en simplifiant),

$$\begin{aligned} & \sum_{\frac{X}{(\log X)^B} \leq d \leq X} \log^2 \left( \frac{X+2}{d} \right) \frac{2(X+2) \log(X+2)}{\varphi(d)} \\ & \leq 2(X+2) \log(X+2) \log^2((\log X)^B) \sum_{\frac{X}{(\log X)^B} \leq d \leq X} \frac{1}{\varphi(d)}. \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{d \leq X} \frac{1}{\varphi(d)} = C_1 \log X + \mathcal{O}(1)$ , où  $C_1 = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}$ , voir SITARAMACHANDRARAO 1985, on trouve

$$\sum_{\frac{X}{(\log X)^B} \leq d \leq X} \frac{1}{\varphi(d)} = C_1 \log X - C_1 \log \frac{X}{(\log X)^B} + \mathcal{O}(1) = C_1 \log((\log X)^B) + \mathcal{O}(1)$$

et donc un terme dominant en

$$2C_1(X+2) \log(X+2) \log^3((\log X)^B) = 2C_1 \times B^3(X+2) \log(X+2) \log^3(\log X) \quad (3.22)$$

qui est bien un  $o(X \log^2 X)$ .

### 3.6.0.2 Calcul de $S_1$

On s'intéresse maintenant au premier terme de (3.21).

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \mu(d) \sum_{\ell \leq X/d} \log^3(\ell) \Lambda(d\ell + 2) \\ & = \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \mu(d) \sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod{d}}} \log^3 \left( \frac{m-2}{d} \right) \Lambda(m) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod{d}}} \log^3 \left( \frac{m-2}{d} \right) \Lambda(m) \\ & = \sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod{d}}} \Lambda(m) \left[ \log^3 \left( \frac{X-2}{d} \right) - \int_m^X \frac{3}{t-2} \log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right) dt \right]. \quad (3.23) \end{aligned}$$

On aura pour le premier terme

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \mu(d) \log^3 \left( \frac{X-2}{d} \right) \sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) \\
= & \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \mu(d) \log^3 \left( \frac{X-2}{d} \right) \left[ \frac{X+2}{\varphi(d)} + \left( \sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) - \frac{X+2}{\varphi(d)} \right) \right]
\end{aligned}$$

où, d'après notre hypothèse (C)

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \left| \sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) - \frac{X+2}{\varphi(d)} \right| \leq \frac{X+2}{(\log(X+2))^5}$$

donc

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \log^3 \left( \frac{X-2}{d} \right) \left| \sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) - \frac{X+2}{\varphi(d)} \right| \leq \frac{X+2}{(\log(X+2))^2} \quad (3.24)$$

(en majorant  $\log^3 \left( \frac{X-2}{d} \right)$  par  $\log^3(X+2)$ ).

Et notre terme principal est

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \mu(d) \log^3 \left( \frac{X-2}{d} \right) \frac{X+2}{\varphi(d)} \quad (3.25)$$

qu'on évaluera plus loin. Le deuxième terme de (3.23) est

$$\sum_{\substack{3 \leq m \leq X+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) \int_m^X \frac{3}{t-2} \log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right) dt = 3 \int_3^X \sum_{\substack{3 \leq m \leq t+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) \log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right) \frac{dt}{t-2}$$

avec

$$\sum_{\substack{3 \leq m \leq t+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) = \frac{t+2}{\varphi(d)} + \left( \sum_{\substack{3 \leq m \leq t+2 \\ m \equiv 2 \pmod d}} \Lambda(m) - \frac{t+2}{\varphi(d)} \right).$$

Encore une fois on traite deux termes, celui de gauche (terme dominant) et celui

de droite, le terme d'erreur, qui est en valeur absolue inférieur à

$$3 \sum_{d \leq \frac{X}{(\log X)^B}} \int_3^X \log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right) \left| \sum_{\substack{3 \leq m \leq t+2 \\ m \equiv 2 \pmod{d}}} \Lambda(m) - \frac{t+2}{\varphi(d)} \right| \frac{dt}{t-2}.$$

Ce qui, en utilisant encore notre hypothèse (C) et en majorant  $\log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right)$  par  $\log^2(t-2)$  est inférieur à

$$3 \frac{X}{(\log X)^5} \int_3^X \frac{\log^2(t-2)}{t-2} dt = \frac{X}{(\log X)^5} \log^3 X = \frac{X}{(\log X)^2}$$

et le terme de gauche est

$$3 \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \int_3^X \log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right) dt. \quad (3.26)$$

Remarque : ce terme contenait un facteur  $\frac{t+2}{t-2} = 1 + \frac{4}{t-2}$  dont on sait que le deuxième terme sera un terme d'erreur. Et où

$$\begin{aligned} \int_3^X \log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right) dt &= \left[ (t-2) \log^2 \left( \frac{t-2}{d} \right) \right]_3^X - \int_3^X 2 \frac{t-2}{t-2} \log \left( \frac{t-2}{d} \right) dt \\ &= (X-2) \log^2 \left( \frac{X-2}{d} \right) - \log^2 d - 2 \left[ (t-2) \log \left( \frac{t-2}{d} \right) - t \right]_3^X. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve finalement

$$3X \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \log^2 \left( \frac{X-2}{d} \right) - 6X \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \log \left( \frac{X-2}{d} \right) + \mathcal{O}(X \log X)$$

qui est un  $o(X \log^2 X)$  (on le comprend encore en calculant le terme principal ci-dessous).

### 3.6.1 Evaluation du terme principal

Il nous reste à évaluer le terme principal (3.25)

$$X \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \log^3 \left( \frac{X-2}{d} \right).$$

On développe

$$\log^3\left(\frac{X-2}{d}\right) = \log^3(X-2) - 3\log^2(X-2)\log d + 3\log(X-2)\log^2 d - \log^3 d$$

et on utilise les lemmes précédents pour évaluer les sommes du type

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \log^k d.$$

D'après le lemme 3.5.1,

$$X \log^3(X-2) \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} = \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\log X)^{A-3}}\right)$$

d'après le lemme 3.5.2,

$$-3X \log^2(X-2) \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \log d = 6\mathfrak{S}_2 X \log^2(X-2) + \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\log X)^{A-2}}\right) \quad (3.27)$$

d'après le lemme 3.5.4,

$$\begin{aligned} & 3X \log(X-2) \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \log^2 d \\ &= -12(K'_1 + \mathfrak{S}_2 \log 2 + \mathfrak{S}_2 \gamma) X \log(X-2) + \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\log X)^{A-1}}\right) \end{aligned}$$

et d'après le lemme 3.5.6,

$$-X \sum_{\substack{d \leq \frac{X}{(\log X)^B} \\ (d,2)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \log^3 d = o(X \log X).$$

C'est donc bien (3.27) le terme principal et tout le reste est un  $o(X \log^2 X)$ , ce qui justifie pourquoi on a pris  $\log^2 X$  au dénominateur dans l'hypothèse (C) pour la majoration (3.24).

# 4 Méthode de convolution

*Cette partie fait l'objet d'un article grand public indépendant, c'est pour cela qu'elle est rédigée en langue anglaise, mais la méthode qui est explicitée ci-dessous nous a servi dans le chapitre précédent et c'est un outil mathématique intéressant en tant que tel. L'intérêt principal de cette partie, outre l'aspect pédagogique, est de montrer que cette méthode fonctionne également pour des fonctions non positives comme dans le troisième exemple.*

## 4.1 Introduction

Many arithmetical functions have an erratic behavior which makes their arithmetic mean

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} f(n)$$

a much better way to "know" them.

Thus, the average order of an arithmetic function is some simpler or better-understood function which takes the same values "on average". We define an average order of an arithmetic function  $f$  to be any function  $g$  of a real variable such that

$$\sum_{n \leq X} f(n) \sim \sum_{n \leq X} g(n).$$

By  $\sim$  (equivalent), we mean asymptotically equivalent such that if the limit  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)/G(x)$  exists it is equal to 1 (for example  $\ln(x) + 1 \sim \ln(x)$ ).

In general we try and find a function  $g$  which is commonly known (usually continuous and monotonic), and whose asymptotic behavior is easy to determine. It is this asymptotic equivalent that we usually call the average order.

There does not always exist a simpler average order than  $f$ , but for many functions it does exist and it is a regular function. Through three examples, this article will explain the convolution method that helps determine the average order of some multiplicative functions.

We shall first consider the following function

$$f_0(n) = \prod_{p|n} (p + 2), \tag{4.1}$$

in which  $p$  represents a prime number, so we are considering here the product for all prime numbers dividing  $n$ . We remind the reader that an empty product is to be assigned the value 1. We will use the same conventions in the rest of this document. Below are the values of  $f_0(n)$  for  $n$  between 1 and 20.

1, 4, 5, 4, 7, 20, 9, 4, 5, 28, 13, 20, 15, 36, 35, 4, 19, 20, 21, 28.

This sequence does not give much information on the function's behavior, but we will prove the following theorem.

**Theorem 4.1.1.** *For all  $\sigma$ , a real number in  $]1/2, 1]$ ,*

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} f_0(n) = \frac{1}{X} \sum_{n \leq X} \prod_{p|n} (p+2) = C_0 X + \mathcal{O}(X^\sigma) \quad (4.2)$$

where

$$C_0 = \frac{1}{2} \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p(p+1)} \right) = 0.6842\dots$$

We will then prove a second theorem that gives the average order of

$$f_1(n) = \frac{\varphi(n)}{n}. \quad (4.3)$$

**Theorem 4.1.2.** *For all  $\sigma$ , a real number in  $] -1, 0]$ ,*

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} f_1(n) = \frac{6}{\pi^2} + \mathcal{O}(X^\sigma), \quad (4.4)$$

where the  $\mathcal{O}$  contains a constant number depending on  $\sigma$ .

Those two theorems are similar to those proved by Olivier Ramaré and Perrine Berment in their article [OLIVIER RAMARÉ 2012](#). But we will extend this method and consider average orders of functions involving the Möbius function. Hence the following theorem shows that the method works with non positive multiplicative functions and gives constants when we only used  $\mathcal{O}$  in the previous chapter.

Indeed if we consider

$$f_3(n) = \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \quad \text{and} \quad g_3(n) = \frac{\mu(n)}{n} \quad (4.5)$$

we will find a function  $h_3$  such that  $f_3 = g_3 \star h_3$ , as explained in the next paragraph, and obtain the following result.

**Theorem 4.1.3.** For all  $X > 1$ ,

$$\left| \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \right| \leq \frac{0.082}{\log X} + \frac{30}{X^{1/3}} \quad (4.6)$$

This theorem is proved for all  $X > 100000$  and we check it holds for any  $X > 1$  with GP calculator. We then easily use its proof to get a more general theorem below.

**Theorem 4.1.4.** For all function  $f$  defined by  $f = g_3 \star h$  where  $g_3(n) = \frac{\mu(n)}{n}$  and  $h$  is such that  $D(|h|, s)$  is convergent for all  $s > -1$ , we have for all  $X > 100000$ ,

$$\left| \sum_{n \leq X} f(n) \right| \leq \frac{C}{\log X} + \frac{C'}{X^{1/3}}$$

where  $C = \frac{2}{69}D(|h|, 0)$  and  $C' = D(|h|, -2/3) + D(|h|, 0)$ .

The principle of the method is the following : we use the notion of abscissa of convergence to define a concept of *size* of an arithmetical function: a function  $f_1$  is *greater* than a function  $f_2$  if its abscissa of convergence is greater. The idea of the convolution method is to express a function  $f$  for which we would like to calculate the average order as a convolution  $f = g \star h$  with the abscissa of convergence of  $g$  and  $f$  being the same and the abscissa of convergence of  $h$  being smaller. Hence we will consider  $h$  as being a *slight perturbation* and  $f$  being a slightly modified version of  $g$ , this latter being a known multiplicative function with a known average order. The average order of  $f$  is then the average order of  $g \star h$  which is usually dominated by the average order of  $g$ .

The key of the convolution method is the uniqueness theorem (Theorem 4.3.6). If  $D(f, s) = D(g, s)D(h, s)$  then  $f = g \star h$ . And  $f$  and  $g$  being multiplicative, we will express their Dirichlet series with Euler products (Theorem 4.3.5).

The convolution method is highly effective, and though it does not work for some multiplicative functions, it does for most of the usual ones, making it a great tool.

## 4.2 Dirichlet convolution

The Dirichlet convolution of two arithmetical functions  $f$  and  $g$  is defined by

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d). \quad (4.7)$$

The function  $\delta_{n=1}$  also named  $\delta_1$ , defined by  $\delta_1(1) = 1$  and  $\delta(n) = 0$  for  $n \neq 1$ , is the identity element for this multiplication, as for all arithmetical function  $g$ ,

we have

$$(\delta_1 \star g)(n) = \sum_{\ell m=n} \delta_1(\ell)g(m) = g(n).$$

The reader can easily verify the two following properties.

**Property 4.2.1.** *Dirichlet convolution is commutative and associative.*

**Property 4.2.2.** *Dirichlet convolution distributes over addition.*

Thus, these two operations give the set of arithmetical functions the structure of an algebra over a commutative ring.

A very important theorem for multiplicative functions is

**Theorem.** *If  $f$  and  $g$  are multiplicative, so is their Dirichlet product  $f \star g$ .*

To prove the theorem above, we use the following lemma.

**Lemma 4.2.3.** *Let  $m$  and  $n$  be two relatively prime integers. For all function  $F$ , we have*

$$\sum_{d|mn} F(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} F(d_1 d_2).$$

*Proof:* Let  $n$  be an integer, and let  $\mathcal{D}(n)$  be the set of its positive divisors, for example  $\mathcal{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ . We consider the two following functions :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n) &\rightarrow \mathcal{D}(mn), & \Psi : \mathcal{D}(mn) &\rightarrow \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n), \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 d_2 & d &\mapsto (\gcd(d, m), \gcd(d, n)). \end{aligned}$$

We now prove that  $\Psi \circ \Phi = \text{Id}$  and  $\Phi \circ \Psi = \text{Id}$ , hence the lemma is a direct consequence of the equivalence  $d/mn \Leftrightarrow d = d_1 d_2$  with  $d_1/m$  and  $d_2/n$ .

First, let  $(d_1, d_2)$  from  $\mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n)$ .

We have  $\gcd(d_1 d_2, m) = d_1$  and  $\gcd(d_1 d_2, n) = d_2$ , hence  $\Psi \circ \Phi = \text{Id}$ .

Conversely, if  $d$  divides  $mn$ , we have

$$\gcd(d, mn) = \gcd(d, m) \gcd(d, n) \text{ therefore } \Phi \circ \Psi = \text{Id}. \quad \square$$

Using this lemma, we can now prove Theorem 4.2

*Proof:* Clearly  $(f \star g)(1) = f(1)g(1) = 1$ . Then, given  $m$  and  $n$  two relatively prime numbers,

$$(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f\left(\frac{mn}{d}\right)g(d).$$

Lemma 4.2.3 tells us that

$$\begin{aligned} (f \star g)(mn) &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right)g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(m/d_2)f(n/d_2)g(d_1)g(d_2) = (f \star g)(m)(f \star g)(n) \end{aligned}$$

□

Note that this property can be used to prove that  $\tau$  is multiplicative, as  $\tau(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1})(n)$ .

## 4.3 Dirichlet series

**Definition 4.3.1.** Let  $f$  be an arithmetical function. The Dirichlet series associated with  $f$  is defined for all real number  $s$  for which the series is convergent by

$$D(f, s) = \sum_{n \geq 1} f(n)n^{-s}. \quad (4.8)$$

Note: There might not exist values of  $s$  for which the Dirichlet series is defined, for example if  $f(n) = e^n$ .

Also, Dirichlet series are usually defined on  $\mathbb{C}$  but in this article we only need  $s$  to be a real number. More information about Dirichlet series can be found in HARDY et RIESZ 1915.

### 4.3.1 Abscissa of absolute convergence

**Definition 4.3.2.** The abscissa of convergence for a function  $f$ , is the smallest real number  $\sigma_c$  such as the Dirichlet series  $D(f, s)$  is convergent for all  $s > \sigma_c$ . If  $D(f, s)$  is convergent for all  $s$ , we say that the abscissa of convergence is  $-\infty$ .

**Example 1.** The abscissa of convergence is  $-\infty$  for  $f(n) = e^{-n}$ .

**Definition 4.3.3.** The abscissa of absolute convergence for a function  $f$ , is the smallest real number  $\sigma_a$  such as the Dirichlet series  $D(|f|, s)$  is convergent for all  $s > \sigma_a$ .

Note : The series might not be convergent for  $s = \sigma_c$  (or  $\sigma_a$ ). Landau's theorem stipulates that if  $f$  is positive and  $\sigma_c$  is finite, the Dirichlet series associated with  $f$  diverges in  $\sigma_c$  (see APOSTOL 1976 for example, Thm 11.13).

**Property 4.3.4.** Let  $f$  be an arithmetical function such as the associated Dirichlet series is absolutely convergent for some  $s$ . Thus, for all  $r \geq s$ , the series  $D(f, r)$  is absolutely convergent.

*Proof:* We have

$$D(f, r) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \frac{n^s}{n^r}.$$

$r \geq s$  so  $n^s/n^r \leq 1$ , hence  $D(|f|, r) \leq D(|f|, s)$ , i.e. the Dirichlet series associated with  $f$  is absolutely convergent for all  $r \geq s$ .  $\square$

## 4.3.2 Euler product

Infinite sums of multiplicative functions can be expanded into infinite products over prime numbers, with the same abscissa of absolute convergence. This is a consequence of the following theorem of Godement (see [GODEMENT 2012](#)).

**Theorem 4.3.1.** *Considering a sequence  $(u_n)$  such that  $\sum_{n \geq 1} |u_n| = M < \infty$ , then*

1.  $P_n = \prod_{1 \leq j \leq n} (1 + u_j) \rightarrow P \in \mathbb{C}$ .

2. *If for all  $j$ ,  $1 + u_j \neq 0$  then  $P \neq 0$ .*

We write  $P = \prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$  and we say that the product is absolutely convergent in Godement's sense.

*Proof:* 1. We have  $P_n - P_{n-1} = u_n P_{n-1}$  so

$$|P_n - P_{n-1}| \leq |u_n| |P_{n-1}| \leq |u_n| \prod_{1 \leq j \leq n-1} e^{|u_j|} \leq |u_n| e^M.$$

2. We find some product  $Q$  such that  $PQ = 1$ .

Indeed, for all  $j$  we define

$$v_j = \frac{1}{1 + u_j} - 1 = -\frac{u_j}{1 + u_j}.$$

The sequence  $(v_j)$  is well defined as for all  $j$ ,  $1 + u_j \neq 0$ . And  $\sum_{n \geq 1} |v_j| < \infty$  as  $|v_j| \sim |u_j|$ . So if  $Q = \prod_{n \geq 1} (1 + v_n)$  then, as we have for all  $j$ ,  $(1 + u_j)(1 + v_j) = 1$ , we easily deduce  $PQ = 1$ .  $\square$

So we will say that a product is absolutely convergent in Godement's sense if it can be written  $\prod(1 + u_j)$  with  $\sum |u_j|$  bounded. And this can be applied to Dirichlet series of multiplicative functions : if  $D(f, s)$  can be expanded into a Euler product, it means that the product is zero if and only if it contains at least one zero factor.

**Property 4.3.5.** *Let  $f$  be a multiplicative function and assume that the Dirichlet series associated with  $f$  is absolutely convergent for some  $s$ . Hence,  $D(f, s)$  is expandable into the Euler product in Godement's sense:*

$$D(f, s) = \prod_{p \geq 2} \sum_{k \geq 0} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

*Proof:* The idea is to express  $n$  as its product of prime numbers. Then,  $f$  being multiplicative, this proves the theorem. A complete proof is in [TENENBAUM 1990](#).

$\square$

The Riemann zeta function is the Dirichlet series associates with the constant function 1 which we named  $\theta_0$  and  $\mathbb{1}$  in the inventory. Thus it is the simplest (and most famous) Dirichlet series. It is defined for all  $s > 1$  by

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}.$$

Note : Riemann considered complex values of  $s$  and connected the distribution of primes to analytic properties of the function  $\zeta$ .

As the function  $\mathbb{1}$  is multiplicative, the function  $\zeta$  is expandable to the Euler product

$$\zeta(s) = \prod_{p \geq 2} \left( \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{ks}} \right) = \prod_{p \geq 2} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad (4.9)$$

which is absolutely convergent for  $s > 1$ .

### 4.3.3 Uniqueness theorem

For every arithmetical function we can associate a Dirichlet series, as long as the last is convergent for at least some  $s$ . We see below that a function  $f$  is uniquely determined by its Dirichlet series.

**Property 4.3.6.** *Given two functions  $f$  and  $g$  such that their Dirichlet series are both absolutely convergent for some  $s$  and that  $D(f, r) = D(g, r)$  for all  $r > s$ , then  $f = g$ .*

*Proof:* Let  $h_1 = f - g$ , we have  $D(h_1, r) = 0$  for all  $r > s$ . As the series is convergent for  $r = s + 1$ ,  $h_2(n) = h_1(n)/n^{s+1}$  is bounded (in absolute value) and  $D(h_2, r) = 0$  for all  $r > -1$ . We will prove that  $h_2 = 0$ .

Let's assume that  $h_2 \neq 0$ . Let  $n_0$  be the smallest integer for which  $h_2(n) \neq 0$ . We have, for  $r > 1$

$$n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0) = \sum_{n \geq n_0} h_2(n) \frac{n_0^r}{n^r} - h_2(n_0) = \sum_{n \geq n_0+1} h_2(n) \frac{n_0^r}{n^r}$$

Hence, if comparing the sum to an integral we have

$$\begin{aligned} |n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0)| &\leq \max_n |h_2(n)| \sum_{n \geq n_0+1} \frac{n_0^r}{n^r} \\ &\leq \max_n |h_2(n)| n_0^r \int_{n_0}^{\infty} \frac{dt}{t^r} \leq \frac{n_0 \max_n |h_2(n)|}{(r-1)}, \end{aligned}$$

$n_0 \max_n |h_2(n)| / (r-1) \rightarrow 0$  when  $r \rightarrow +\infty$ . And as  $D(h_2, r) = 0$  (and so  $n_0^r D(h_2, r) = 0$ ), we should have  $h_2(n_0) = 0$ , hence the contradiction.  $\square$

### 4.3.4 Dirichlet series and convolution

The two operations defined in chapter 4.2 on the set of arithmetical functions are precisely the ones involved when adding or multiplying two Dirichlet series.

- Addition (+) : given two functions  $f$  and  $g$  which Dirichlet series are absolutely convergent for some  $s$ , we have

$$D(f + g; s) = D(f; s) + D(g; s).$$

- Multiplication ( $\star$ ) : given two functions  $f$  and  $g$  which Dirichlet series are absolutely convergent for some  $s$ , we have

$$D(f \star g; s) = D(f; s)D(g; s).$$

The last identity, which is easy to establish, means the Dirichlet series of a convolution is the product of the Dirichlet series the same way the Fourier transform of a convolution is the product of the Fourier transforms for real values.

Note : the abscissa of convergence of the Dirichlet series associated with  $f \star g$  is clearly less than or equal to the maximum of the abscissas of convergence of  $f$  and  $g$ . There is usually equality when those abscissas of convergence are distinct and none of the factors is null.

## 4.4 The step-by-step guide to convolution method and proof of Theorem 4.1.1

We let the reader quickly check that  $f_0$ ,  $f_1$  and  $f_3$  are indeed multiplicative functions,  $f_0$  from its definition,  $f_1$  and  $f_3$  as quotients of two multiplicative functions. And we now start the step-by-step guide to convolution method with those three examples..

### Step one: finding the right Dirichlet series

Let us express the Dirichlet series associated with  $f_0$  as an Euler product, we have

$$D(f_0, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{p'|n} (p' + 2)}{n^s} = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\prod_{p'|p^k} (p' + 2)}{p^{ks}} \right).$$

But  $p'$  and  $p$  being prime numbers, the only  $p'$  that divides  $p^k$  is  $p' = p$ . So what remains from the sum inside the brackets is

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(p + 2)}{p^{ks}} = (p + 2) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{ks}} = \frac{p + 2}{p^s - 1}.$$

The Dirichlet series associated with  $f_0$  is given by

$$D(f_0, s) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{p+2}{p^s - 1} \right). \quad (4.10)$$

We now notice that this product is similar to

$$\prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p^{s-1} - 1} \right)$$

which is equal to  $\zeta(s-1)$ .

We remind the reader that our goal is to find a function  $g$  and a function  $h$  such that  $f_0 = g \star h$ . According to the property 4.3.6 and the fact that the Dirichlet series of a convolution is the product of the Dirichlet series, we are looking for a Dirichlet series  $H(s) = D(h, s)$  such that  $D(f_0, s) = \zeta(s-1)H(s)$ . So our function  $g$  here would be the function  $\theta_1$  that associates  $n$  to  $n$  and which Dirichlet series is  $\zeta(s-1)$  we now need to find the function  $h$ , but first to find  $H(s)$ .

Let us "take"  $\zeta(s-1)$  "out" of our product.

$$\begin{aligned} D(f_0, s) &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{p+2}{p^s - 1} \right) = \zeta(s-1) \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{p+2}{p^s - 1} \right) \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{p^{s-1}} \right) \\ &= \zeta(s-1) \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{p^{s-1}} + \frac{p+2}{p^s - 1} - \frac{p+2}{p^{s-1}(p^s - 1)} \right) \\ &= \zeta(s-1) \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{2}{p^s - 1} - \frac{1}{p^{s-2}(p^s - 1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p^{s-1}(p^s - 1)} \right) \\ &= \zeta(s-1)H(s). \end{aligned}$$

## Step two: identifying the function $h$

We must now express  $H(s)$  as a Dirichlet series and at the same time consider the values of  $s$  for which  $H(s)$  is absolutely convergent. We remind the reader that we are looking for a function  $h$  such that

$$H(s) = D(h, s) = \sum_{n \geq 1} h(n)/n^s \quad (4.11)$$

And because we only consider multiplicative functions, the series can be expanded into the Euler product

$$D(h, s) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} \right).$$

Hence we have

$$1 + \sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} = 1 + \frac{2}{p^s - 1} - \frac{1}{p^{s-2}(p^s - 1)} - \frac{1}{p^{s-1}(p^s - 1)}. \quad (4.12)$$

Because  $h$  is multiplicative, the series  $H(s)$  will be absolutely convergent if in the right member of this Euler product we have  $\sum \frac{2}{n^s - 1}$ ,  $\sum \frac{1}{n^{s-2}(n^s - 1)}$  and  $\sum \frac{1}{n^{s-1}(n^s - 1)}$  that are convergent. Which means we must have at the same time  $s > 1$ ,  $2s - 2 > 1$  hence  $s > 3/2$  and  $2s - 1 > 1$  hence  $s > 1$  again. Thus, the abscissa of absolute convergence of  $h$  is at most  $3/2$ .

This result is coherent with our goal which was to find a function  $h$  "smaller" than  $f$  and  $g$  as defined in the introduction of this section. Indeed, the abscissa of convergence of  $g = \theta_1$  (associated with  $\zeta(s - 1)$ ) is 2, and so will be  $f_0$ 's as we can guess from the way we defined  $g$  and  $h$  and as we can verify when  $f_0$  is determined.

Let us now explicit  $H(s)$ , using the identity

$$1 + \sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} = 1 + \frac{2}{p^s - 1} - \frac{1}{p^{s-2}(p^s - 1)} - \frac{1}{p^{s-1}(p^s - 1)}.$$

Let us modify the right hand member so that it can be identified with the left one. We use the simple fact that

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{ks}} \quad (4.13)$$

Hence

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{p^s - 1} - \frac{1}{p^{s-2}(p^s - 1)} - \frac{1}{p^{s-1}(p^s - 1)} &= \\ 1 + \frac{2}{p^s} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) - \frac{1}{p^{2s-2}} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) - \frac{1}{p^{2s-1}} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right), \end{aligned}$$

which is equal to

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{2}{p^s} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{ks}} - \frac{1}{p^{2s-2}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{ks}} - \frac{1}{p^{2s-1}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{ks}} \\
&= 1 + 2 \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{(k+1)s}} - p^2 \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{(k+2)s}} - p \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{(k+2)s}} \\
&= 1 + \frac{2}{p^s} + \sum_{k \geq 2} \frac{-p^2 - p + 2}{p^{ks}}.
\end{aligned}$$

Identifying each term of these series, we define the multiplicative function  $h$  by

$$\begin{cases} h(p) = 2, \\ h(p^k) = -p^2 - p + 2 \quad \text{for } k \geq 2, \end{cases} \quad (4.14)$$

which meets our requirements.

### Step three: determination of the average order of $f_0$

We will use the following lemma.

**Lemma 4.4.1.** *For all  $\alpha \in [1, 2]$  and all  $M \geq 0$ .*

$$\sum_{m \leq M} m = \frac{1}{2}M^2 + \mathcal{O}(M^\alpha) \quad (4.15)$$

*Proof:* for all integer  $N$  we have

$$\sum_{n \leq N} n = N(N+1)/2,$$

thus, for  $M \geq 1$ ,  $M$  being a real number, we have

$$\sum_{m \leq M} m = \frac{1}{2}M(M+1) + \mathcal{O}(M) = \frac{1}{2}M^2 + \mathcal{O}(M). \quad (4.16)$$

This estimation is true for any  $M$  greater than or equal to 0, and obviously for all  $\alpha \in [1, 2]$ ,

$$\sum_{m \leq M} m = \frac{1}{2}M^2 + \mathcal{O}(M^\alpha).$$

□

As  $D(f_0, s) = \zeta(s-1)H(s)$ , we already explained in the first step why  $f_0 = \theta_1 \star h$ . Let us express  $f_0$  as the convolution of  $\theta_1$  by  $h$ .

$$f_0(n) = \sum_{\ell m = n} h(\ell)\theta_1(m) = \sum_{\ell m = n} h(\ell)m.$$

We are now ready to calculate the average order of  $f_0$ . We have

$$\sum_{n \leq X} f_0(n) = \sum_{\ell m \leq X} h(\ell)m = \sum_{\ell \leq X} h(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} m. \quad (4.17)$$

The lemma 4.4.1 works as we actually need the error term to be less good because of the abscissa of absolute convergence of  $h$  which is  $3/2$ , and this allows us to easily finish our calculation.

$$\sum_{n \leq X} f_0(n) = \sum_{\ell \leq X} h(\ell) \left( \frac{1}{2} \frac{X^2}{\ell^2} + \mathcal{O}\left(\frac{X^\alpha}{\ell^\alpha}\right) \right)$$

We conveniently notice that the condition  $\ell \leq X$  can be replaced with  $\ell \geq 1$  as the identity (and estimation) remains true. And so :

$$\sum_{n \leq X} f_0(n) = \frac{X^2}{2} \sum_{\ell \geq 1} \frac{h(\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}\left(X^\alpha \sum_{\ell \geq 1} \frac{|h(\ell)|}{\ell^\alpha}\right).$$

We now understand better why we needed the error term power in (4.4.1) to be greater than 1.  $H(s)$  is absolutely convergent for  $s > 3/2$  so  $\sum_{\ell \leq 1} |h(\ell)|/\ell^\alpha$  is finite for all  $\alpha > 3/2$ . And the error term only makes sense for  $\alpha \leq 2$ .

In conclusion, if we let  $\sigma = \alpha - 1$  we find that

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} f_0(n) = \frac{X}{2} \sum_{\ell \geq 1} \frac{h(\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}\left(X^\sigma \sum_{\ell \geq 1} \frac{|h(\ell)|}{\ell^\sigma}\right).$$

for all  $\sigma \in ]1/2, 1[$  which concludes the demonstration of Theorem 4.1.1.

## Expression of the constant $C_0$

In Theorem 4.1.1 we stated that

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} f_0(n) = C_0 X + \mathcal{O}(X^\sigma) \quad \text{so } C_0 = \frac{1}{2} \sum_{\ell \geq 1} \frac{h(\ell)}{\ell^2} \quad (4.18)$$

with

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \geq 1} \frac{h(\ell)}{\ell^2} &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^{2k}} \right) \\
&= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{2}{p^2} + (-p^2 - p + 2) \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^{2k}} \right) \\
&= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{2}{p^2} + \frac{(-p^2 - p + 2)}{p^2(p^2 - 1)} \right) \\
&= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{(p^2 - p)}{p^2(p^2 - 1)} \right) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p(p+1)} \right)
\end{aligned}$$

Hence  $C_0 = \frac{1}{2} \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p(p+1)} \right)$ .

## 4.5 Second example of the method, proof of Theorem 4.1.2

In this part, we are considering the function below

$$f_1(n) = \frac{\varphi(n)}{n}$$

for which we cannot use directly use the convolution method to determine its average order for divergence reasons. So we determine the average order of

$$f_2(n) = \frac{\varphi(n)}{n^2} \tag{4.19}$$

and then use a summation by parts explained in the next section.

### 4.5.1 Determination of the average order of $f_2$

#### Step one

Let us express the Dirichlet series of  $f_2$  as the product of two Dirichlet series.  $f_2$  being multiplicative, we have

$$D(f_2, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^{s+2}} = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(p^k)}{p^{(s+2)k}} \right) \tag{4.20}$$

but for all  $k \geq 1$  we have  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$  so

$$\begin{aligned} D(f_2, s) &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{p^{k-1}(p-1)}{p^{(s+2)k}} \right) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{(s+1)k}} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p} \frac{1}{p^{(s+1)k}} \right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p^{s+1} - 1} - \frac{1}{p} \frac{1}{p^{s+1} - 1} \right) \end{aligned}$$

We notice that this product is similar to

$$\prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p^{s+1} - 1} \right) = \zeta(s+1). \quad (4.21)$$

So we now write

$$\begin{aligned} D(f_2, s) &= \zeta(s+1) \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p^{s+1} - 1} - \frac{1}{p(p^{s+1} - 1)} \right) \left( 1 - \frac{1}{p^{s+1}} \right) \\ &= \zeta(s+1) \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p^{s+1} - 1} - \frac{1}{p(p^{s+1} - 1)} - \frac{1}{p^{s+1}} - \frac{1}{p^{s+1}(p^{s+1} - 1)} + \frac{1}{p^{s+2}(p^{s+1} - 1)} \right). \end{aligned}$$

Fortunately, a few simplifications occur here as

$$\frac{1}{p^{s+1} - 1} - \frac{1}{p^{s+1}} = \frac{1}{p^{s+1}(p^{s+1} - 1)}$$

so finally

$$D(f_2, s) = \zeta(s+1) \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{p(p^{s+1} - 1)} + \frac{1}{p^{s+2}(p^{s+1} - 1)} \right). \quad (4.22)$$

## Step two

Our goal is again to find a function  $g$  and a function  $h$  such that  $f_2 = g \star h$  and so that  $D(f_2, s) = D(g, s)D(h, s)$ . So our function  $g$  here would be the function that associates  $1/n$  to  $n$  and which Dirichlet series is  $\zeta(s+1)$  we now need to find the function  $h$  such that

$$D(h, s) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{p(p^{s+1} - 1)} + \frac{1}{p^{s+2}(p^{s+1} - 1)} \right) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} \right).$$

Note that the absolute convergence of this series (expressed as a Euler product here) will be secured by having  $s+2 > 1$  and  $2s+3 > 1$  hence  $s > -1$ . We now

need to identify the terms inside the Euler products

$$\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} = -\frac{1}{p(p^{s+1}-1)} + \frac{1}{p^{s+2}(p^{s+1}-1)} = -\frac{1}{p^{s+2}(1-\frac{1}{p^{s+1}})} + \frac{1}{p^{2s+3}(1-\frac{1}{p^{s+1}})}$$

As we have

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s+1}}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{k(s+1)}}, \quad (4.23)$$

we can deduce that

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} &= -\frac{1}{p^{s+2}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{k(s+1)}} + \frac{1}{p^{2s+3}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{k(s+1)}} \\ &= -\frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{(k+1)s+k+1}} + \frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{(k+2)s+k+2}} \\ &= -\frac{1}{p} \frac{1}{p^{s+1}} = -\frac{1}{p^2} \frac{1}{p^s}. \end{aligned}$$

And finally, if we define the multiplicative function  $h$  by

$$\begin{cases} h(p) = -\frac{1}{p^2}, \\ h(p^k) = 0 \quad \text{for } k \geq 2, \end{cases} \quad (4.24)$$

it meets our requirements. We note that we have  $h(n) = \frac{\mu(n)}{n^2}$  !

### Step three

Let us calculate the average order of  $f_2$  using the convolution  $g \star h$ .

$$f_2(n) = \sum_{\ell m = n} h(\ell) \frac{1}{m}.$$

We have

$$\sum_{n \leq X} f_2(n) = \sum_{\ell m \leq X} h(\ell) \frac{1}{m} = \sum_{\ell \leq X} h(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} \frac{1}{m}, \quad (4.25)$$

but for all real number  $M \geq 1$  we have

$$\sum_{m \leq M} \frac{1}{n} = \ln M + \gamma + \mathcal{O}(1/M). \quad (4.26)$$

Please note that we also have :

$$\sum_{m \leq M} \frac{1}{n} = \ln M + \gamma + \mathcal{O}(M^\sigma) \quad (4.27)$$

for all  $\sigma \in [-1, 0]$  and all  $M \geq 1$  and where  $\gamma$  is the Euler constant.

Here again we need the error term to be less good because of the abscissa of absolute convergence of  $h$  which is  $-1$ .

$$\sum_{n \leq X} f_2(n) = \sum_{\ell \leq X} h(\ell) \left( \ln \frac{X}{\ell} + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{X^\sigma}{\ell^\sigma}\right) \right)$$

And here again, the condition  $\ell \leq X$  can be replaced with  $\ell \geq 1$  as the identity (and estimation) remains true. And so :

$$\sum_{n \leq X} f_2(n) = \ln X \sum_{\ell \geq 1} h(\ell) - \sum_{\ell \geq 1} h(\ell) \ln \ell + \gamma \sum_{\ell \geq 1} h(\ell) + \mathcal{O}\left(X^\sigma \sum_{\ell \geq 1} \frac{|h(\ell)|}{\ell^\sigma}\right).$$

$H(s)$  is absolutely convergent for  $s > -1$  so  $\sum_{\ell \leq 1} |h(\ell)|/\ell^\sigma$  is finite for all  $\sigma > -1$ . And the error term makes sense for  $\sigma \leq 0$  and so for all  $\sigma$  in  $] -1, 0]$ ,

$$\sum_{n \leq X} f_2(n) = \ln X \sum_{\ell \geq 1} h(\ell) - \sum_{\ell \geq 1} h(\ell) \ln \ell + \gamma \sum_{\ell \geq 1} h(\ell) + \mathcal{O}(X^\sigma).$$

### Determination of the constants

First we have

$$\sum_{\ell \geq 1} h(\ell) = \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Then the series

$$\sum_{\ell \geq 1} h(\ell) \ln \ell = \sum_{\ell \geq 1} \frac{\mu(\ell) \ln \ell}{\ell^2} \tag{4.28}$$

is absolutely convergent, as  $\sum \frac{\ln \ell}{\ell^2}$  is convergent.

Note: if we define  $H(s) = D(h, s)$ , the series (4.28) is actually the opposite of  $H'(0)$  where  $H'$  is the derivative of  $H$ .

### 4.5.2 Summation by parts

**Lemma 4.5.1.** *If for some  $\sigma$  in  $] -1, 0]$ ,*

$$\sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n^2} = a \ln X + b + \mathcal{O}(X^\sigma) \tag{4.29}$$

where  $a$  and  $b$  are real numbers, then we have

$$\sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n} = aX + \mathcal{O}(X^{\sigma+1}).$$

*Proof:* We consider that we have  $\sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n^2} = a \ln X + b + \mathcal{O}(X^\sigma)$  and deduce  $\sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n}$ . There are two important things that we will use in this technique. The first one being the simple fact that

$$n = \int_0^n dt$$

and the second one being that for all function  $f$  and for all positive real number  $X$  we have

$$\sum_{n \leq X} f(n) \int_0^n dt = \int_0^X \sum_{t \leq n \leq X} f(n) dt \quad (4.30)$$

Let us name  $S$  the sum  $S(X) = \sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n^2} = a \ln X + b + \mathcal{O}(X^\sigma)$ , we then have

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n} &= \sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n^2} \int_0^n dt = \int_0^X \sum_{t \leq n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n^2} dt \\ &= \int_0^X (S(X) - S(t)) dt = XS(X) - \int_0^X S(t) dt \\ &= aX \ln X + bX + \mathcal{O}(X^{\sigma+1}) - \left[ a(t \ln t - t) \right]_0^X - bX + \mathcal{O}(X^{\sigma+1}) \\ &= aX + \mathcal{O}(X^{\sigma+1}). \end{aligned}$$

□

### 4.5.3 Conclusion

So if we identify the constants used in the summation by parts in (4.29), we have  $a = \frac{1}{\zeta(2)}$  and  $b = \frac{\gamma}{\zeta(2)} + H'(0)$ .

From the above and the summation by parts, we deduce that for all  $\sigma$  in  $]-1, 0]$  we have

$$\frac{1}{X} \sum_{n \leq X} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} + \mathcal{O}(X^\sigma).$$

which concludes Theorem 4.1.2.

## 4.6 Third and last example, proof of Theorem 4.1.3

In this last example,  $f_3(n) = \frac{\mu(n)}{\varphi(n)}$ , it was one of the functions implied in chapter 3 and  $g_3(n) = \frac{\mu(n)}{n}$ , we found a multiplicative function  $h_3$  (named  $h_0$  in chapter 3) in section 3.4, so that  $f_3 = g_3 \star h_3$ , expressing their Dirichlet series with Euler products. The function  $h_3$  is defined with its value for prime powers by

$$\begin{cases} h_3(1) = 1, \\ h_3(p) = -\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p} = -\frac{1}{p(p-1)}, \\ h_3(p^\alpha) = \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha+k-1}} = \frac{1}{p^\alpha} - \frac{1}{p^{\alpha-1}} \frac{1}{p-1}, \end{cases} \quad \text{for } \alpha \geq 2. \quad (4.31)$$

So  $h_3(1) = 1$  and for all prime  $p$  and for all integer  $\alpha \geq 1$ ,  $h_3(p^\alpha) = -\frac{1}{p^\alpha(p-1)} = -\frac{1}{p\varphi(p^\alpha)}$ . And so

$$h_3(n) = \frac{(-1)^{\omega(n)}}{\varphi(n)F(n)}$$

where

$$F(n) = \prod_{p|n} p$$

$F$  is the function that removes the multiplicity order to each prime factor of  $n$ . And  $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ .

Note: we expected to find the abscissa of absolute convergence of  $D(h_3, s)$  strictly less than the one of  $D(f_3, s)$  (which is the same as  $D(g_3, s) = \frac{1}{\zeta(s+1)}$ ). Indeed, the abscissa of absolute convergence of  $D(g_3, s)$  is 1 when the abscissa of absolute convergence of  $D(h_3, s)$  is  $-1$ . As for any real number  $s$ ,

$$\sum_{\alpha \geq 1} \frac{|h_3(p^\alpha)|}{p^{\alpha s}} = \mathcal{O} \left( 1 + \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha s + s + 1}} \right) \quad (4.32)$$

And

$$1 + \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha s + s + 1}} = 1 + \frac{1}{p^{(s+1)+1}} \sum_{\beta \geq 0} \frac{1}{p^{\beta(s+1)}} = \text{Cst} \times \left( 1 + \frac{1}{p^{s+2}} \right)$$

So  $D(|h_3|, s)$  is convergent for all  $s + 2 > 1$  hence  $s > -1$ .

We now find that

**Lemma 4.6.1.** *Let  $h_3$  be the function defined above, then*

$$\sum_{\ell \geq 1} h_3(\ell) = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{\ell \geq 1} |h_3(\ell)| = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{(p-1)^2} \right) = 2.8264\dots$$

*Proof:* We use a Euler product

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq 1} h_3(\ell) &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} h_3(p^k) \right) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k(p-1)} \right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{p-1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k} \right) \end{aligned}$$

hence

$$\sum_{\ell \geq 1} h_3(\ell) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = 0.$$

And we deduce easily the second sum as it is equal to  $\prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p^k(p-1)} \right)$ .  $\square$

We can now prove Theorem 4.1.3.

**Theorem.** For all  $X > 100\,000$ ,

$$\left| \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \right| \leq \frac{0.082}{\log X} + \frac{30}{X^{1/3}}. \quad (4.33)$$

*Proof:* We know from RAMARÉ 2010, Theorem 1.2 that for  $X > 100\,000$

$$\left| \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n} \right| < \frac{1}{69 \log X}. \quad (4.34)$$

Using our identity  $f_3 = g_3 \star h_3$  where  $g_3(n) = \frac{\mu(n)}{n}$ , we have

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} f_3(n) &= \sum_{\ell \leq X} h_3(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m) \\ &= \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_3(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m) + \sum_{\sqrt{X} \leq \ell \leq X} h_3(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m) \end{aligned}$$

In the first term, we use (4.34) as

$$\left| \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m) \right| < \frac{1}{69 \log \frac{X}{\ell}} \leq \frac{1}{69 \log \sqrt{X}}$$

And so

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} h_3(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m) \right| &\leq \frac{1}{69 \log \sqrt{X}} \sum_{\ell \leq \sqrt{X}} |h_3(\ell)| \\ &\leq \frac{2}{69 \log X} \sum_{\ell \geq 1} |h_3(\ell)| = \frac{C_3}{\log X} \end{aligned}$$

As  $\sum |h_3(n)|$  is convergent. And from Lemma 4.6.1 we deduce  $C_3 = 0.0819\dots$

For the second term, we use the Rankin method: for all  $a > 0$  we have

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{X} \leq \ell \leq X} |h_3(\ell)| &\leq \sum_{\sqrt{X} \leq \ell} |h_3(\ell)| \leq \sum_{\sqrt{X} \leq \ell} |h_3(\ell)| \left( \frac{\ell}{\sqrt{X}} \right)^a \\ &\leq \sum_{1 \leq \ell} |h_3(\ell)| \left( \frac{\ell}{\sqrt{X}} \right)^a \\ &\leq \sum_{1 \leq \ell} \frac{|h_3(\ell)|}{\ell^{-a}} \left( \frac{1}{\sqrt{X}} \right)^a. \end{aligned}$$

But  $\sum_{1 \leq \ell} \frac{|h_3(\ell)|}{\ell^{-a}} = D(|h_3|, -a)$  and we know that the Dirichlet series  $D(|h_3|, s)$  is convergent for all  $s > -1$ , so here for all  $a$  such that  $-a > -1$ . We choose  $a = \frac{2}{3}$  and so we find that

$$\sum_{\sqrt{X} \leq \ell \leq X} |h_3(\ell)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{1/3}}\right). \quad (4.35)$$

More precisely, we expand  $D(|h_3|, -2/3)$  into a Euler product to calculate it, the same way as we did in Lemma 4.6.1 and we obtain

$$D(|h_3|, -2/3) = \sum_{1 \leq n} |h_3(n)| n^{2/3} = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{(p-1)(p^{1/3}-1)} \right) \leq 27 \quad (4.36)$$

Indeed,

$$\begin{aligned} \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{(p-1)(p^{1/3}-1)} \right) &= \prod_{2 \leq p < 100000} \left( 1 + \frac{1}{(p-1)(p^{1/3}-1)} \right) \\ &\quad + \prod_{p \geq 100000} \left( 1 + \frac{1}{(p-1)(p^{1/3}-1)} \right) \end{aligned}$$

We estimate the first term with GP and get 26.0527.... We bound the second term

using an integral. As it is equal to

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{p \geq 100000} \log\left(1 + \frac{1}{(p-1)(p^{1/3}-1)}\right)\right) &< \exp\left(\sum_{n \geq 100000} \frac{1}{(n-1)(n^{1/3}-1)}\right) \\ &< \sum_{n \geq 100000} \frac{1.1}{n^{4/3}} < 1.1 \int_{99999}^{+\infty} \frac{dt}{t^{4/3}} \end{aligned}$$

The last integral is equal to  $\frac{3}{99999^{1/3}} = 0.0646\dots$  and so the infinite product is indeed bounded by 27.

Now because  $\sum g_3(n)$  is also convergent,  $\left|\sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m)\right|$  is bounded by 1 (from (4.34)). Hence

$$\left|\sum_{\sqrt{X} \leq \ell \leq X} h_3(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{1/3}}\right).$$

More precisely,  $\sum_{1 \leq n} |h_3(n)|$  as estimated in Lemma 4.6.1,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\sqrt{X} \leq \ell \leq X} h_3(\ell) \sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m)\right| &\leq \left|\sum_{m \leq \frac{X}{\ell}} g_3(m)\right| \sum_{1 \leq n} |h_3(n)| \frac{1}{X^{1/3}} \\ &\leq \sum_{1 \leq n} |h_3(n)| \frac{1}{X^{1/3}} \leq \frac{3}{X^{1/3}} \end{aligned}$$

□

The theorem holds for any  $X > 100000$  but we can check it holds also for  $2 \leq X \leq 100000$  with GP PARI and the following script :

```
somme=1.0;
for(k = 2, 100000, somme += moebius(k)/eulerphi(k);
if(abs(somme)>0.082/log(k)+30/$k^{1/3}$,print("Problem at ", k)))
```

We can generalize Theorem 4.1.3 to any function  $f = g_3 \star h$  where  $h$  is a slight perturbation.

**Theorem 4.6.1.** *For all function  $f$  defined by  $f = g_3 \star h$  where  $g_3(n) = \frac{\mu(n)}{n}$  and  $h$  is such that  $D(|h|, s)$  is convergent for all  $s > -1$ , we have for all  $X > 100000$ ,*

$$\left|\sum_{n \leq X} f(n)\right| \leq \frac{C}{\log X} + \frac{C'}{X^{1/3}}$$

where  $C = \frac{2}{69}D(|h|, 0)$  and  $C' = D(|h|, -2/3) + D(|h|, 0)$ .

*Proof:* We follow exactly the method above, using the same bound (4.34), we

use the fact that  $D(g_3, s) = \frac{1}{\zeta(s+1)}$  and we can find  $h$  from its Dirichlet series which will be convergent for all  $s > -1$ .  $\square$

## Divertimento

The summation by part is such an interesting tool that we wish to use it again to show its strength. Let us suppose we are interested in finding the average order of  $f_0/n$ , it will now be very simple !

This time the idea is to use the following property,

$$\sum_{n \leq t} 1 = t + \mathcal{O}(1).$$

And to notice that :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{X} + \int_n^X \frac{dt}{t^2}. \quad (4.37)$$

And so :

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{n} = \frac{\sum_{n \leq X} 1}{X} + \int_1^X \sum_{n \leq t} 1 \frac{dt}{t^2} = \ln X + \mathcal{O}(1).$$

We use these properties to show that  $\sum_{n \leq X} \frac{f_0(n)}{n} = 2C_0X + \mathcal{O}(X^\sigma)$  for all  $\sigma$ , a real number in  $]1/2, 1]$ .

Indeed, as in (4.37) we have

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{f_0(n)}{n} &= \sum_{n \leq X} f_0(n) \left( \frac{1}{X} + \int_n^X \frac{dt}{t^2} \right) = \frac{\sum_{n \leq X} f_0(n)}{X} + \int_1^X \sum_{n \leq t} f_0(n) \frac{dt}{t^2} \\ &= C_0X + \mathcal{O}(X^\sigma) + C_0 \int_1^X dt + \mathcal{O} \left( \int_1^X t^{\sigma-1} dt \right) \\ &= 2C_0X + \mathcal{O}(X^\sigma). \end{aligned}$$

This concludes our work on the convolution method, and this whole work. We hope the reader enjoyed her/his journey from the asymptotic sieve, the theorem on twins almost primes and finally with this method to get average orders of multiplicative functions.

# Bibliographie

- [Apo76] Tom M. APOSTOL. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1976 (cf. p. 111).
- [Bom75] Enrico BOMBIERI. « On twin almost primes ». In : *Acta Arithmetica* (1975), p. 177–193 (cf. p. 11).
- [Che73] J.R. CHEN. « On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes ». In : *Sci. Sinica* 16 (1973), p. 157–176 (cf. p. 10).
- [EH70] Peter D. T. A ELLIOTT et Heini HALBERSTAM. « A conjecture in prime number theory ». In : *Symposia Mathematica IV* (1970), p. 59–72 (cf. p. 9).
- [Fin03] S.R FINCH. « Mathematical Constants ». In : Cambridge, England : Cambridge University Press, 2003. Chap. 2.21, p. 166–171 (cf. p. 81).
- [FG92] John FRIEDLANDER et Andrew GRANVILLE. « Limitations to the equidistribution of primes. III ». In : *Compositio Math.* 81.1 (1992), p. 19–32. URL : [http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1992\\_\\_81\\_1\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1992__81_1_19_0) (cf. p. 13).
- [FI78] John FRIEDLANDER et Henryk IWANIEC. « On Bombieri's asymptotic sieve ». In : *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* 719–756 (1978) (cf. p. 11, 35, 78).
- [GS70] Harold G. DIAMOND et John STEINIG. « An Elementary Proof of the Prime Number Theorem with a Remainder Term ». In : *Inventiones math.* 11 (1970), p. 199–258 (cf. p. 18, 21, 23, 33, 34).
- [God12] Roger GODEMENT. *Analysis I, Convergence, Elementary functions*. Universitext. Springer, déc. 2012 (cf. p. 112).
- [HR11] Heini HALBERSTAM et Hans-Egon RICHERT. *Sieve methods*. Sous la dir. de Dover Publications INC. 2011 (cf. p. 73).
- [HR15] G.H. HARDY et Marcel RIESZ. *The general theory of Dirichlet's series*. Cambridge University Press, 1915 (cf. p. 111).
- [HR73] H.L. MONTGOMERY et R.C. VAUGHAN. « The large sieve ». In : *Mathematika* 20 (déc. 1973), p. 119–134 (cf. p. 103).
- [Jea81] Paul Erdős et JEAN-LOUIS NICOLAS. « Sur la fonction nombre de facteurs premiers de N ». In : *L'Enseignement mathématique* tome XXVII.fasc. 1-2 (1981) (cf. p. 74).
- [Lan55] Edmund LANDAU. « Vorlesungen Über Zahlentheorie ». In : t. 2. Chelsea Publishing Company, 1955. Chap. 12, p. 157 (cf. p. 82).

- [LS73] A. F. LAVRIK et A. S. SOBIROV. « The remainder term in the elementary proof of the prime number theorem ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 211 (1973), p. 534–536 (cf. p. 82).
- [MPh03] George M. PHILLIPS. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Sous la dir. de CMS Books in MATHEMATICS. 2003 (cf. p. 61, 62).
- [Oli12] Perrine Berment et OLIVIER RAMARÉ. « Estimation de l'ordre moyen d'une fonction arithmétique par la méthode de convolution ». In : (2012) (cf. p. 90, 108).
- [Ram10] O. RAMARÉ. « On Bombieri's asymptotic sieve ». In : *Journal of Number Theory* (2010), p. 1155–1189 (cf. p. 11, 16, 27, 28, 33–35, 48, 53, 125).
- [RS62] J. Barkley ROSSER et Lowell SCHOENFELD. « Approximate formulas for some functions of prime numbers ». In : *Illinois Journal of Mathematics* (1962), p. 64–94 (cf. p. 42).
- [Sit85] R. SITARAMACHANDRARAO. « On an error term of Landau ». In : *Rocky Mountain J. Math.* 15 (1985), p. 579–588 (cf. p. 103).
- [Ten90] Gérald TENENBAUM. « Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres ». In : sous la dir. de BELIN. Echelles. Belin, 1990. Chap. 1. Méthodes élémentaires (cf. p. 73, 112).
- [Wu04] Jie WU. « Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem ». In : *Acta Arithmetica* (2004), p. 215–273 (cf. p. 11).
- [Zha14] Ytang ZHANG. « Bounded gaps between primes ». In : *Annals of Mathematics* 179 (2014), p. 1121–1174 (cf. p. 52).