جامعة العلوم و التكنولوجيا و الطب
Université des Sciences de Technologie et de Médecine
USTM

Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques et Informatique
Unité de Recherche Algèbre, Géométrie Appliqués au Développement
Master Mathématiques et Applications

Projet de Fin d'Études (PFE) Preparé Sous Le Théme :

L'inégalité de Pólya-Vinogradov

Encadrants :
Pr. Olivier Ramaré (Lille 1)
Pr. Mohamed Abdallahi Beddi (USTM)

Présenté Par :
Mohamed Lemine Ould Inejih

Année Universitaire : 2014-2015

Table des matières

Introduction

Dans ce projet de fin d'études nous allons étudier profondément l'inégalité de Polya-Vinogradov. Pour ce faire nous avons divisé ce travail en deux chapitres. Dans le premier chapitre nous allons aborder les notions de base sur le caractère de Dirichlet χ d'une manière générale ce qui va nous apporter une bonne compréhension du sujet. Dans le deuxième chapitre nous allons nous focaliser sur le vif du sujet en étudiant d'une manière profonde l'inégalité de Polya-Vinogradov qui est une somme sur le caractère de Dirichlet comme le montre le formule suivante : $\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)$ avec M et N sont deux entiers. Et il est important de signaler que nous avons utilisé l'analyse de Fourier et ainsi ajouté une section pour des résultats trigonométriques

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Caractère sur un groupe fini

Définition 1.1.1.
Un **caractère sur un groupe fini G** est un homomorphisme $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$;
i.e. $\quad \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$

De plus, on peut définir le produit et l'inverse :
— $\chi\chi^{'}(g) = \chi(g)\chi^{'}(g), \quad$ où $\chi, \chi^{'}$ sont des caractères sur G ;
— $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1}$.
Donc l'ensemble des caractères sur G construit un groupe, qu'on note $\widehat{G}$.

Exemple 1.1.1 (Les caractères sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.**
Soit n entier quelconque. Nous considèrons pour $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} f_m \ &: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ x \ &\mapsto \quad e^{2i\pi mx/n} \end{aligned}$$

C'est un caractère de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, et tout caractère de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est de ce type. En effet soit χ un tel caracère. On a : $\chi(1)^n = 1$ donc $\chi(1) = \omega$ est une racine n-ième de l'unité, et χ est alors tout simplement l'application $x \ \mapsto \omega^x$.
L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \\ m \ &\mapsto \ f_m \end{aligned}$$

est donc clairement un isomorphisme : le groupe des caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème 1.1.1.
Si G est un groupe fini commutatif, alors $\widehat{G} \cong G$; et $|\widehat{G}| = |G|$.

Nous établissons ce résultat en deux étapes.

Première étape

Nous remarquons que :

$$\widehat{G'} \times \widehat{G''} \to \widehat{G' \times G''}$$

$$(\chi^{'}, \chi^{''}) \mapsto \chi^{'} \times \chi^{''} : G' \times G'' \to \mathbb{C}$$

$$(x', x'') \mapsto \chi^{'}(x')\chi^{''}(x^{''})$$

est une bijection.

Démonstration.
L'injectivité est triviale :

$$\chi^{'}\chi^{''} = 1 \Rightarrow (\chi^{'}\chi^{''})(x', 0) = 1 = \chi^{'}(x'),$$

et cela pour tout $x' \in G'$, donc $\chi^{'} = 1$. De même $\chi^{''} = 1$.

Pour la surjectivité, on voit que si χ est un caractère de $\widehat{G' \times G''}$, $\chi' : x' \mapsto \chi(x', 0)$ est un caractère de G', de même on définit χ'' ; on a bien $\chi^{'}(x')\chi^{''}(x^{''}) = \chi(x', x'')$. □

Seconde étape

Pour montrer comme annoncé que $\widehat{G'} \simeq G$, on utilise le théorème de structures des groupes abéliens finis et on écrit G comme produit de groupes abéliens cycliques :

$$G \simeq \prod_{i=1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}.$$

En appliquent le lemme ci-dessus par récurrence, on obtient

$$\widehat{G} \simeq \prod_{i=1} \widehat{\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}} \simeq \prod_{i=1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} = G.$$

1.2 Caractère de Dirichlet modulo N

Définition 1.2.1.
Un **caractère de Dirichlet modulo** N, pour $N \in \mathbb{N}$, est un caractère défini sur le groupe des unités de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, à savoir sur

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} = \{ \ n \pmod N \ \text{ tel que } \ (n, N) = 1\}.$$

D'autre part, on peut définir un caractére de Dirichlet modulo N comme étant une fonction $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\chi(n) := \begin{cases} \chi(n \pmod{N}) & \text{si } (n, N) = 1 \\ 0 & \text{si } (n, N) > 1. \end{cases}$$

qui possède les propriétés suivantes :
- $\chi(n) = 0 \Leftrightarrow (n, N) > 1$,
  i.e. $\chi(n) = 0, \ \forall n$ possédant un diviseur commun avec N ;
- χ est complétement multiplicatif,
  i.e. $\chi(1) = 1$ et $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$;
- $\chi(n)$ dépend uniquement de $n \pmod{N}$.

Remarque 1.2.1.
Il existe donc deux manières de définir un caractère modulo N ; à savoir :
- soit grâce à l'homomorphisme $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^*$,
- soit grâce à la fonction multiplicative $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Définition 1.2.2.
Pour tout N, on appelle '**caractère principal**' $\chi_0 \pmod{N}$, la fonction multiplicative $\chi_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, définie par

$$\chi_0(n) := \begin{cases} 1 \text{ si} (n, N) = 1 \\ \\ 0 \text{ si} (n, N) > 1. \end{cases}$$

On la désigne parfois par caractère neutre ou trivial de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.

Définition 1.2.3.
Pour tout $p \in \mathbb{P}$, on appelle '**symbole de Legendre**' le caractère modulo p de $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \ n \to \{-1, 0, 1\}$, défini par :

$$(\frac{n}{p}) := \begin{cases} 0 & \text{si } p|n. \\ 1 & \text{si } p \nmid n \text{ mais il existe un entier } k \text{ tel que } n = k^2 \pmod{p}. \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici deux théorèmes et leurs corollaires concernant les caractères de Dirichlet modulo N, mettant en évidence la place particulière qu'occupe la fonction d'Euler de N, à savoir :

La fonction d'Euler ϕ

Définition 1.2.4.
On dénote par $\phi(N)$ le nombre d'entiers positifs plus petit ou égal à N et premier avec N, i.e. l'application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par

$$\phi(N) := \mathrm{Card}\{n \quad \text{tel que} \quad 0 < n \leq N \quad \text{et} \quad (n, N) = 1\}, \qquad \phi(1) = 1.$$

Or si un nombre n est sans diviseur commun avec N, il en est de même pour tout nombre x congru à n modulo N. On peut donc aussi écrire

$$\phi(N) = \mathrm{Card}\{n \pmod N \quad \text{tel que} \quad (n, N) = 1\} = \mathrm{Card}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}).$$

Théorème 1.2.1. *(Lagrange)*
Soit G un groupe fini, et $g \in G$ on a $g^{|G|} = 1$.

Démonstration.
Notons $H =< x >$ le sous-groupe engendré par x et m son ordre, donc $x^m = 1$. Alors on a m divise $|G|$ donc il existe un entier n tel que $|G| = mn$.
D'où

$$\begin{aligned} g^{|G|} &= g^{mn} \\ &= (g^m)^n \\ &= \\ &= 1^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Par conséquent, le caractère χ modulo N est une $\phi(N)$-ième racine de l'unité.

Théorème 1.2.2. *(Formules d'orthogonalité des caractères)*
Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N.
Alors

$$\sum_{n \pmod N} \chi(n) = \begin{cases} \phi(N) & \text{si } \chi = \chi_0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.
1^{er} cas : $\chi = \chi_0$, trivial.
2^{eme} cas : $\chi \neq \chi_0$.
Par hypothèse, il existe un entier m, sans diviseur commun avec n et tel que

$\chi(m) \neq 1$.
Rapplons que l'aplication $n \mapsto mn$ est une bijection sur $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$.
On a

$$\begin{aligned}\sum_{n \pmod N} \chi(n) = \sum_{n \pmod N} \chi(mn) &= \sum_{n \pmod N} \chi(n)\chi(m) \\ &= (\sum_{n \pmod N} \chi(n))\chi(m) \\ &\Rightarrow (1-\chi(m)) \sum_{n \pmod N} \chi(n) = 0,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\sum_{n \pmod N} \chi(n) = 0.$$

□

Corollaire 1.2.1.
Soit χ_1 et χ_2 deux caractères de Dirichlet modulo N. Alors

$$\frac{1}{\phi(N)} \sum_{n(mod\ N)} \chi_1(n)\overline{\chi_2}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.
Il suffit de remplacer simplement, dans le théorème précédent, χ par $\chi_1\overline{\chi_2}$ et utiliser le fait que χ_0 est l'élément neutre de $\hat{\mathrm{G}}$.

□

Théorème 1.2.3.
Soit $n \in N$. Alors

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} \phi(N) & \text{si } n \equiv 1 \pmod N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 1.2.2.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}, (b, N) = 1$.
Alors

$$\frac{1}{\phi(N)} \sum_{\chi} \chi(a)\overline{\chi}(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv b \pmod N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.
Si $n \equiv 1 \pmod N$, c'est évident.
Sinon, donc il existe un caractére χ_1 tel que $\chi_1(n) \neq 1$.
Alors

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \sum_{\chi} \chi_1(n)(\chi\overline{\chi_1})(n) = \chi_1(n) \sum_{\chi'} \chi'(n)$$

par changement de variable. Donc la somme est nulle.

Quant au corollaire, il suffit également d'effectuer un remplacement dans le théorème, à savoir, remplacer n par $nb \cong a \pmod N$. □

Proposition 1.2.1.
Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. On a

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}.$$

En particulier, $\phi(p) = p - 1$.

Démonstration.
On a

$$\phi(p^\alpha) = Card\{n : 0 < n \leq p^\alpha - 1 \;\; t.q. \;\; (n, p^\alpha) = 1\}.$$

On vérifie facilement que si $0 < n \leq p^\alpha - 1$, si et seulement si $p|n$.
Or les multiples de p dans l'intervalle $[|0, p^\alpha - 1|]$ sont

$$0, p, 2p, \ldots, p(p^{\alpha-1} - 1).$$

Il y en a donc $p^{\alpha-1}$. D'où $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. □

Théorème 1.2.4.
Soit $n \geq 2$. On a

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

où $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

Démonstration.
Soit $n = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ la décomposition canonique de n en produits de facteurs premiers. Comme ϕ est multiplicative donc on a

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{k} \phi(p_i^{r_i}).$$

Or $\phi(p_i^{r_i}) = p_i^{r_i} - p_i^{r_i - 1} = p_i^{r_i}(1 - \frac{1}{p_i})$, ce qui donne

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

□

1.3 Caractère induit et Caractère primitif

Soit N un diviseur de M, $N \neq$ M, et $\chi^{'}$ un caractère modulo N. Considérons les applications suivantes :

$$\overbrace{(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{\times}}^{(\mathbb{Z}/kN\mathbb{Z})^{\times}} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^{\times}, \quad \overbrace{(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{\times}}^{(\mathbb{Z}/kN\mathbb{Z})^{\times}} \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \quad \text{et} \quad (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \xrightarrow{\chi'} \mathbb{C}^{\times}.$$

Définition 1.3.1.
$\chi = \chi^{'} \circ \pi$ est un caractère de Dirichlet modulo N. On dit que χ est induit par χ', et on qualifie un tel caractère de **'caractère non primitif '** .

Définition 1.3.2.
Un caractère qui ne peut s'obtenir de cette manière est qualifié de **'caractère primitif '** ou **'propre'**.

Définition 1.3.3.
Le nombre N ayant la propriété que le caractère découlant du groupe $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{\times}$ soit induit par le caractère primitif $\chi^{'}$ modulo N, s'appelle le **conducteur de ce dernier**.

Théorème 1.3.1.
L'ensemble des modules résolvants de caractère χ mod k est moins de k^{*} multiple des modules résolvants, et il existe exactement un caractère équivalent a χ pour chaque multiple de k^{*}.

Démonstration.
Comme $\chi \approx \chi$, l'ensemble de module résolvants n'est pas vide et donc a au moins k^{*} éléments. Si k_1 est un module résolvant quelconque, alors si $k_2 = (k_1, k^{*})$ (en utilisant transitif). D'où $k|k^{*}$, alors $k_2 \leq k^{*}$, mais k^{*} est le plus petit, alors $k_2 = k^{*}$. Puisque $k_2|k_1$, est aussi $k^{*}|k_1$. D'où tout module résolvant est mulmtiple de k^{*}. D'aprés le lemme 3 dans ... chaque multiple est un module résolvant de k^{*}, d'aprés le lemme 2 dans ... et transivité il ne peut y en avoir qu'un caractère de tout module équivalent a χ. $\square$

Chapitre 2

L'inégalité de Polya-Vinogradov

Définition 2.0.1.
Soient q un entier naturel, A et B des nombres réels positifs ; Nous notons que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{A,B}(q)$ la classe de toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tel que $|f(n)|$ est bornée par A pour tout n, $f(n+q) = f(n)$ alors f est périodique de période q, et pour tout entier naturel K, nous avons l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{q} \left| \sum_{k=1}^{K} f(n+k) \right|^2 \leq BqK. \tag{1}$$

Théorème 2.0.1 (Edward Dobrowolski et Kenneth S.Wlliams).
Soient N et M deux entiers avec $1 \leq N \leq q$. Puis si $f \in \mathcal{F}_{A,B}(q)$, alors on a

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} f(n) \right| \leq \frac{\sqrt{B}}{2\log 2} \sqrt{q} \log q + 3A\sqrt{q}. \tag{2}$$

Cette estimation a été améliorée par Bachman et Rachakonda [1] qui ont obtenu

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} f(n) \right| \leq \frac{\sqrt{B}}{3\log 3} \sqrt{q} \log q + (5\sqrt{B} + \frac{3}{2}A)\sqrt{q}. \tag{3}$$

Par une méthode différente, en utilisant l'analyse de Fourier, Frolenkov et Soundararajan à améliorer ces résultats.

2.1 Démonstration du théorème 2.0.1

Si $1 \leq q \leq 9$ alors (2) est triviale car

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} f(n) \right| \leq \sum_{n=M+1}^{M+N} |f(n)| \leq AN \leq 3A\sqrt{q} \leq \frac{\sqrt{B}}{2\log 2} \sqrt{q} \log q + 3A\sqrt{q}.$$

Ainsi on peut supposer que $q \geq 10$. Si $N \leq \sqrt{q}$ alors l'inégalité (2) est triviale

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| \leq AN \leq 3A\sqrt{q} \leq \frac{\sqrt{B}}{2\log 2}\sqrt{q}\log q + 3A\sqrt{q}.$$

Ainsi on peut également supposer que $N > \sqrt{q}$. Soit

$$S = \{M+1, M+2, \ldots, M+N\}, \tag{2.1}$$

et on définit

$$r = \left[\frac{\log q}{2\log 2}\right], \qquad c = \frac{N}{2^r} \tag{2.2}$$

$$h_j = 2^{r-j-1}[c], \qquad j = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{2.3}$$

On note que $r \geq [\log 10/(2\log 2)] = 1$, et que

$$2^r \leq \sqrt{q} < 2^{r+1}, \qquad 1 < c < 2\sqrt{q}. \tag{2.4}$$

A partir de $(2,2)-(2,4)$, on voit que le h_j sont des entiers positifs satisfaisant

$$N \geq 2h_0, \quad N - h_0 - h_1 - \ldots - h_{j-1} \geq 2h_j \quad (j = 1, \ldots, r-1). \tag{2.5}$$

Ensuite nous construisons $(N-h_0+1)r$ ensembles $S_{i,j}$ $(i = 1, \ldots, N-h_0+1;\ j = 1, \ldots, r)$ tels que pour $k = 1, \ldots r$,
(2.6) $S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k}$ est constitué exactement de $h_0+\cdots+h_{k-1}$ des entiers consécutifs de S.
pour $i = 1, \ldots, N+h_0+1$. Nous fixons

$$S_{i,1} = \{M+i, M+i+1, \ldots, M+i+h_0-1\}. \tag{2.7}$$

Il est clair que chaque $S_{i,1}$ est une séquence h_0 des entiers de S.
Supposons que $S_{i,1}, S_{i,2}, \ldots S_{i,k}$, (où k un entier et $1 \leq k \leq r-1$), sont construits tels que pour $j = 1, \ldots, k$ l'ensemble $S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,j}$ est exactement $h_0+h_1+\cdots+h_{j-1}$ des entiers consécutifs de S.
Nous montrons comment construire $S_{i,k+1}$ pour que $S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k+1}$ est exactement $h_0+\cdots+h_k$ des entiers consécutifs de S. Soit

$$L = \{s \in S : s < \min(S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k})\},$$
$$R = \{s \in S : s > \max(S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k})\}.$$

On a

$$\begin{aligned}|L|+|R| &= |S| - |(S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k})|\\ &= N-(h_0+h_1+\cdots+h_{k-1}) \geq 2h_k,\end{aligned}$$

pour que $\max(|L|,|K|)\geq h_k$. Si $|L|\geq|R|$, afin que $|L|\geq h_k$, nous fixons

$$S_{i,k+1}=\{\min(S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k})-h_k,\cdots,\min(S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k})-1\},$$

alors que , si $|L|<|R|$, pour que $|R|\geq h_k$, nous fixons

$$S_{i,k+1}=\{\min(S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k})+1,\cdots,\max(S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k})+h_k\}.$$

Dans les deux cas $S_{i,k+1}$ se compose de h_k des entiers consécutifs de S tels que $S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,k+1}$ contient $h_0+\cdots+h_k$ entiers consécutifs de S. Cela complété la construction nécessaire.
Ensuite, pour $i=1,\cdots,N-h_0+1$, nous fixons

$$S_i=S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,r}.$$

On observe que

$$\begin{aligned}|S\setminus S_i| &= \left|S-\bigcup_{j=1}^{r}S_{i,j}\right|\\ &= N-(h_0+h_1+\cdots+h_{r-1})\\ &= c2^r-(2^{r-1}+2^{r-2}+\cdots+1)[c]\\ &= c2^r-(2^r-1)[c]=(c-[c])2^r+[c]\\ &< 2^r+c<\sqrt{q}+2\sqrt{q}, \quad (\text{ pour } \quad (2.4)),\end{aligned}$$

afin que

$$(2,8) \qquad |S\setminus S_i|<3\sqrt{q}, \qquad i=1,\ldots N-h_0+1.$$

Maintenant, pour $i=1,\ldots,N-h_0+1$, on a

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}f(n)\right|=\left|\sum_{n\in S}f(n)\right|\leq\left|\sum_{n\in S_i}f(n)\right|+\left|\sum_{n\in S-S_i}f(n)\right|,$$

En utilisant (1) et (2.8), on obtient

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| \leq \left|\sum_{n\in S_i} f(n)\right| + 3A\sqrt{q} \qquad (i=1,\ldots,N-h_0+1). \tag{2.9}$$

On somme (2,9) sur i, on obtient

$$\begin{aligned}(N-h_0+1)\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| &= \sum_{i=1}^{N-h_0+1}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N-h_0+1}\left(\left|\sum_{n\in S_i} f(n)\right| + 3A\sqrt{q}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N-h_0+1}\left|\sum_{n\in S_i} f(n)\right| + 3A\sqrt{q}(N-h_0+1),\end{aligned}$$

afin que

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| \leq \frac{1}{N-h_0+1}\sum_{i=1}^{N-h_0+1}\left|\sum_{n\in S_i} f(n)\right| + 3A\sqrt{q}. \tag{2.10}$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N-h_0+1}\left|\sum_{n\in S_i} f(n)\right| &\leq \sum_{i=1}^{N-h_0+1}\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{n\in S_{i,j}} f(n)\right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{N-h_0+1}\sum_{j=1}^{r} 1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N-h_0+1}\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{n\in S_{i,j}} f(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(N-h_0+1)r}\left(\sum_{i=1}^{N-h_0+1}\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{n\in S_{i,j}} f(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

afin que

$$(2.11)\qquad \frac{1}{N-h_0+1}\sum_{i=1}^{N-h_0+1}\left|\sum_{n\in S_i} f(n)\right| \leq \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{N-h_0+1}}\left(\sum_{i=1}^{N-h_0+1}\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{n\in S_{i,j}} f(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En outre nous avons

$$(2.12)\qquad \sum_{i=1}^{N-h_0+1}\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{n\in S_{i,j}} f(n)\right|^2 = \sum_{i=1}^{N-h_0+1}\sum_{j=1}^{r}\sum_{b=M}^{M+N-h_{j-1}}\left|\sum_{\substack{n\in S_{i,j}\\ S_{i,j}=\{b+1,\ldots,b+h_{j-1}\}}} f(n)\right|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{r}\sum_{b=M}^{M+N-h_{j-1}} N_j(b)\left|\sum_{t=1}^{h_{j-1}} f(b+t)\right|^2,$$

où $N_j(b)$ = nombre de i $(1 \leq i \leq N-h_0+1)$ tels que $S_{i,j} = \{b+1,\ldots,b+h_{j-1}\}$.

Lemme 2.1.1.
Pour $1 \leq j \leq r$, la fonction F_j qui à $i \in \{1,\ldots,N-h_0-1\}$ associe le plus petit élément de $S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,j}$

et

la fonction G_j qui à $i \in \{1,\ldots,N-h_0-1\}$ associe le plus grand élément de $S_{i,1}\cup\cdots\cup S_{i,j}$

sont deux fonctions dont le graphe est constitué d'au plus 2^{j-1} segments de droite (de pente 1)

Démonstration.
Pour $j=1$, on a pour $i \in \{1,\ldots,N-h_0-1\}$
$S_{i,1} = \{M+i, M+i+1,\ldots,M+i+h_0-1\}$.
Donc
$$F_1(i) = \min(S_{i,1}) = M+i$$
et
$$G_1(i) = \max(S_{i,1}) = M+i+h_0-1.$$

Donc le graphe de F_1 (respectivement G_1) est constitué d'un seul segment de la droite de l'équation $y = x+M$ (respectivement $y = x+M+h_0-1$) avec $x \in \{1,\ldots,N-h_0-1\}$ de pente 1 car $x \in \{1,\ldots,N-h_0-1\}$. Ainsi la résultat est vraie pour $j=1$.
Supposons donc que le lemme est vrai pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$, et montrons le lemme pour $j+1$.

Si $|L| \geq |R|$, alors

$$\begin{aligned} S_{i,j+1} &= \{\min(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j}) - h_j, \cdots, \min(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j}) - 1\} \\ &= \{F_j(i) - h_j, \cdots,\ F_j(i)) - 1\}, \end{aligned}$$

donc $\min(S_{i,j+1}) = F_j(i) - h_j$ (ne dépende de i).

D'où

$$\begin{aligned} F_{j+1}(i) &= \min(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j+1}) \\ &= \min(\min(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j}), \min(S_{i,j+1})) \\ &= \min(F_j(i), F_j(i) - h_j) \\ &= F_j(i) - h_j. \end{aligned}$$

Si $|L| < |R|$, alors

$$\begin{aligned} S_{i,j+1} &= \{\max(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j}) + 1, \cdots, \max(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j}) + h_j\} \\ &= \{G_j(i) + 1, \cdots,\ G_j(i)) + h_j\}, \end{aligned}$$

donc $\min(S_{i,j+1}) = G_j(i) + 1$.

D'où

$$\begin{aligned} F_{i,j+1} &= \min(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j+1}) \\ &= \min(\min(S_{i,1} \cup \cdots \cup S_{i,j}), \min(S_{i,j+1})) \\ &= \min(F_j(i), G_j(i) + 1) \\ &= F_j(i). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence le graphe de F_j est constitué d'au plus 2^{j-1} segments de droite (de pente 1) et on a

$$F_{j+1}(i) = \begin{cases} F_j(i) - h_j & \text{si } |L| \geq |R| \\ F_j(i) & \text{si } |L| < |R|. \end{cases}$$

Alors le graphe de F_j est constitué d'au plus $2 \cdot 2^{j-1} = 2^j$ segments de droite (de pente 1).

De même pour $G_{i,j+1}$.

Ainsi on obtient ce lemme $\square$

d'après le lemme $N_j(b) \leq 2^{j-1}, \quad j = 1, \ldots, r$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r} \quad \sum_{b=M}^{M+N-h_{j-1}} N_j(b) \left| \sum_{t=1}^{h_{j-1}} f(b+t) \right|^2 & \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} 2^{j-1} \sum_{b=M}^{M+N-h_{j-1}} \left| \sum_{t=1}^{h_{j-1}} f(b+t) \right|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} 2^{j-1} \sum_{b=M}^{M+q} \left| \sum_{t=1}^{h_{j-1}} f(b+t) \right|^2 \quad \text{(comme } N - h_{j-1} < N \leq q\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{r} 2^{j-1} \sum_{b=1}^{q} \left| \sum_{t=1}^{h_{j-1}} f(b+t) \right|^2 \quad \text{(par (1))} \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} 2^{j-1} B h_{j-1} k \quad \text{(par (1))},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{r} \quad \sum_{b=M}^{M+N-h_{j-1}} N_j(b) \left| \sum_{t=1}^{h_{j-1}} f(b+t) \right|^2 \leq rBq2^{r-1}[c]. \tag{2.13}$$

Ainsi, par (2.10)-(2.13), (2.5),(2.3), et (2.2), on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} f(n) \right| &\leq \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{N - h_0 + 1}} \sqrt{rBq2^{r-1}[c]} + 3A\sqrt{q} \\
&= \frac{r}{\sqrt{N - h_0 + 1}} \sqrt{B}\sqrt{q} 2^{(r-1)/2} \sqrt{[c]} + 3A\sqrt{q} \\
&\leq \frac{r}{\sqrt{2h_1}} \sqrt{B}\sqrt{q} 2^{(r-1)/2} \sqrt{[c]} + 3A\sqrt{q} \\
&= \frac{r\sqrt{B}\sqrt{q} 2^{(r-1)/2}}{\sqrt{2}\sqrt{h_1}} \frac{\sqrt{h_1}}{2^{(r/2)-1}} + 3A\sqrt{q} \\
&= r\sqrt{B}\sqrt{q} + 3A\sqrt{q} \leq \sqrt{B}\sqrt{q} \frac{\log q}{2 \log 2} + 3A\sqrt{q}.
\end{aligned}$$

D'où leu résultat

Théorème 2.1.1 (D.A. Frolenkov K. Soundararajan).
Soient $q \geq 100$, et $f \in \mathcal{F}_{A,B}(q)$. Nous avons

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| \leq \frac{\sqrt{qB}}{\pi\sqrt{2}}(\log q + 6) + A\sqrt{q}. \tag{4}$$

Corollaire 2.1.1.
Soit $q \geq 100$. Pour tout caractère non principal $\chi \pmod q$, on a

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)\right| \leq \frac{\sqrt{q}}{\pi\sqrt{2}}(\log q + 6) + \sqrt{q}. \tag{5}$$

Théorème 2.1.2.
Soit $\chi \pmod q$ un caractère primitif de Dirichlet . Si (χ est pair tel que $\chi(-1) = 1$) et $q \geq 1200$, on a

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)\right| \leq \frac{2\sqrt{q}}{\pi^2}\log q + \sqrt{q}.$$

Si χ est impair (tel que $\chi(-1) = -1$ et $q \geq 40$ on a

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{q}\log q + \sqrt{q}.$$

Théorème 2.1.3.
Soient M et N deux entiers avec $N \geq 1$. Si χ un caractère non principal modulo q, alors

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) = \frac{\sqrt{q}\log q}{2\log 2} + 3\sqrt{q}.$$

Démonstration.
Soient χ un caractère non principal modulo q, M et N deux entiers avec $N \geq 1$. Maintenant $\sum_n \chi(n) = 0$ si n parcourt un système de résidu complet modulo q, afin que $\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) = \sum_{n=M+1}^{M+N-q[N/q]} \chi(n)$. Par conséquent on peut admettre que $N \leq q$. La fonction $f(n) = \chi(n)$ satisfait (1) avec $A = 1$ et $B = 1$ (voir [2]).
Le théorème 2.1.3 dérive immédiatement du théorème 2.0.1. □

2.2 Reformulation du critère (1) à l'aide de l'analyse de Fourier

Cette section vient de l'article D.A. Frolenkov K. Soundararajan

Définition 2.2.1.
Soit f un élément de $\mathcal{F}_{A,B}(q)$. Dans cette section nous retrouvons la condition (1) à l'aide de l'analyse de Fourier. Nous définissons les coefficients de Fourier

$$\hat{f}(\ell) = \sum_{n \mod q} f(n) e\left(-\frac{n\ell}{q}\right). \tag{6}$$

(On rappelle que $e(a) = \exp(2i\pi a)$).

Lemme 2.2.1.
On a $\hat{f}(0) = 0$, et pour tout entier naturel K, on a

$$\frac{1}{q} \sum_{\ell \mod q} |\hat{f}(\ell)|^2 \left(\frac{\sin(\pi K\ell/q)}{\sin(\pi\ell/q)}\right)^2 \leq Bq \min(K, q). \tag{7}$$

Ici, et ci-dessous, nous interprétons $\frac{\sin(\pi K\ell/q)}{\sin(\pi\ell/q)}$ comme étant K lorsque $\ell \equiv 0 \mod q$.

Démonstration.
Si nous prenons $K = qN$ dans (1) pour un entier naturel N, on trouve que

$$\sum_{n=1}^{q} \left|\sum_{k=1}^{qN} f(n+k)\right|^2 = \sum_{n=1}^{q} |N\hat{f}(0)|^2 = qN^2|\hat{f}(0)|^2 \leq BNq^2.$$

Et si $N \longrightarrow \infty$ on trouve $\hat{f}(0) = 0$.
Puisque le côté gauche de (7) est périodique en K de période q, Il suffit d'établir cette inégalité pour des nombres naturels $K \leq q$.
D'aprés l'identité de Parseval on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{q} \left|\sum_{k=1}^{K} f(n+k)\right|^2 &= \frac{1}{q} \sum_{\ell \mod q} \left|\sum_{n=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} f(n+k) e\left(-\frac{n\ell}{q}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{q} \sum_{\ell \mod q} |\hat{f}(\ell)|^2 \left|\sum_{k=1}^{K} e(k\ell/q)\right|^2 \\
&= \frac{1}{q} \sum_{\ell \mod q} |\hat{f}(\ell)|^2 \left(\frac{\sin(\pi K\ell/q)}{\sin(\pi\ell/q)}\right)^2
\end{aligned}$$

Notre inégalité souhaitée (7) suit maintenant à l'aide de (1). □

Lemme 2.2.2.
Soit $1 \leq K_0 \leq q$ un entier naturel. Alors

$$\sum_{1\leq|\ell|\leq q/(2k_0+1)} \frac{|\hat{f}(\ell)|^2}{|\ell|}\left(1-\frac{|\ell|(2k_0+1)}{q}\right) \leq 2Bq\left(\log\frac{q}{K_0}+1\right).$$

Démonstration.
Nous divisons les deux côtés de (7) par K^2 et sommons sur K de K_0+1 à l'infini. La partie droite de (7) contribue

$$Bq\sum_{K_0+1}^{\infty}\frac{\min(K,q)}{K^2} = Bq\sum_{K_0+1}^{q}\frac{1}{K} + Bq^2\sum_{q+1}^{\infty}\frac{1}{K^2} \leq Bq\left(\log\frac{q}{K_0}+1\right)$$

La contribution de la partie gauche de (7) est

$$\frac{1}{q}\sum_{\substack{-q/2\leq\ell<q/2\\ \ell\neq 0}} |\hat{f}(\ell)|^2 \sum_{K=K_0+1}^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi K\ell/q)}{K\sin(\pi\ell/q)}\right)^2. \tag{8}$$

On a d'aprés l'identité de Parseval , pour toute $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$,

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(2\pi Ku)}{K\pi}\right)^2 = \sum_{K=-\infty}^{\infty}\left|\int_{-u}^{u} e(Kx)dx\right|^2 = 2u.$$

Par conséquent en utilisant $|\sin x| \leq |x|$,

$$\begin{aligned}\sum_{K=K_0+1}^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi K\ell/q)}{K}\right)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi K\ell/q)}{K}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{K=-K_0}^{K_0}\left(\frac{\sin(\pi K\ell/q)}{K}\right)^2\\ &\geq \frac{\pi^2|\ell|}{2q} - \frac{1}{2}\sum_{K=-K_0}^{K}\frac{\pi^2\ell^2}{q^2} = \frac{\pi^2|\ell|}{2q}\left(1-\frac{|\ell|(2K_0+1)}{q}\right).\end{aligned}$$

En utilisant ceci et que $|\sin(\pi\ell/q)| \leq \pi|\ell|/q$, on constate que la quantité en (8) est

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{1\leq|\ell|\leq q/(2k_0+1)}\frac{|\hat{f}(\ell)|^2}{|\ell|}\left(1-\frac{|\ell|(2k_0+1)}{q}\right).$$

Ainsi, on a ce lemme. □

2.3 Résultats trigonométriques

Définition 2.3.1.
Soit x un nombres réel, on définit

$$C_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\cos jx}{j}.$$

Il est claire que pour tout x, $C_n(x) \leq C_n(0) = \sum_{j=1}^{n} 1/j$.

Lemme 2.3.1. *(de Pomerance 1)*
Pour tout nombres réel x et pour tout entier n, on a

$$C_n(x) > -\log 2 - \frac{2}{n}.$$

Démonstration.
Comme noté ci-dessus, on peut supposer que $0 \leq x \leq \pi$. En [11] on montre que le minimum de $C_n(x)$ dans cet intervalle se produit au point

$$x_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \frac{2\pi}{n+1}$$

(voir [9], Problème 27 dans VI partie). D'abord supposons que n est impair, alors $x_n = \pi$ et

$$C_n(x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j}.$$

Cette série alternée converge vers $-\log 2$. Le dernier terme est négatif, de sorte que la somme finie est légèrement inférieure à la valeur limite d'une valeur inférieure à la première des termes de n + 1 à l'infini, qui est $1/n+1$, alors $C_n(x) > -\log 2 - 1/n + 1$. Maintenant supposons que n est pair, i.e $n-1$ impaire, d'où

$$C_n(x) = C_{n-1}(x) + \frac{\cos nx}{n} > -\log 2 - \frac{1}{n} + \frac{\cos nx}{n} \geq -\log 2 - \frac{2}{n},$$

.

□

On remarque que, si elle sera développée l'expression $-2/n$ du lemme 2.1.4, le nombre $-\log 2$ est le meilleur possible puisque $C_n(\pi) \to -\log 2$ quand $n \to \infty$.

On utilise le Lemme 2.2.1, pour obtenir une limite supérieure pour la série

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{|\sin jx|}{j},$$

en suivant l'idée dans [9], Problèmes 34 et 38 dans Partie VI.

Lemme 2.3.2. *(de Pomerance 2)*
Pour tout nombre réel x et pour tout entier n, an a

$$S_n(x) < \frac{2}{\pi}\log n + \frac{2}{\pi}\Big(\gamma + \log 2 + \frac{3}{n}\Big),$$

avec γ le constant de Euler - Mascheroni.

Démonstration.
Commençons par le développement de Fourier pour $|\sin\theta|$ ([9, Problème 34 la partie VI])

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\theta}{4m^2-1}.$$

Ainsi

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\frac{\cos 2mjx}{j}.$$

Utilisons le lemme 2.3.1, on a

$$S_n(x) < \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log 2 + 2/n}{4m^2-1} = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \frac{2}{\pi}\Big(\log 2 + \frac{2}{n}\Big).$$

Il sert a noter que la série harmonique satisfait

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} < \log n + \gamma + \frac{1}{n}.$$

□

Pour x un réel et n un entier positif , soit

$$R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\sin ix}{i}.$$

Dans [14, page 81], Landau suit l'argument de Pòlya, obtient une estimation de la somme de $|R_n(x)|$ à des points équidistants dans $]0,\pi]$.

Lemme 2.3.3.
Si $k > 1$ un entier, alors

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left|R_n\left(\frac{2\pi i}{k}\right)\right| < \frac{2}{\pi}\frac{k}{n+1}\left(\log k + \log\left(\frac{4}{\pi}\right) + \frac{\pi^2}{12k^2}\right).$$

Démonstration.
Comme dans [14], on a pour $0 < x \leq \pi <$ et tout entier n,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin(x/2)}.$$

Puisque $R_n(2\pi - x) = -R_n(x)$, possède la même estimation lorsque $\pi < x < 2\pi$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left| R_n\left(\frac{2\pi i}{k}\right) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sin(\pi i/k)}. \quad (*)$$

Sur $]0, \pi[$ la fonction $\cos x$ est concave vers le haut. Ainsi pour un entier i avec $1 \leq i \leq k-1$, on a

$$\frac{1}{\sin(\pi i/k)} = \csc(\pi i/k) < \frac{k}{\pi} \int_{\pi(i-1/2)/k}^{\pi(i+1/2)/k} \csc t dt,$$

pour que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sin(\pi i/k)} < \frac{k}{\pi} \int_{\pi/2k}^{\pi-\pi/2k} \csc t dt = \frac{2k}{\pi} \log\left(\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2k})}{\sin(\frac{\pi}{2k})}\right)$$

En utilisant $\cos t < 1$ et $\sin t > t - t^3/6$ pour $t > 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sin(\pi i/k)} < \frac{2k}{\pi} \log\left(\frac{4k}{\pi} \frac{1}{1-(\pi(2k))^2/6}\right).$$

et utilisons $\log(1/(1-t)) < \log(1+2t) < 2t$ pour $0 < t < 1/2$, d'où

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sin(\pi i/k)} < \frac{2k}{\pi} \left(\log k + \log\left(\frac{4}{\pi}\right) + \frac{\pi^2}{12k^2}\right).$$

Ainsi, le résultat découle de $(*)$. □

Définition 2.3.2.
Nous rappelons que le noyau Fejér $\Delta_K(x)$ est donné par la formule suivante :

$$\Delta_K(x) = \sum_{-K}^{K} \left(1 - \frac{|k|}{K}\right) e(kx) = \frac{1}{K} \left(\frac{\sin \pi K x}{\sin \pi x}\right)^2. \tag{3.2}$$

Alors le polynôme de Vaaler est

$$(3.2) \qquad V_K(x) = \frac{1}{K+1}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{k}{K+1}-\frac{1}{2}\right)\Delta_{K+1}(x-\frac{k}{K+1})$$
$$+\frac{1}{2\pi(K+1)}\sin 2\pi(K+1)x - \frac{1}{2\pi}\Delta_{K+1}(x)\sin 2\pi x.$$

Comme $\Delta_{K+1}(x)$ est un polynôme trigonométrique de degré K, alors la somme est de degré au plus K. Les deux derniers termes du polynôme trigonométrique sont de degré $K+1$, mais le coefficient $e(\pm(K+1)x)$ est annulé, pour que la combinaison de deux derniers termes des polynômes trigonométriques soit au plus de degré K. Par des calculs élémentaires on a :

$$(3.3) \qquad V_K(x) = \frac{1}{K+1}\sum_{k=1}^{K} g(k/(K+1))\sin 2\pi kx,$$

où $g(u) = -(1-u)\cot \pi u - \frac{1}{\pi}$, et on pourrait prendre définition de V_K, mais les propriétés les plus intéressantes de $V_K(x)$ sont tirées facilement à partir de la définition (3.2).

Lemme 2.3.4.
Soit $1 \leq L \leq q$ un entier . Pour $0 \leq u \leq 1$, on définit $s(u) = (\pi u \cot(\pi u))(1-u)+u$, et le polynôme trigonométrique

$$S_L(x) = \frac{N}{q} + \sum_{1\leq|\ell|\leq L} s\left(\frac{|\ell|}{L+1}\right)\left(\frac{\sin(\pi N\ell)/q}{\pi\ell}\right) e\left(\ell\left(x-\frac{M+(N+1)/2}{q}\right)\right).$$

Alors

$$\sum_{n \mod q} |I(n/q) - S_L(n/q)| \leq \frac{q}{L+1},$$

avec I la fonction indicatrice de l'intervalle $\mathbb{I} = [(M+1)/q, (M+N)/q]$ tel que $N \leq q$.

Démonstration.
Les polynômes de Selberg S_L^+ et S_L^- (Voir (21^+) et (21^-) du chap. 1 du livre de Montgomery [7]) sont des polynômes trigonométriques de degré L avec $S_L^+ \geq I \geq S_L^-$, et

$$\int_{\mathbb{T}}(S_L^+(x) - I(x))dx = \int_{\mathbb{T}}(I(x) - S_L^-(x))dx = \frac{1}{L+1}.$$

Avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, notre polynôme S_L est la moyenne du majorant et du minorant des polynômes de Selberg ; D'où $S_L(x) = (S_L^+(x) + S_L^-(x))$. Ainsi $\sum_{n \mod q} T(n/q) = q\int_{\mathbb{T}} T(x)dx$ pour tout polynôme trigonométrique de degré $< q$, on a

$$\sum_{n \mod q} |I(n/q) - S_L(n/q)| \le \frac{1}{2} \sum_{n \mod q} (S_L^+(n/q) + S_L^-(n/q))$$
$$= \frac{q}{2} \int_{\mathbb{T}} (S_L^+(x) + S_L^-(x))dx = \frac{q}{L+1}.$$

Enfin, on note que notre polynôme

$$S_L(x) = N/q + V_L(x - (M+N)/q) + V_L((M+1)/q - x)$$

où V_L est le polynôme de Vaaler (voir (17) du chap. 1 de [7]).
De ceci on peut vérifier le développement de Fourier de S_L a de notre lemme (voir (18) du chap. 1 de [7]). $\square$

2.4 Démonstration du théorème 2.1.1

Cette démonstration est basée sur l'approximation de I en utilisant le polynôme trigonométrique S_L de degré L. Notons que

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| = \left|\sum_{n \mod q} f(n)I(n/q)\right|$$
$$\le \left|\sum_{n \mod q} f(n)S_L(n/q)\right| + A \sum_{n \mod q} |I(n/q) - S_L(n/q)|. \quad (9)$$

Le premier terme de (9) sera estimée en utilisant le développement de Fourier de S_L et notre travail dans la section précédente, et nous allons choisir le polynôme S_L de sorte que le second terme est petit. particulièrement le bon choix pour le polynôme trigonométrique S_L émerge du travail de Beurling et Selberg, comme nous pouvons le lire dans le chapitre 1 de Montgomery, Et nous collectons des faits nécessaires dans le lemme précédent.

On choisit $L = [\sqrt{q}]$ et utilisons le polynôme du Lemme 2.3.4 dans (9).
Ainsi on trouve que

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} f(n)\right| \le \sum_{1 \le |\ell| \le L} s\left(\frac{|\ell|}{L+1}\right) \left|\frac{\sin(\pi \ell N/q)}{\pi \ell}\right| |\hat{f}(\ell)| + A\sqrt{q}. \quad (10)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, on voit que le premier terme du côté droit de (10) est :

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\sum_{1\le|\ell|\le L}\left(1-\frac{|\ell|}{L+1}\right)\frac{|\hat{f}(\ell)|^2}{|\ell|}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{1\le|\ell|\le L}\frac{s(|\ell|/(L+1))^2}{(1-|\ell|/(L+1))}\frac{|\sin(\pi\ell N/q)|^2}{|\ell|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

On peut vérifier que $|S(u)|^2 \le 1-u^2$ pour tous $0\le u\le 1$, et donc, le second terme (sans la racine carré) dans (11) est délimité par

$$\sum_{1\le|\ell|\le L}\left(1-\frac{|\ell|}{L+1}\right)\frac{(\sin(\pi\ell N/q))^2}{|\ell|} \le 2\sum_{1\le\ell\le L}\frac{(\sin(\pi\ell N/q))^2}{\ell}+2.$$

Maintenant pour tout θ on a

$$\sum_{\ell\le L}\frac{(\sin\theta\ell)^2}{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{\ell\le L}\frac{(1-\cos(2\theta\ell))}{\ell} \le \frac{1}{2}\left(\log L+\gamma+\log 2+\frac{3}{L}\right),$$

par un simple argument, à l'aide de (3) et du Lemme 2.2.2. Ainsi le second terme (11) est, pour $q\ge 100$,

$$\le \left(\log L+\gamma+\log 2+\frac{3}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}(\log q+\tfrac{29}{4})^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Pour estimer le premier terme en (11), on choisit $K_0=[(q-L-1)/(2(L+1))]$ afin que $q/(2K_0+1)\ge L+1$. D'aprés le Lemme 2, et utilisation $q\ge 100$, on obtient

$$\sum_{1\le|\ell|\le L}\left(1-\frac{|\ell|}{L+1}\right)\frac{|\hat{f}(\ell)|^2}{|\ell|} \le 2Bq\left(\log\frac{q}{K_0}+1\right) \le Bq(\log q+\tfrac{9}{2}).$$

En combinant cette estimation avec (12), on trouve que la quantité dans (11) est

$$\frac{\sqrt{Bq}}{\pi\sqrt{2}}(\log q+\tfrac{29}{4})^{\frac{1}{2}}(\log q+\tfrac{9}{2}) \le \frac{\sqrt{Bq}}{\pi\sqrt{2}}(\log q+6).$$

En insérant celle-ci dans (10), nous obtenons notre théorème.

2.5 Démonstration du théorème 2.1.2

En argumentant comme en (9), en utilisant le polynôme du Lemme 2.3.4, on obtient

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) = \sum_{n \mod q} \chi(n) S_L(n/q) + \theta \frac{q}{L+1}, \tag{13}$$

où θ désigne un nombre complexe avec $|\theta| \leq 1$. Pour un caractère primitif χ mod q, rappelons que

$$\sum_{n \mod q} \chi(n) e(n\ell/q) = \overline{\chi(\ell)} \tau(\chi),$$

Où $\tau(\chi) = \sum_{n \mod q} \chi(n) e(n/q)$ est la somme de Gauss, dont la magnitude est $\sqrt{q}$. Ainsi, en utilisant le développement de Fourier dans le Lemme 2.3.4, on trouve

$$\begin{aligned}&\sum_{n \mod q} \chi(n) S_L(n/q) \\ &= \tau(\chi) \sum_{1 \leq |\ell| \leq L} s\left(\frac{|\ell|}{L+1}\right)\left(\frac{\sin(\pi\ell N/q)}{\pi\ell}\right) e\left(-\ell \frac{M+(N+1)/2}{q}\right)\overline{\chi(\ell)}. \end{aligned} \tag{14}$$

À ce stade, il est convenable de distinguer lorsque le caractère χ est pair ou impair. Si χ est pair, alors la parité des termes ℓ et $-\ell$, on donne

$$\left|\sum_{n \mod q} \chi(n) S_L(n/q)\right| \leq 2\sqrt{q} \sum_{\ell=1}^{L} s\left(\frac{\ell}{L+1}\right)\left|\frac{\sin(\pi\ell N/q)}{\pi\ell}\right|. \tag{15}$$

Si χ est impair, alors la parité des termes ℓ et $-\ell$, on déduit que, avec $\alpha = N/q$ et $\beta = (2M+N+1)/q$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n \mod q} \chi(n) S_L(n/q)\right| &\leq 2\sqrt{q} \sum_{\ell=1}^{L} s\left(\frac{\ell}{L+1}\right)\left|\frac{\sin(\pi\ell\alpha)}{\pi\ell}\right| |\sin(\pi\ell\beta)| \\ &\leq 2\sqrt{q} \max_{\theta} \sum_{\ell=1}^{L} s\left(\frac{\ell}{L+1}\right) \frac{(\sin(\ell\theta))^2}{\pi\ell}. \end{aligned} \tag{16}$$

D'aprés le Lemme 2.3.2 on a, pour tout nombre réel positif x et tout θ,

$$\sum_{n \leq x} \frac{|\sin(n\theta)|}{n} \leq \frac{2}{\pi}\left(\log x + \gamma + \log 2 + \frac{3}{x}\right).$$

Pour être précis, le lemme de Pomerance prend un entier x, mais la version ci-dessus suit parce-que $\log x + 3/x$ est croissant pour $x \geq 3$, et l'inégalité est triviale pour $x < 3$. Maintenant notons que $s(u)$ est dérivable, et monotone décroissante pour $0 \leq u \leq 1$ et $s'(0) = 0$. En utilisant ce qui précède de l'estimation, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{L} s\left(\frac{|\ell|}{L+1}\right)\frac{|\sin(\ell\theta)|}{\ell} \\
&\quad = \int_0^1 -s'(u)\sum_{\ell\leq u(L+1)}\frac{|\sin(\ell\theta)|}{\ell}du \\
&\quad \leq \frac{2}{\pi}\int_0^1 -s'(u)\left(\log(u(L+1)) + \gamma + \log 2 + \frac{3}{u(L+1)}\right)du.
\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^1 -\frac{s'(u)}{u}du = 3.046\ldots. \quad et \quad \int_0^1 -s'(u)\log u du = -0.8378\ldots.$$

On conclut que

$$\sum_{\ell=1}^{L} s\left(\frac{\ell}{L+1}\right)\frac{|\sin(\ell\theta)|}{\ell} \leq \frac{2}{\pi}\left(\log(L+1) + 0.4325\ldots + \frac{9.15}{L+1}\right).$$

On utilise cette borne dans (15), et remplacer cela dans (13). En choisissant $L = [\frac{\pi^2}{4}\sqrt{q} + 9.15]$ on conclut que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right| &\leq \frac{4}{\pi^2}\sqrt{q}\left(\log\left(\sqrt{q}\frac{\pi^2}{4} + 10.15\right) + 1.4325\ldots\right) \\
&\leq \frac{2}{\pi^2}\sqrt{q}\log q + 0.9466\ldots\sqrt{q} + 1.667\ldots,
\end{aligned}$$

le théorème 2.1.2 suit dans le cas pair .

L'analyse du cas impair est similaire. En débutant par

$$\sum_{n\leq x}\frac{(\sin(n\theta))^2}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\log x + \gamma + \log 2 + \frac{3}{x}\right).$$

En argumentant comme ci-dessus, on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{L} s\left(\frac{\ell}{L+1}\right)\frac{(\sin(\ell\theta))^2}{\ell} \leq \frac{1}{2}\left(\log(L+1) + 0.4325\ldots + \frac{9.15}{L+1}\right).$$

On utilise ceci dans (16), et remplaçons cela dans (13).
En choisissant $L = [\frac{\pi^2}{4}\sqrt{q} + 9.15]$, on conclut que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)\right| &\leq \frac{\sqrt{q}}{\pi}(\log(\pi\sqrt{q} + 10.15) + 1.4325\ldots) \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{q}\log q + 0.8203\ldots\sqrt{q} + 1.0284\ldots,\end{aligned}$$

et le théorème 2.1.2 suit dans ce cas impair.

Bibliographie

[1] **Bachman, G., Rachakonda, L. :**On a problem of Dobrowolski and Williams and the Pólya–Vinogradov inequality.*Ramanujan J. 5, 65–71* (2001)

[2] **Burgess, D.A. :** *On a conjecture of Norton.* Acta Arith. 27, 265–267 (1975)

[3] **Dobrowolski, E., Williams, K.S. :** An upper bound for the sum $\sum_{n=a+1}^{a+H} f(n)$ *for a certain class of functions* f. *Proc. Am. Math. Soc.* 114, 29–35 (1992)

[4] **Frolenkov, D.A. :** *A numerically explicit version of the Pólya–Vinogradov inequality.* Mosc. J. Comb. Number Theory 1(3), 25–41 (2011)

[5] **Granville, A., Soundararajan, K. :** *Large character sums : pretentious characters and the Pólya– Vinogradov theorem. J. Am. Math. Soc.* 20(2), 357–384 (2007)

[6] **Hildebrand, A. :** *On the constant in the Pólya–Vinogradov inequality. Can. Math. Bull.* 31, 347–352 (1988)

[7] **Montgomery, H.L. :** *Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis.* CBMS, vol. 84. AMS, Providence (1994)

[8] **Pomerance, C. :** *Remarks on the Pólya–Vinogradov Inequality Integers (Proceedings of the Integers Conference,* October 2009), 11A (2011), Article 19, 11p

[9] **G. Pòlya and G.** *Szegö, Problems and theorems in analysis. Volume II : Theory of functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry. Springer-Verlag, Berlin, Hei- delberg* 1998.

[10] **H. L. Montgomery and R. C.** *Vaughan, Exponential sums with multiplicative coefficients, Invent. Math.* 43 (1977), 69-82.

[11] **W. H.** *Young, On a certain series of Fourier, Proc. London Math. Soc.* (2) 11 (1913), 357–366

[12] **Fonctions Zêta et Corps quadratiques** PRESENTATION 3 : *Caractères de Dirichlet* par Christine Sèbe. 29 mars 2007

[13] **K. Soundararajan, Stanford University** Andrew Granville Université de Montréal *Multiplicative number theory* 2011

[14] **E. Landau, Absch́atzungen von Charaktersummen,** Einheiten und Klassenzahlen,*Nachrichten Ḱonigl. Ges. Wiss. Ǵottingen* (1918), 79–97. Université de Montréal *Multiplicative number theory* 2011

[15] **A. BLANCHARD** INITIATION A LA THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES PREMIER *Einheiten und Klassenzahlen,* Paris 1969

[16] **D.A. Frolenkov · K. Soundararajan** A generalization of the Pólya–Vinogradov inequality*Ramanujan* J (2013) 31 :271–279