UNE VERSION DU THÉORÈME DE LEVIN-FAINLEIB ADAPTÉE AU CRIBLE D'ERATOSTHENES-LEGENDRE

AMANDINE SALDANA

1. Introduction

Nous nous intéressons ici à un problème de crible. L'un des objets du crible est d'obtenir des renseignements concernant une taille, comme le nombre d'entiers dans une suite donnée, ou le nombre de représentations d'un entier comme somme de deux autres dans des suites spéciales. Ici le but va être de déterminer une estimation asymptotique de $S(\mathcal{A}, P(z)) = |\{1 \leq n \leq x : (n, P(z)) = 1\}|$, où x et z sont deux réels ≥ 1 et $P(z) = \prod_{2 \leq p \leq z} p$.
Notre travail se base sur un article d'Henryk Iwaniec; notre étude est assez proche dans le sens où les idées sont relativement les mêmes. Cependant, là où Iwaniec cherche à évaluer $\sum_{\substack{d \leq x \\ d | P(z)}} \mu(d) \frac{\rho(d)}{d}$, nous étudions, dans un cadre plus général, $\sum_{\substack{d \leq x \\ d | P(z)}} g(d)$ où g est une fonction multiplicative répondant à certaines hypothèses. Pour cela, nous sommes amenés dans un premier temps à étudier $\sum_{d \leq x} g(d)$.
L'évaluation asymptotique des moyennes de fonctions arithmétiques est un sujet très classique en théorie des nombres. Beaucoup s'y sont intéressés. Nous pouvons d'abord citer les deux théorèmes de Levin-Fainleib. Ceux-ci s'appliquent au cas où g est une fonction positive. Le premier, avec une hypothèse de majoration sur les puissances de nombres premiers, permet d'obtenir une majoration de $\sum_{d \leq x} g(d)$. Le second théorème demande des hypothèses bien plus fortes mais en échange nous prouvons une formule asymptotique. Ces deux théorèmes sont plus spécifiques aux cas rencontrés dans le cadre du crible de Selberg, notamment lorsque nous voulons évaluer $\sum_{d \leq x} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$. Ensuite Rawsthorne (1982) dans "Selberg's sieve estimate with a one sided hypothesis" et Greaves et Huxley (1999) dans "One-sided sifting density hypotheses in Selberg's sieve" donnent des évaluations où seule la majoration est nécessaire. Enfin Delange a réussi à évaluer $\sum_{d \leq x} g(d)$ où g est une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité.
Le théorème que nous démontrons est assez fort dans le sens où, possédant des hypothèses similaires au théorème de Levin-Fainleib, il permet d'obtenir une estimation de $\sum_{d \leq x} g(d)$ où g est une fonction multiplicative pas forcément positive. Par exemple, il donne un équivalent de $\sum_{n \leq X} \frac{(-1)^{\Omega(1,n,5)}}{n}$ où $\Omega(1, n, 5) = \sum_{\substack{p \geq 2 \\ p^\nu || n, p \equiv 1[5]}} \nu$.
Plus précisément, dans le cadre de notre démonstration, ce théorème va nous permettre d'obtenir une formule asymptotique pour $T(x, z) = \sum_{\substack{d \leq x \\ d | P^\infty(z)}} g(d) \log \frac{x}{d}$ pour $2 \leq x \leq z$, estimation que nous prolongerons à $x \geq 2$ et $z \geq 2$. Le passage de $T(x, z)$ à $G(x, z)$ sera assuré par la relation suivante :

$$G(x,z)\log x = (1+\kappa)T(x,z) - \kappa T\left(\frac{x}{z},z\right) + \mathcal{O}^*\big(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\big).$$

Pour obtenir cette relation, nous agissons différemment d'Iwaniec, qui introduit la fonction de Von Mangoldt associée à la fonction g, peut-être plus intéressant lorsque la fonction g porte seulement sur les entiers sans facteur carré. Cette relation fait apparaître une équation fonctionnelle, vérifiée par une certaine fonction $f(s)$ qui vaut s^κ pour $0 < s \leq 1$; nous l' étudions dans la section 4. Dans cette partie, nous nous appuyons sur le livre de Georges Greaves : "Sieves in number theory ". Celui-ci reprend une idée d'Iwaniec qui consiste à associer à l'équation fonctionnelle l'équation dite adjointe et d'introduire un produit scalaire. Et contrairement à Iwaniec, nous réussirons à montrer que

$$f(s) = e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa) + \mathcal{O}\big(e^{-s\log s}\big).$$

Une dernière différence avec l'article d'Iwaniec : celui-ci montre que le crible d'Eratosthenes-Legendre mène à une formule asymptotique de $S(\mathcal{A}, P(z))$ dans le cas où la dimension du crible est $< \frac{1}{2}$, ce que nous étendons à < 1.

2. Preuve du théorème 1

Théorème 1. *Donnons-nous une fonction multiplicative $g(d)$ à valeurs réelles et des paramètres réels κ, κ', L, L' et A $(1+\kappa-\kappa' > 0, L, L', A$ strictement positifs) tels que*

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ w<p^\nu\leq Q}} g(p^\nu)\log(p^\nu) &= \kappa\log\frac{Q}{w} + \mathcal{O}^*\big(L\big)\\
\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ w<p^\nu\leq Q}} |g(p^\nu)|\log(p^\nu) &= \kappa'\log\frac{Q}{w} + \mathcal{O}^*\big(L'\big)\\
\sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1} \big|g(p^k)g(p^\nu)\big|\log(p^\nu) &\leq A
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{d\leq x} g(d) = C(\log x)^\kappa + \mathcal{O}^*\left(\frac{2+2\kappa-\kappa'}{1+\kappa-\kappa'}C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'-1}\right)$$

pour $D \geq \exp(2(L'+A))$, où

$$C = \frac{1}{\Gamma(1+\kappa)}\prod_{p\geq 2}\left\{\left(\sum_{\nu\geq 0} g(p^\nu)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^\kappa\right\}$$

$$C' = \frac{1}{\Gamma(1+\kappa')}\prod_{p\geq 2}\left\{\left(\sum_{\nu\geq 0} |g(p^\nu)|\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa'}\right\}\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{B}{2(L'+A)}\right)\right)$$

et

$$B' = 2(L'+A)(1+2(\kappa'+1)e^{\kappa'+1})$$

Preuve: Posons
$$G(D) = \sum_{d\le D} g(d).$$
Il vient
$$\begin{aligned} G(D)\log D &= \sum_{d\le D} g(d)\log\frac{D}{d} + \sum_{d\le D} g(d) \\ &= \sum_{d\le D} g(d)\log\frac{D}{d} + \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g(p^\nu)\log(p^\nu) \sum_{\substack{\ell\le D/p^\nu\\ (\ell,p)=1}} g(\ell) \end{aligned}$$

et nous posons
$$G_p(X) = \sum_{\substack{\ell\le X\\ (\ell,p)=1}} g(\ell)$$
puis
$$T(D) = \sum_{d\le D} g(d)\log\frac{D}{d} = \int_1^D \frac{G(t)}{t}dt$$

ce qui nous donne
$$G(D)\log D = T(D) + \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g(p^\nu)\log(p^\nu) G_p\left(\frac{D}{p^\nu}\right).$$
De plus, nous vérifions aisément que
$$G_p(X) = G(X) - \sum_{k\ge 1} G_p(X/p^k) g(p^k)$$
ce qui, joint à nos hypothèses, nous donne
$$\begin{aligned} G(D)\log D &= T(D) + \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\left(G\left(\frac{D}{p^\nu}\right) - \sum_{k\ge 1} G_p\left(\frac{D}{p^\nu p^k}\right) g(p^k)\right) \\ &= T(D) + \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g(p^\nu)\log(p^\nu) G\left(\frac{D}{p^\nu}\right) \\ &- \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\sum_{k\ge 1}\sum_{\substack{\ell\le D/p^{\nu+k}\\ (\ell,p)=1}} g(\ell)g(p^k). \end{aligned}$$

Étudions chaque somme séparément. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D}} g(p^\nu)\log(p^\nu)G\left(\frac{D}{p^\nu}\right) &= \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\sum_{d\leq D/p^\nu} g(d)\\ &= \sum_{d\leq D} g(d) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D/d}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\\ &= \sum_{d\leq D} g(d)\left(\kappa\log\frac{D}{d}+\mathcal{O}^*(L)\right)\\ &= \kappa\sum_{d\leq D} g(d)\log\frac{D}{d}+\mathcal{O}^*\left(L\sum_{d\leq D}|g(d)|\right)\\ &= \kappa T(D)+\mathcal{O}^*\left(L\sum_{d\leq D}|g(d)|\right).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\sum_{k\geq 1}\sum_{\substack{\ell\leq D/p^{\nu+k}\\ (\ell,p)=1}} g(\ell)g(p^k)\right|\\ &\qquad\leq \sum_{\ell\leq D}|g(\ell)|\sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1}\left|g(p^k)g(p^\nu)\right|\log(p^\nu)\leq A\sum_{\ell\leq D}|g(\ell)|.\end{aligned}$$

Si nous posons $\overline{G}(D)=\sum_{d\leq D}|g(d)|$, nous obtenons :

$$G(D)\log D=(1+\kappa)T(D)+\mathcal{O}^*\big((L+A)\overline{G}(D)\big).$$

Par le théorème de Levin-Fainleib, nous avons :

$$\overline{G}(D)=\mathcal{O}^*\big(C'(\log D)^{\kappa'}\big)\qquad (D\geq \exp(2(L'+A)))$$

avec

$$C'=\frac{1}{\Gamma(1+\kappa')}\prod_{p\geq 2}\left\{\left(\sum_{\nu\geq 0}|g(p^\nu)|\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa'}\right\}\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{B}{2(L'+A)}\right)\right)$$

où

$$B'=2(L'+A)(1+2(\kappa'+1)e^{\kappa'+1}).$$

Nous pouvons donc écrire :

$$G(D)\log D=(1+\kappa)T(D)+\mathcal{O}^*\big(C'(L+A)(\log D)^{\kappa'}\big). \tag{1}$$

Essayons d'obtenir une formule asymptotique pour $T(D)$. Tout d'abord nous avons l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{T(t)}{(\log t)^{1+\kappa}}\right) = \frac{G(t)}{t(\log t)^{1+\kappa}} - (1+\kappa)\frac{T(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}.$$

Divisons (1) par $D(\log D)^{2+\kappa}$:

$$\frac{G(D)\log D}{D(\log D)^{2+\kappa}} - (1+\kappa)\frac{T(D)}{D(\log D)^{2+\kappa}} = \mathcal{O}^*\left(C'(L+A)\frac{(\log D)^{\kappa'}}{D(\log D)^{2+\kappa}}\right).$$

Posons $r(t) = G(t)\log t - (1+\kappa)T(t)$ et intégrons la dernière égalité de 2 à x :

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{r(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt &= \int_2^x \frac{G(t)}{t(\log t)^{1+\kappa}}dt - (1+\kappa)\int_2^x \frac{T(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt \\ &= \frac{T(x)}{(\log x)^{1+\kappa}} - \frac{T(2)}{(\log 2)^{1+\kappa}}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{r(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt &= \int_2^\infty \frac{r(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt - \int_x^\infty \frac{r(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt \\ &= C_1 - \int_x^\infty \frac{r(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt.\end{aligned}$$

Comme $r(t) = \mathcal{O}^*\big(C'(L+A)(\log t)^{\kappa'}\big)$, nous obtenons :

$$\int_x^\infty \frac{r(t)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt = \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'-\kappa-1}\right).$$

D'où :

$$\frac{T(x)}{(\log x)^{1+\kappa}} = \frac{T(2)}{(\log 2)^{1+\kappa}} + C_1 + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'-\kappa-1}\right).$$

Or $T(2) = \log 2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}T(x) &= (\log 2)^{-\kappa}(\log x)^{1+\kappa} + C_1(\log x)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right) \\ &= C_2(\log x)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right)\end{aligned}$$

où $C_2 = C_1 + (\log 2)^{-\kappa}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}G(x)\log x &= (1+\kappa)T(x) + \mathcal{O}^*\big(C'(L+A)(\log x)^{\kappa'}\big) \\ &= (1+\kappa)C_2(\log x)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left((1+\kappa)\frac{C'(L+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right) + \mathcal{O}^*\big(C'(L+A)(\log x)^{\kappa'}\big) \\ &= (1+\kappa)C_2(\log x)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{2+2\kappa-\kappa'}{1+\kappa-\kappa'}C'(L+A)(\log x)^{\kappa'}\right)\end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$G(x)=(1+\kappa)C_2(\log x)^{\kappa}+\mathcal{O}^*\left(\frac{2+2\kappa-\kappa'}{1+\kappa-\kappa'}C'(L+A)(\log x)^{\kappa'-1}\right).$$

Reste à calculer la constante C_2. Remarquons tout d'abord que la preuve ci-dessus est a priori fausse car $T'(x)\neq G(x)/x$ aux points de discontinuité de G, mais il nous suffit de travailler avec x non entier et de procéder par continuité.
Expression de C_2 :
Pour ce qui est du calcul de la constante, nous avons pour s réel positif

$$D(g,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}=s\int_1^{\infty}\frac{G(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Après étude des deux termes de $G(x)$, nous obtenons :

$$D(g,s)=s^{-\kappa}(1+\kappa)C_2\Gamma(1+\kappa)+\mathcal{O}^*\left(\frac{2+2\kappa-\kappa'}{1+\kappa-\kappa'}C'(L+A)s^{1-\kappa'}\Gamma(\kappa')\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned}C_2 &= \lim_{s\to 0^+}D(g,s)s^{\kappa}(1+\kappa)^{-1}\Gamma(1+\kappa)^{-1}\\ &= \lim_{s\to 0^+}D(g,s)\zeta(s+1)^{-\kappa}(1+\kappa)^{-1}\Gamma(1+\kappa)^{-1}\end{aligned}$$

car $\lim_{s\to 0^+}s\zeta(s+1)=1$.

$$D(g,s)\zeta(s+1)^{-\kappa} = \prod_{p\geq 2}\left\{\left(\sum_{\nu\geq 0}\frac{g(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^{\kappa}\right\}$$

ce qui tend vers, lorsque s tend vers 0^+,

$$\prod_{p\geq 2}\left\{\left(\sum_{\nu\geq 0}g(p^\nu)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa}\right\}.$$

Nous en déduisons que :

$$C_2 = \frac{1}{(1+\kappa)\Gamma(1+\kappa)}\prod_{p\geq 2}\left\{\left(\sum_{\nu\geq 0}g(p^\nu)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa}\right\}.$$

■

3. Un exemple d'application

Nous cherchons à estimer :

$$\sum_{n\le X}\frac{(-1)^{\Omega(1,n,5)}}{n}$$

où

$$\Omega(1,n,5)=\sum_{\substack{p\ge 2\\ p^\nu||n, p\equiv 1[5]}}\nu.$$

Remarquons que

$$\Omega(1,p^k,5)=\sum_{\substack{p_1\ge 2\\ p_1^\nu||p^k, p_1\equiv 1[5]}}\nu=\begin{cases}0 & \text{si } p\not\equiv 1[5]\\ k & \text{sinon}\end{cases}$$

Si nous posons $g(n)=(-1)^{\Omega(1,n,5)}/n$, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le X}}g(p^\nu)\log(p^\nu) &= \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le X, p\not\equiv 1[5]}}\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}+\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le X, p\equiv 1[5]}}(-1)^\nu\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}\\ &= \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le X}}\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}-\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le X, p\equiv 1[5]}}\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}+\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le X, p\equiv 1[5]}}(-1)^\nu\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}\\ &= \sum_{2\le p\le X}\frac{\log p}{p}-2\sum_{\substack{2\le p\le X\\ p\equiv 1[5]}}\frac{\log p}{p}+\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 2\\ p^\nu\le X}}\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}-\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 2\\ p^\nu\le X, p\equiv 1[5]}}\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}\\ &+\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 2\\ p^\nu\le X, p\equiv 1[5]}}(-1)^\nu\frac{\log(p^\nu)}{p^\nu}.\end{aligned}$$

Les trois dernières séries sont convergentes. Par conséquent,

$$\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le X}}g(p^\nu)\log(p^\nu)=\sum_{2\le p\le X}\frac{\log p}{p}-2\sum_{\substack{2\le p\le X\\ p\equiv 1[5]}}\frac{\log p}{p}+\mathcal{O}(1).$$

Or le théorème de Mertens dit que :

$$\sum_{2\le p\le X}\frac{\log p}{p}=\log X+\mathcal{O}(1).$$

Et nous avons un résultat similaire pour les nombres premiers en progression arithmétique :

$$\sum_{\substack{2\leq p\leq X\\ p\equiv 1[5]}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\phi(5)}\log X + \mathcal{O}\big(1\big) = \frac{1}{4}\log X + \mathcal{O}\big(1\big).$$

Ce qui nous donne

$$\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq X}} g(p^\nu)\log(p^\nu) = \frac{1}{2}\log X + \mathcal{O}\big(1\big)$$

soit

$$\kappa = \frac{1}{2}.$$

Étudions maintenant la somme $\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq X}} |g(p^\nu)|\log(p^\nu)$:

$$\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq X}} |g(p^\nu)|\log(p^\nu) = \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq X}} \frac{\log p^\nu}{p^\nu} = \log X + \mathcal{O}\big(1\big).$$

Nous avons donc :

$$\kappa' = 1.$$

Cela donne $1+\kappa-\kappa' = \frac{1}{2}$ qui est bien strictement positif. Vérifions maintenant la dernière hypothèse du théorème :

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1} \big|g(p^k)g(p^\nu)\big|\log(p^\nu) &= \sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1}\frac{\log p^\nu}{p^{\nu+k}}\\ &= \sum_{p\geq 2}\log p\sum_{\nu\geq 1}\frac{\nu}{p^\nu}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p^k}.\end{aligned}$$

Or $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{p-1}$ et $\sum_{\nu\geq 1}\frac{\nu}{p^\nu} = \frac{p}{(p-1)^2}$. Ainsi

$$\sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1} \big|g(p^k)g(p^\nu)\big|\log(p^\nu) = \sum_{p\geq 2}\frac{p\log p}{(p-1)^3}.$$

Et nous avons l'équivalence $\frac{p\log p}{(p-1)^3} \sim \frac{\log p}{p^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (série de Bertrand). Il existe donc un paramètre réel A strictement positif tel que :

$$\sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1} \big|g(p^k)g(p^\nu)\big|\log(p^\nu) \leq A.$$

Toutes les hypothèses du théorème sont donc vérifiées et nous obtenons ainsi l'équivalence suivante :

$$\sum_{n\leq X}\frac{(-1)^{\Omega(1,n,5)}}{n}\sim C(\log X)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\Gamma(3/2)}\prod_{p\geq 2}\left\{\Big(\sum_{\nu\geq 0} g(p^\nu)\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\frac{1}{2}}\right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(3/2)}\prod_{p\geq 2, p\equiv 1[5]}\frac{p}{p+1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\frac{1}{2}}\prod_{p\geq 2, p\not\equiv 1[5]}\frac{p}{p-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

4. Étude d'une équation fonctionnelle

Lemme 1. *Soit $f(s)$ la solution continue de*

$$\begin{cases} f(s)=s^\kappa & si\ 0<s\leq 1 \\ sf'(s)=-\kappa f(s-1)+\kappa f(s) & si\ s>1 \end{cases}$$

Alors, pour $s\to\infty$ nous avons

$$f(s)=e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa)+\mathcal{O}\big(e^{-s\log s}\big).$$

Preuve: Nous posons de plus $f(s)=0$ si $s\leq 0$. Ainsi la deuxième relation est également vérifiée si $0<s\leq 1$.
Nous lui associons l'équation adjointe :

$$\frac{d}{ds}(sr(s))+\kappa(r(s)-r(s+1))=0.$$

Cherchons une solution de la forme $r(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi(x)dx$ si $s>0$ où $\varphi(x)=\mathcal{O}\big(x^A\big)$ lorsque $x\to\infty$ et $\varphi(x)=\mathcal{O}\big(x^{-1+\epsilon}\big)$ lorsque $x\to 0^+$.

Par une intégration par parties, nous avons :

$$\begin{aligned} sr(s) &= s\int_0^\infty e^{-sx}\varphi(x)dx \\ &= s\Big(\frac{1}{s}\varphi(0)+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)dx\Big) \\ &= \varphi(0)+\int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)dx. \end{aligned}$$

D'où

$$sr(s)-\varphi(0)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)dx$$

et

$$\frac{d}{ds}(sr(s)-\varphi(0))=\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)dx\right)=-\int_0^\infty e^{-sx}x\varphi'(x)dx$$

par le théorème de dérivation sous le signe intégral.

Nous cherchons une solution de $\frac{d}{ds}(sr(s))=-\kappa r(s)+\kappa r(s+1)$,
autrement dit :

$$-\int_0^\infty e^{-sx}x\varphi'(x)dx=-\kappa\int_0^\infty e^{-sx}\varphi(x)dx+\kappa\int_0^\infty e^{-(s+1)x}\varphi(x)dx.$$

Ainsi nous aurons une solution de l'équation adjointe si :

$$-x\varphi'(x)=-\kappa\varphi(x)+\kappa e^{-x}\varphi(x)$$

soit

$$-x\varphi'(x)=(-\kappa+\kappa e^{-x})\varphi(x).$$

Nous prenons :

$$\varphi(x)=\exp\left(-\int_1^x\frac{dt}{t}+\kappa\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right).$$

Nous avons donc :

$$r(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\exp\left(\kappa\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right).$$

Nous avons $r(s)\sim\frac{1}{s}$ lorsque $s\to\infty$. En effet si nous effectuons le changement de variable $sx=u$ dans la dernìere intégrale, nous obtenons :

$$r(s)=\int_0^\infty e^{-u}\exp\left(\kappa\int_0^{u/s}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right)\frac{du}{s}$$

ce qui nous donne :

$$sr(s)=\int_0^\infty e^{-u}\exp\left(\kappa\int_0^{u/s}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right)du.$$

D'où

$$\lim_{s\to+\infty}sr(s)=\int_0^\infty e^{-u}du=1.$$

Montrons également que $\frac{r(s)}{s^{-\kappa-1}} \sim e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa)$ lorsque $s \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
r(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \exp\left(\kappa \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt\right) \\
&= \int_0^\infty \exp\left(\kappa \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \kappa \int_1^x \frac{dt}{t}\right) \frac{e^{-sx}}{x^{-\kappa}} dx \\
&= \int_0^\infty \exp\left(\kappa \int_0^{u/s} \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \kappa \int_1^{u/s} \frac{dt}{t}\right) \frac{e^{-u}}{(u/s)^{-\kappa}} \frac{du}{s} \\
&= s^{-\kappa-1} \int_0^\infty \exp\left(\kappa \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \kappa \int_1^{u/s} \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \kappa \int_1^{u/s} \frac{dt}{t}\right) \frac{e^{-u}}{u^{-\kappa}} du \\
&= s^{-\kappa-1} \int_0^\infty \exp\left(\kappa \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \kappa \int_1^{u/s} \frac{e^{-t}}{t} dt\right) \frac{e^{-u}}{u^{-\kappa}} du.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{r(s)}{s^{-\kappa-1}} = \int_0^\infty \exp\left(\kappa \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \kappa \int_1^{u/s} \frac{e^{-t}}{t} dt\right) \frac{e^{-u}}{u^{-\kappa}} du.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{u/s} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \int_0^{u/s} \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{u/s} \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{u/s} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
&= \int_0^{u/s} \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{u/s} \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{u/s} \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \log\left(\frac{u}{s}\right).
\end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\int_0^{u/s} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = (1-e^{-u/s}) \log\left(\frac{u}{s}\right) - \int_0^{u/s} e^{-t} \log t dt.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{u/s} \frac{e^{-t}}{t} dt = -e^{-u/s} \log\left(\frac{u}{s}\right) - \int_0^{u/s} e^{-t} \log t dt$$

ce qui tend lorsque $s \to 0^+$ vers $-\int_0^\infty e^{-t} \log t dt = -\Gamma'(1) = \gamma$.

D'où

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{r(s)}{s^{-\kappa-1}} = \int_0^\infty e^{\kappa\gamma} e^{-u} u^\kappa du = e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa).$$

Introduisons un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ entre f et r défini par :

$$\langle f, r\rangle(s) \quad = \quad sr(s)f(s) - \kappa \int_{s-1}^{s} r(x+1)f(x)dx$$

et montrons que ce produit est indépendant de s, pour $s > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(sr(s)f(s)) &= \frac{d}{ds}(sr(s))f(s) + sr(s)f'(s) \\ &= -\kappa(r(s) - r(s+1))f(s) + r(s)(-\kappa f(s-1) + \kappa f(s)) \\ &= -\kappa r(s)f(s) + \kappa r(s+1)f(s) - \kappa r(s)f(s-1) + \kappa r(s)f(s) \\ &= \kappa r(s+1)f(s) - \kappa r(s)f(s-1). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{ds}(\langle f, r\rangle(s)) \quad = \quad 0.$$

Pour tout s, $\langle f, r\rangle(s)$ est donc constant pour $s > 0$. Déterminons cette constante. Réécrivons l'équation différentielle vérifiée par f sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(s^{1+\kappa}r(s)) &= \frac{\kappa r(s+1)}{s^{-\kappa}} \\ \langle f, r\rangle(1) &= r(1)f(1) - \kappa \int_0^1 r(x+1)f(x)dx. \end{aligned}$$

Or $f(x) = x^\kappa$ si $0 < x \leq 1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \langle f, r\rangle(1) &= r(1) - \int_0^1 \frac{d}{dx}(x^{1+\kappa}r(x))dx \\ &= \lim_{x \to 0^+} x^{1+\kappa}r(x) \\ &= e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa). \end{aligned}$$

En intégrant la relation

$$\frac{d}{ds}(sr(s)) + \kappa(r(s) - r(s+1)) = 0,$$

nous obtenons également :

$$sr(s) - \kappa \int_{s-1}^{s} r(x+1)dx = C$$

où C est une constante. Or $\lim_{s \to +\infty} sr(s) = 1$ donne $C = 1$.

Nous avons donc les deux relations suivantes pour $s > 0$:

$$sr(s)f(s) - \kappa \int_{s-1}^{s} r(x+1)f(x)dx = e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa)$$

et

$$sr(s) - \kappa \int_{s-1}^{s} r(x+1)dx = 1.$$

Posons

$$U(s) \quad = \quad 1 - \frac{f(s)}{e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa)}$$

et retranchons la première relation à la deuxième :

$$sr(s)\left(1 - \frac{f(s)}{e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa)}\right) - \kappa \int_{s-1}^{s} r(x+1)\left(1 - \frac{f(x)}{e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa)}\right)dx = 0$$

soit

$$sr(s)U(s) = \kappa \int_{s-1}^{s} r(x+1)U(x)dx.$$

Par conséquent,

$$sr(s)\left|U(s)\right| \leq |\kappa| \int_{s-1}^{s} r(x+1)\left|U(x)\right| dx \leq |\kappa|\, r(s) \int_{s-1}^{s} \left|U(x)\right| dx$$

car r est positive et décroissante. En simplifiant par $r(s)$, nous avons :

$$s\left|U(s)\right| \leq |\kappa| \int_{s-1}^{s} \left|U(x)\right| dx.$$

Montrons alors que $U(s) \ll e^{-s\log s}$. Pour cela, il faut démontrer quelques lemmes.

Lemme 2. *Supposons que $u(x)$ est continue pour $x \geq s_0$ sauf des discontinuités en lesquelles elle peut décroître. Si $u(x)$ est bornée quand $s_0 - 1 \leq x \leq s_0$ et*

$$u(s) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sup_{s-1 \leq x \leq s} u(x)$$

quand $s > s_0$, alors $u(s)$ est bornée pour $s > s_0$.

Preuve: Nous montrons sue $u(s) \leq A$ lorsque $s \leq s_0 + n$ par récurrence sur n pour un réel $A > 1$ pour lequel la proposition est vraie au rang 0. Alors, si $u(s) > A$ pour un $s \leq n+1$, posons s_1 le plus petit de ces s. Alors s_1 n'est pas un point de discontinuité de u, parce que u décroît en de telles discontinuités. Ainsi $u(s_1) = A$, tant que $u(x) \leq A$ pour $s_1 - 1 \leq x \leq s_1$. Dans l'hypothèse du lemme, prenons $s = s_1$ pour obtenir $A < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A$, ce qui est contraire à l'hypothèse $A > 1$. Ainsi il n'y a pas de tel s qui existe, et on en déduit le lemme 9. ∎

Lemme 3. *Soit $U(s)$ une fonction bornée et intégrable pour $s > s_0$, et définissons $u(x) = |U(x)|\, e^{\phi(x)}$, où $\phi(x) = x \log x - Nx$ pour une certaine constante N. Alors*

$$\frac{c}{s} \int_{s-1}^{s} |U(x)|\, dx < \frac{1}{2} e^{-\phi(s)} \sup_{s-1 \leq x \leq s} u(x)$$

si s/e^N dépasse une constante convenable dépendant de c.

Preuve: Cela repose sur le fait que $\phi'(x) = \log x + 1 - N$ croît avec x. Par conséquent,

$$\phi(s) - \phi(x) \leq (s - x)\phi'(s)$$

si $s - 1 \leq x \leq s$. Ainsi l'expression à estimer dans le lemme ne dépasse pas

$$\begin{aligned} e^{-\phi(s)} \frac{c}{s} \int_{s-1}^{s} e^{\phi(s)-\phi(x)} u(x) dx \quad &\leq \quad e^{-\phi(s)} \frac{c}{s} \int_{s-1}^{s} e^{(s-x)\phi'(s)} dx \sup_{s-1 \leq x \leq s} u(x) \\ &\leq \quad e^{-\phi(s)} \frac{c e^{\phi'(s)}}{s\phi'(s)} \sup_{s-1 \leq x \leq s} u(x) \end{aligned}$$

Ici

$$\frac{c e^{\phi'(s)}}{s\phi'(s)} \leq \frac{c e^{1-N}}{\log s + 1 - N} < \frac{1}{2}$$

si $\log s - N$ est assez grand, et on en déduit le lemme. ∎

Lemme 4. *Soit une fonction U, continue pour $s > s_0 - 1$, satisfaisant*

$$s\, |U(s)| \leq M \int_{s-1}^{s} |U(x)|\, dx$$

si $s > s_0$, pour une certaine constante M. Alors

$$U(s) \ll e^{-s \log s}$$

où la constante dépend de M.

Preuve: Pour déduire ce lemme des lemmes 2 et 3, prenons $N = 0$ dans le lemme 3. L'hypothèse du lemme 4 montre alors que $u(x)$, défini comme dans le lemme 3, satisfait l'hypothèse du lemme 2, ce qui nous donne alors le résultat cherché.

Nous avons donc $U(s) = \mathcal{O}\big(e^{-s\log s}\big)$ soit

$$f(s) \quad = \quad e^{\kappa\gamma}\Gamma(1+\kappa) + \mathcal{O}\big(e^{-s\log s}\big).$$

Corollaire 1. *La fonction*

$$F(s) = \int_0^s f(u)du, s > 0$$

est de classe C^1 et satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} F(s) = \frac{1}{1+\kappa}s^{1+\kappa} & si\ 0 < s \leq 1 \\ sF'(s) = (1+\kappa)F(s) - \kappa F(s-1) & si\ s > 1 \\ \frac{d}{ds}(F(s)/s^{1+\kappa}) = -\kappa F(s-1)/s^{2+\kappa} & si\ s > 1 \end{cases}$$

Preuve: Pour $0 < s \leq 1$, nous avons $f(s) = s^\kappa$ donc

$$F(s) = \int_0^s u^\kappa du = \frac{1}{1+\kappa}s^{1+\kappa}.$$

Pour $s > 1$, $sf'(s) = -\kappa f(s-1) + \kappa f(s)$, par hypothèses. Nous pouvons vérifier que cette relation est également vraie pour $0 < s \leq 1$. Nous pouvons donc intégrer cette relation de 0 à s :

$$\begin{aligned} \int_0^s uf'(u)du &= -\kappa\int_0^s f(u-1)du + \kappa\int_0^s f(u)du \\ \int_0^s uf'(u)du &= -\kappa\int_{-1}^{s-1} f(t)dt + \kappa F(s) \end{aligned}$$

après un changement de variable. Comme $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, nous avons :

$$\int_0^s uf'(u)du = -\kappa\int_0^{s-1} f(t)dt + \kappa F(s)$$

c'est-à-dire

$$\int_0^s uf'(u)du = -\kappa F(s-1) + \kappa F(s). \tag{2}$$

En effectuant une intégration par parties, nous avons

$$\int_0^s uf'(u)du = sf(s) - \int_0^s f(u)du = sf(s) - F(s) = sF'(s) - F(s).$$

En réécrivant l'égalité (2), nous obtenons :

$$sF'(s) - F(s) = -\kappa F(s-1) + \kappa F(s)$$

soit

$$sF'(s) = (1+\kappa)F(s) - \kappa F(s-1)$$

ce que nous voulions. Démontrons la dernière relation : soit $s > 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\frac{F(s)}{s^{1+\kappa}}\right) &= \frac{F'(s)}{s^{1+\kappa}} + F(s)(-1-\kappa)s^{-1-\kappa-1} \\
&= \frac{F'(s)}{s^{1+\kappa}} - (1+\kappa)\frac{F(s)}{s^{2+\kappa}} \\
&= \frac{sF'(s)}{s^{2+\kappa}} - (1+\kappa)\frac{F(s)}{s^{2+\kappa}} \\
&= (1+\kappa)\frac{F(s)}{s^{2+\kappa}} - \kappa\frac{F(s-1)}{s^{2+\kappa}} - (1+\kappa)\frac{F(s)}{s^{2+\kappa}}
\end{aligned}$$

d'après la relation démontrée précédemment. Ceci implique que :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{F(s)}{s^{1+\kappa}}\right) = -\kappa\frac{F(s-1)}{s^{2+\kappa}}.$$

$\blacksquare$

5. Une formule asymptotique pour $G(x,z)$

Dans la suite, nous supposons que la fonction g vérifie les hypothèses du théorème 1 et deux hypothèses supplémentaires qui sont les suivantes :

$$|\kappa| < 1, \kappa + \kappa' \geq 0$$

et il existe un paramètre M strictement positif tel que :

$$\sum_{\substack{p\geq 2\\ \nu\geq 2}} |g(p^\nu)|\log(p^\nu) \leq M \tag{3}$$

Définissons pour $x \geq 1$, $z \geq 1$,

$$G(x,z) = \sum_{\substack{d \leq x \\ d | P^{\infty}(z)}} g(d)$$

où

$$P^{\infty}(z) = \prod_{p \leq z} p^{\alpha}.$$

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1. *Pour $x \geq 2$, $z \geq 2$, nous avons*

$$G(x,z) = Cf(s)(\log z)^{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{L+M+A}{1+\kappa-\kappa'}(s+1)(\log x)^{\kappa'-1}\right)$$

où

$$s = \frac{\log x}{\log z}, C = \frac{1}{\Gamma(1+\kappa)} \prod_{p \geq 2} \left\{ \left(\sum_{\nu \geq 0} g(p^{\nu})\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\kappa} \right\}.$$

Supposons un instant cette proposition et démontrons le corollaire qui suit :

Corollaire 2. *Pour $x \geq 2, z \geq 2$, nous avons*

$$G(x,\tilde{z}) = \frac{e^{-\kappa\gamma}}{\Gamma(1+\kappa)} W(\tilde{z}) \left\{ f(s) + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log \tilde{z})^{2\kappa'-1}\right)\right\}$$

où

$$\tilde{z} = min(x,z)$$

et

$$W(\tilde{z}) = \prod_{p \leq \tilde{z}} \left(\sum_{\nu \geq 0} g(p^{\nu})\right).$$

Preuve: Par définition de la constante C, nous avons :

$$\begin{aligned} C\Gamma(1+\kappa) &= \prod_{p \leq \tilde{z}} \left(\sum_{\nu \geq 0} g(p^{\nu})\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\kappa} \prod_{p > \tilde{z}} \left(\sum_{\nu \geq 0} g(p^{\nu})\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\kappa} \\ &= W(\tilde{z}) \prod_{p \leq \tilde{z}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\kappa} \prod_{p > \tilde{z}} \left(\sum_{\nu \geq 0} g(p^{\nu})\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\kappa} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$W(\tilde{z}) = C\Gamma(1+\kappa)\prod_{p\leq\tilde{z}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\kappa}\prod_{p>\tilde{z}}\left(\sum_{\nu\geq 0} g(p^\nu)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa}\right)^{-1}.$$

Or la formule de Mertens dit que :

$$\prod_{p\leq\tilde{z}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\kappa} = e^{\kappa\gamma}(\log\tilde{z})^{\kappa}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log\tilde{z}}\right)\right).$$

De plus, nous avons l'estimation suivante :

$$\prod_{p>\tilde{z}}\left(\sum_{\nu\geq 0} g(p^\nu)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa} = 1+\mathcal{O}\left(\frac{L+M+A}{\log\tilde{z}}\right).$$

Nous avons alors :

$$W(\tilde{z}) = e^{\kappa\gamma}C\Gamma(1+\kappa)(\log\tilde{z})^{\kappa}\left\{1+\mathcal{O}\left(\frac{L+M+A}{\log\tilde{z}}\right)\right\}.$$

Le corollaire se déduit aussitôt de la proposition 1.
Avant de prouver la proposition 1, nous devons montrer quelques lemmes. Posons

$$T(x,z) = \int_1^x \frac{G(t,z)}{t}dt = \sum_{\substack{d\leq x\\ d\mid P^\infty(z)}} g(d)\log\frac{x}{d}.$$

Pour $0 < x \leq 1$, nous posons $T(x,z) = 0$.

$\blacksquare$

Lemme 5. *Pour $x \geq 2$ et $z \geq 2$, nous avons*

$$G(x,z)\log x = (1+\kappa)T(x,z) - \kappa T\left(\frac{x}{z},z\right) + \mathcal{O}^*\left(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\right).$$

Preuve:

$$\sum_{\substack{d\leq x\\ d\mid P^\infty(z)}} g(d)\log d = \sum_{\substack{d\leq x\\ d\mid P^\infty(z)}} g(d)\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\mid\mid d}}\log(p^\nu).$$

Inversons les sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\leq x\\ d\mid P^\infty(z)}} g(d)\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\mid\mid d}}\log(p^\nu) &= \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq x, p\mid P^\infty(z)}}\log(p^\nu)\sum_{\substack{d\leq x\\ d\mid P^\infty(z), p^\nu\mid\mid d}} g(d)\\ &= \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq x, p\mid P^\infty(z)}}\log(p^\nu)\sum_{\substack{d=mp^\nu\leq x\\ d\mid P^\infty(z),(m,p)=1}} g(d).\end{aligned}$$

Par multiplicativité de la fonction g, nous obtenons :

$$\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq x, p|P^\infty(z)}} \log(p^\nu) \sum_{\substack{d=mp^\nu\leq x\\ d|P^\infty(z),(m,p)=1}} g(d) = \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq x, p|P^\infty(z)}} g(p^\nu)\log(p^\nu) \sum_{\substack{m\leq \frac{x}{p^\nu}\\ m|P^\infty(z),(m,p)=1}} g(m).$$

La condition $(m,p)=1$ est équivalente à $p\nmid m$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq x, p|P^\infty(z)}} g(p^\nu)\log(p^\nu) \sum_{\substack{m\leq \frac{x}{p^\nu}\\ m|P^\infty(z),(m,p)=1}} g(m) = \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq x, p|P^\infty(z)}} g(p^\nu)\log(p^\nu) \sum_{\substack{m\leq \frac{x}{p^\nu}\\ m|P^\infty(z),p\nmid m}} g(m).$$

Inversons de nouveau les sommes :

$$\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq x, p|P^\infty(z)}} g(p^\nu)\log(p^\nu) \sum_{\substack{m\leq \frac{x}{p^\nu}\\ m|P^\infty(z),p\nmid m}} g(m) = \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p|P^\infty(z),p\nmid m}} g(p^\nu)\log(p^\nu).$$

Ensuite, étant donné que la condition $p|P^\infty(z)$ est équivalente à $p\leq z$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p|P^\infty(z),p\nmid m}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\\
&\quad= \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m)\Bigg(\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p\leq z}} g(p^\nu)\log(p^\nu) - \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p\leq z, p|m}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\Bigg).
\end{aligned}$$

Séparons alors la première somme en deux parties, selon que $p^\nu\leq z$ et $p^\nu>z$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p\leq z}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\\
&= \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p^\nu\leq z, p\leq z}} g(p^\nu)\log(p^\nu) + \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p^\nu> z, p\leq z}} g(p^\nu)\log(p^\nu) = G_1+G_2.
\end{aligned}$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
G_1 &= \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m}, p^\nu\leq z}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\\
&= \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m)\left(\kappa\log\left(min\left(z,\frac{x}{m}\right)\right)+\mathcal{O}^*(L)\right).
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{2\leq p\leq z\\ \nu\geq 2\\ z<p^\nu\leq \frac{x}{m}}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\\ &= \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{2\leq p\leq z\\ \nu\geq 2\\ z<p^\nu\leq \frac{x}{m}}} g(p^\nu)\log(p^\nu). \end{aligned}$$

Par la relation (3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m)\Bigg(\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m},p\leq z}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\Bigg) &= \sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m)\left(\kappa\log\left(min\left(z,\frac{x}{m}\right)\right)+\mathcal{O}^*\big(L\big)\right)\\ &\quad+\mathcal{O}^*\Bigg(M\sum_{d\leq D}|g(d)|\Bigg)\\ &= \kappa\sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m)\log\left(min\left(z,\frac{x}{m}\right)\right)+\mathcal{O}^*\big((L+M)\overline{G}(x)\big)\\ &= \kappa\sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m)\log\left(min\left(z,\frac{x}{m}\right)\right)+\mathcal{O}^*\big(C'(L+M)(\log x)^{\kappa'}\big). \end{aligned}$$

Étudions maintenant la deuxième somme :

$$\begin{aligned} \Bigg|\sum_{\substack{m\leq x\\ m|P^\infty(z)}} g(m) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq \frac{x}{m},p\leq z,p|m}} g(p^\nu)\log(p^\nu)\Bigg| &\leq \sum_{m\leq x}|g(m)|\sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p|m}}|g(p^\nu)|\log(p^\nu)\\ &= \sum_{\substack{2\leq p\leq x\\ \nu\geq 1}}|g(p^\nu)|\log(p^\nu)\sum_{\substack{m\leq x\\ p|m}}|g(m)| \end{aligned}$$

après inversion des sommes. Maintenant, comme $p|m$, en écrivant $m=p^k\ell$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{2\leq p\leq x\\ \nu\geq 1}}|g(p^\nu)|\log(p^\nu)\sum_{\substack{m\leq x\\ p|m}}|g(m)| &= \sum_{\substack{2\leq p\leq x\\ \nu\geq 1}}|g(p^\nu)|\log(p^\nu)\sum_{\substack{k\geq 1\\ p^k\leq x}}\sum_{\substack{\ell\leq x/p^k\\ (\ell,p^k)=1}}|g(p^k\ell)|\\ &= \sum_{\substack{2\leq p\leq x\\ \nu\geq 1}}|g(p^\nu)|\log(p^\nu)\sum_{\substack{k\geq 1\\ p^k\leq x}}|g(p^k)|\sum_{\substack{\ell\leq x/p^k\\ (\ell,p^k)=1}}|g(\ell)| \end{aligned}$$

par multiplicativité de g.

$$\sum_{\substack{2\leq p\leq x\\ \nu\geq 1}} |g(p^\nu)|\log(p^\nu)\sum_{\substack{k\geq 1\\ p^k\leq x}}|g(p^k)|\sum_{\substack{\ell\leq x/p^k\\ (\ell,p^k)=1}}|g(\ell)| \leq \sum_{p\geq 2}\sum_{\nu,k\geq 1}\left|g(p^k)g(p^\nu)\right|\log(p^\nu)\sum_{\ell\leq x}g(\ell) \leq A\overline{G}(x)$$

par hypothèses sur la fonction g. Finalement, nous obtenons comme relation :

$$\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log d = \kappa\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\Bigg(\log\bigg(\min\Big(z,\frac{x}{d}\Big)\bigg)\Bigg)+\mathcal{O}^*\big(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\big).$$

Ajoutons maintenant $\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log\frac{x}{d}$ aux deux membres de cette égalité :

$$\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log d+\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log\frac{x}{d} = \kappa\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\Bigg(\log\bigg(\min\Big(z,\frac{x}{d}\Big)\bigg)\Bigg) + \mathcal{O}^*\big(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\big)+\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log\frac{x}{d}$$

$$\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log x = \kappa\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\Bigg(\log\bigg(\min\Big(z,\frac{x}{d}\Big)\bigg)\Bigg)+\mathcal{O}^*\big(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\big)+T(x,z).$$

Le membre de gauche est exactement $G(x,z)\log x$ qui est alors égal à :

$$\kappa\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\Bigg(\log\bigg(\min\Big(z,\frac{x}{d}\Big)\bigg)\Bigg)+T(x,z)+\mathcal{O}^*\big(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\big).$$

Or

$$\begin{aligned}\kappa \sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\Bigg(\log\left(\min\left(z,\frac{x}{d}\right)\right)\Bigg) &= \kappa\Bigg(\sum_{\substack{d\leq x/z\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log z + \sum_{\substack{d\leq x, d>x/z\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log\left(\frac{x}{d}\right)\Bigg)\\
&= \kappa\Bigg(\sum_{\substack{d\leq x/z\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log z + \sum_{\substack{d\leq x\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log\left(\frac{x}{d}\right)\\
&- \sum_{\substack{d\leq x/z\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log\left(\frac{x}{d}\right)\Bigg)\\
&= \kappa T(x,z) - \kappa\Bigg(\sum_{\substack{d\leq x/z\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\Bigg(\log\frac{x}{d} - \log z\Bigg)\Bigg)\\
&= \kappa T(x,z) - \kappa \sum_{\substack{d\leq x/z\\ d|P^\infty(z)}} g(d)\log\left(\frac{x/z}{d}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(x,z)\log x &= \kappa T(x,z) - \kappa T\left(\frac{x}{z},z\right) + T(x,z) + \mathcal{O}^*\left(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\right)\\
&= (1+\kappa)T(x,z) - \kappa T\left(\frac{x}{z},z\right) + \mathcal{O}^*\left(C'(L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\right).\end{aligned}$$

■

Lemme 6. *Pour* $x\geq y\geq 2$ *et* $z\geq 2$*, nous avons*

$$\frac{T(x,z)}{(\log x)^{1+\kappa}} = \frac{T(y,z)}{(\log y)^{1+\kappa}} - \kappa\int_y^x \frac{T(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa-\kappa'}}\right).$$

Preuve: Réécrivons le lemme précédent en remplaçant x par t et divisons par $t(\log t)^{2+\kappa}$. Nous obtenons alors :

$$\frac{G(t,z)\log t}{t(\log t)^{2+\kappa}} = \frac{(1+\kappa)T(t,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}} - \frac{\kappa T(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)(\log t)^{\kappa'}}{t(\log t)^{2+\kappa}}\right)$$

soit

$$\frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1+\kappa}} = \frac{(1+\kappa)T(t,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}} - \frac{\kappa T(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{t(\log t)^{2+\kappa-\kappa'}}\right).$$

Nous intégrons de y à x :

$$\int_y^x \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1+\kappa}}dt = (1+\kappa)\int_y^x \frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt - \kappa\int_y^x \frac{T(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt$$
$$+\mathcal{O}^*\left(C'(L+M+A)\int_y^x \frac{dt}{t(\log t)^{2+\kappa-\kappa'}}\right).$$

D'où

$$\int_y^x \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1+\kappa}}dt = (1+\kappa)\int_y^x \frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt - \kappa\int_y^x \frac{T(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt \tag{4}$$
$$+\mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa-\kappa'}}\right). \tag{5}$$

De plus nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T(t,z)}{(\log t)^{1+\kappa}}\right) = \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1+\kappa}} - (1+\kappa)\frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}.$$

Intégrons une nouvelle fois de y à x :

$$\int_y^x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T(t,z)}{(\log t)^{1+\kappa}}\right)dt = \int_y^x \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1+\kappa}}dt - (1+\kappa)\int_y^x \frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt$$

soit

$$\frac{T(x,z)}{(\log x)^{1+\kappa}} - \frac{T(y,z)}{(\log y)^{1+\kappa}} = \int_y^x \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1+\kappa}}dt - (1+\kappa)\int_y^x \frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt.$$

En ajoutant l'égalité (4), nous obtenons le lemme. ∎

Lemme 7. *Pour $2 \le x \le z$, nous avons*

$$T(x,z) = \frac{C}{1+\kappa}(\log x)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right)$$

où

$$C = \frac{1}{\Gamma(1+\kappa)}\prod_{p\ge 2}\left\{\Big(1+g(p)\Big)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa}\right\}.$$

Preuve: Pour $2 \le t \le z$, nous avons $G(t,z) = G(t,t) = G(t)$ et $T(t,z) = T(t,t) = T(t)$. De plus, lors de la preuve du théorème 1, nous avons montré que

$$T(x) = C_2(\log x)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right)$$

où

$$C_2 = \frac{1}{(1+\kappa)\Gamma(1+\kappa)}\prod_{p\ge 2}\left\{\Big(1+g(p)\Big)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa}\right\}$$

d'où le résultat. ∎

Maintenant nous pouvons prouver le résultat général suivant :

Proposition 2. *Pour $x \geq 2$ et $z \geq 2$, nous avons avec $s = \frac{\log x}{\log z}$,*

$$T(x,z) = CF(s)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right).$$

Remarquons que c'est lors de la preuve de cette proposition que l'hypothèse $|\kappa| < 1$ va être importante.

Preuve: Posons

$$T(x,z) = CF(s)(\log z)^{1+\kappa} + R(x,z).$$

Nous devons donc prouver que, pour tout $x \geq 2$ et $z \geq 2$,

$$R(x,z) \ll \frac{C'(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}.$$

Ceci a déjà été prouvé au lemme précédent pour $2 \leq x \leq z$. En effet, nous avons montré que pour $2 \leq x \leq z$,

$$\begin{aligned} T(x,z) &= \frac{C}{1+\kappa}(\log x)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right) \\ &= \frac{C}{1+\kappa}\left(\frac{\log x}{\log z}\right)^{1+\kappa}(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right) \end{aligned}$$

$$x \leq z \Longrightarrow \frac{\log x}{\log z} \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{1+\kappa}\left(\frac{\log x}{\log z}\right)^{1+\kappa} = F\left(\frac{\log x}{\log z}\right) = F(s).$$

D'où

$$\begin{aligned} T(x,z) &= CF(s)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right) \\ &= CF(s)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right) \end{aligned}$$

car $s+1 \geq 1$.

Nous avons montré au lemme 6 que pour $x \geq y \geq 2$ et $z \geq 2$,

$$\frac{T(x,z)}{(\log x)^{1+\kappa}} = \frac{T(y,z)}{(\log y)^{1+\kappa}} - \kappa\int_y^x \frac{T(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa-\kappa'}}\right).$$

Remplaçons $T(x,z)$ par $CF(s)(\log z)^{1+\kappa} + R(x,z)$:

$$\begin{aligned}\frac{CF\left(\frac{\log x}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa}}{(\log x)^{1+\kappa}} + \frac{R(x,z)}{(\log x)^{1+\kappa}} = {}& \frac{CF\left(\frac{\log y}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa}}{(\log y)^{1+\kappa}} + \frac{R(y,z)}{(\log y)^{1+\kappa}} \\ &- \kappa\int_y^x \frac{CF\left(\frac{\log(t/z)}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa}}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt - \kappa\int_y^x \frac{R(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt \\ &+ \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa-\kappa'}}\right).\end{aligned}$$

Or nous avons, par l'équation fonctionnelle,

$$\frac{CF\left(\frac{\log x}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa}}{(\log x)^{1+\kappa}} - \frac{CF\left(\frac{\log y}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa}}{(\log y)^{1+\kappa}} = -\kappa\int_y^x \frac{CF\left(\frac{\log(t/z)}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa}}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt.$$

Nous obtenons donc :

(6)
$$\frac{R(x,z)}{(\log x)^{1+\kappa}} = \frac{R(y,z)}{(\log y)^{1+\kappa}} - \kappa\int_y^x \frac{R(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt + \mathcal{O}^*\left(\frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa-\kappa'}}\right)$$

pour $x \geq y \geq 2$ et $z \geq 2$.

Supposons dans un premier temps que $y = z$ et $z \leq x \leq z^2$.

L'inégalité $R(x,z) \ll \frac{C'(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}$ est vraie si $2 \leq x \leq z$. Nous pouvons donc l'appliquer au membre de droite de l'égalité (5), car $2 \leq y \leq z$ et si $y \leq t \leq x$, on a $\frac{t}{z} \leq \frac{x}{z} \leq z$. Ainsi

$$R(y,z) \ll \frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log y}{\log x}+1\right)(\log y)^{\kappa'} = \frac{2C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log y)^{\kappa'}$$

car $\log y = \log z$. D'où

$$\frac{R(y,z)}{(\log y)^{1+\kappa}} \ll \frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa-\kappa'}}$$
$$R\left(\frac{t}{z},z\right) \ll \frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log(t/z)}{\log z}+1\right)\left(\log\frac{t}{z}\right)^{\kappa'}.$$

Donc

$$\int_y^x \frac{R(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt \ll \frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\int_y^x \frac{(\log t/\log z)(\log(t/z))^{\kappa'}}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt.$$

En effectuant le changement de variable $s = \frac{\log t}{\log z}$, nous montrons que

$$\int_y^x \frac{R(t/z,z)}{t(\log t)^{2+\kappa}}dt \ll \frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}.$$

Ainsi

$$\frac{R(x,z)}{(\log x)^{1+\kappa}} \ll \frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}$$

soit

$$R(x,z) \ll \frac{C'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'} \ll \frac{C'(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}.$$

Par conséquent, nous avons déjà $|R(x,z)| \leq \frac{B(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}$ (6), où B est une constante, pour tout $z \geq 2$ et $2 \leq x \leq z^2$.

Maintenant nous allons montrer que si B est suffisamment grand alors cette inégalité est encore valable pour tout $z \geq 2$ et $x \geq 2$.

Pour cela, il est suffisant de montrer l'implication suivante : si l'inégalité (6) est valable pour tout $x \leq z^u$ alors elle est valable pour $x = z^{u+1}$ où u est un nombre réel ≥ 1.

Posons $y = z^u$ et $x = z^{u+1}$ dans l'égalité (5) ; l'inégalité (6) est vraie pour tout $x \leq z^u$, nous pouvons donc l'appliquer à $R(y,z)$, soit

$$|R(y,z)| \leq \frac{B(u+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log y)^{\kappa'}$$

$$\frac{|R(y,z)|}{(\log y)^{1+\kappa}} \leq \frac{B(u+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa-\kappa'}}$$

$$\frac{|R(y,z)|}{(\log y)^{1+\kappa}} \leq \frac{B(u+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}.$$

De même, nous pouvons appliquer l'inégalité (6) à $R\left(\frac{t}{z},z\right)$ car $y \leq t \leq x \Rightarrow \frac{t}{z} \leq \frac{x}{z} = z^u$. Ainsi

$$\left|R\left(\frac{t}{z},z\right)\right| \leq \frac{B(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log t/z}{\log z}+1\right)\left(\log\frac{t}{z}\right)^{\kappa'}$$

$$\frac{|R(t/z,z)|}{t(\log t)^{2+\kappa}} \leq \frac{B(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log t}{\log z}\right)\frac{1}{t(\log t)^{2+\kappa}}\left(\log\frac{t}{z}\right)^{\kappa'}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{|R(x,z)|}{(\log x)^{1+\kappa}} \leq{}& \frac{B(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left[\frac{u+1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}+|\kappa|\int_y^x\left(\frac{\log t}{\log z}\right)\frac{1}{t(\log t)^{2+\kappa}}\left(\log\frac{t}{z}\right)^{\kappa'}dt\right]\\ &+\mathcal{O}\left(\frac{L+M+A}{1+\kappa-\kappa'}\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\right).\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $s=\frac{\log t}{\log z}$ dans l'intégrale ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_y^x\left(\frac{\log t}{\log z}\right)\frac{1}{t(\log t)^{2+\kappa}}\left(\log\frac{t}{z}\right)^{\kappa'}dt &= \int_u^{u+1}\frac{s}{(s\log z)^{2+\kappa}}(s\log z-\log z)^{\kappa'}\log z ds\\ &= \frac{1}{(\log z)^{1+\kappa-\kappa'}}\int_u^{u+1}\frac{s}{s^{2+\kappa}}(s-1)^{\kappa'}ds\\ &= \frac{(u+1)^{1+\kappa-\kappa'}}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\int_u^{u+1}\frac{(s-1)^{\kappa'}}{s^{1+\kappa}}ds.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne comme majoration :

$$\int_y^x\left(\frac{\log t}{\log z}\right)\frac{1}{t(\log t)^{2+\kappa}}\left(\log\frac{t}{z}\right)^{\kappa'}dt \leq \frac{(u+1)^{1+\kappa-\kappa'}}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\frac{u^{\kappa'}}{u^{1+\kappa}}.$$

Et pour $u\geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{|R(x,z)|}{(\log x)^{1+\kappa}} &\leq \frac{B(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(u+1+|\kappa|\left(\frac{u+1}{u}\right)^{1+\kappa-\kappa'}+\epsilon\right)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\\ &\leq \frac{B(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(u+1+|\kappa|\,2^{1+\kappa-\kappa'}+\epsilon\right)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}.\end{aligned}$$

Si nous prenons

$$B'=\frac{B2^{1+\kappa-\kappa'}\epsilon}{\min(1-|\kappa|,\epsilon)},$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{|R(x,z)|}{(\log x)^{1+\kappa}} &\leq \frac{B'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{B(u+1)}{B'}+|\kappa|\frac{\min(1-|\kappa|,\epsilon)}{\epsilon}+\frac{\min(1-|\kappa|,\epsilon)}{2^{1+\kappa-\kappa'}}\right)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\\ &\leq \frac{B'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\Big(u+1+|\kappa|+\min(1-|\kappa|,\epsilon)\Big)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\end{aligned}$$

car $B' \geq B$. De plus, comme $\min(1-|\kappa|,\epsilon) \leq 1-|\kappa|$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{|R(x,z)|}{(\log x)^{1+\kappa}} &\leq \frac{B'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\Big(u+1+|\kappa|+1-|\kappa|\Big)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\\ &\leq \frac{B'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\Big(u+1+1\Big)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\\ &= \frac{B'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log(z^{u+1})}{\log z}+1\right)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\\ &= \frac{B'(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log x}{\log z}+1\right)\frac{1}{(\log x)^{1+\kappa-\kappa'}}\end{aligned}$$

soit

$$|R(x,z)| \leq \frac{B'(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}$$

où $s=\frac{\log x}{\log z}$. Ce qui complète la preuve de notre proposition. ■

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 1.

Preuve: Nous avons démontré au lemme 5 que pour $x \geq 2$ et $z \geq 2$,

$$G(x,z)\log x = (1+\kappa)T(x,z) - \kappa T\left(\frac{x}{z},z\right) + \mathcal{O}\big((L+M+A)(\log x)^{\kappa'}\big)$$

et à la dernière proposition : pour $x \geq 2$ et $z \geq 2$,

$$T(x,z) = CF(s)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right)$$

où $s=\frac{\log x}{\log z}$.

$$\begin{aligned}T\left(\frac{x}{z},z\right) &= CF\left(\frac{\log(x/z)}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{L+M+A}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log(x/z)}{\log z}\right)\left(\log\frac{x}{z}\right)^{\kappa'}\right)\\ &= CF\left(\frac{\log x-\log z}{\log z}\right)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{L+M+A}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log x}{\log z}\right)\left(\log\frac{x}{z}\right)^{\kappa'}\right)\\ &= CF(s-1)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{L+M+A}{1+\kappa-\kappa'}\left(\frac{\log x}{\log z}\right)\left(\log\frac{x}{z}\right)^{\kappa'}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$G(x,z)\log x = (1+\kappa)CF(s)(\log z)^{1+\kappa} - \kappa CF(s-1)(\log z)^{1+\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'}\right)$$

$$\begin{aligned}
G(x,z) &= (1+\kappa)CF(s)\frac{(\log z)^{1+\kappa}}{\log x} - \kappa CF(s-1)\frac{(\log z)^{1+\kappa}}{\log x} + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'-1}\right)\\
&= (1+\kappa)CF(s)\frac{\log z}{\log x}(\log z)^{\kappa} - \kappa CF(s-1)\frac{\log z}{\log x}(\log z)^{\kappa}\\
&+ \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'-1}\right)\\
&= Cs^{-1}[(1+\kappa)F(s) - \kappa F(s-1)](\log z)^{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'-1}\right).
\end{aligned}$$

Or l'équation fontionnelle nous donne $(1+\kappa)F(s) - \kappa F(s-1) = sF'(s)$ pour $s > 1$. Nous pouvons vérifier que cette relation est également vraie si $o < s \leq 1$. D'où pour $s > 0$,

$$\begin{aligned}
G(x,z) &= CF'(s)(\log z)^{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'-1}\right)\\
&= Cf(s)(\log z)^{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)(L+M+A)}{1+\kappa-\kappa'}(\log x)^{\kappa'-1}\right)
\end{aligned}$$

pour tout $x \geq 2$, $z \geq 2$. D'où la proposition. ∎

6. Application au crible

Soit x un réel ≥ 1, $\mathcal{A}$ une suite d'entiers de l'intervalle $[1, x]$ et $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers. Pour chaque nombre réel $z \geq 2$, posons :

$$P(z) = \prod_{p \leq z, p \in \mathcal{P}} p$$

et

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}\\ (a, P(z)) = 1}} 1$$

c'est-à-dire le nombre d'entiers de la suite $\mathcal{A}$ qui ne sont divisibles par aucun nombre premier $p \leq z$ de $\mathcal{P}$.
Si nous écrivons, pour $d|P(z)$,

$$|\mathcal{A}_d| = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}\\ a \equiv 0[d]}} 1,$$

alors nous obtenons l'encadrement suivant :

$$\sum_{d|P(z)} \lambda_d^- \, |\mathcal{A}_d| \leq S(\mathcal{A}, P(z)) \leq \sum_{d|P(z)} \lambda_d^+ \, |\mathcal{A}_d|$$

où les λ_d sont des nombres réels satisfaisant les conditions suivantes :

$$\lambda_1^- = \lambda_1^+ = 1,$$
$$\sum_{d|D} \lambda_d^- \leq 0 \leq \sum_{d|D} \lambda_d^+$$

pour tout $D > 1$, $D|P(z)$.

Dans la pratique, $|\mathcal{A}_d|$ peut s'écrire sous la forme :

$$|\mathcal{A}_d| = X \frac{\rho(d)}{d} + r_d$$

où X est un réel ≥ 1, ρ une fonction multiplicative qui satisfait pour une certaine constante $\kappa' \geq 0$ la condition suivante :

$$\sum_{w<p\leq Q} \frac{\rho(p)\log p}{p} = \kappa' \log \frac{Q}{w} + \mathcal{O}^*\big(L'\big)$$

pour $2 \leq w < Q$, où L' est une constante ≥ 1 et $r_d = \mathcal{O}\big(\rho(d)\big)$. Le paramètre κ' est appelé la dimension du crible.

La méthode d'Eratosthenes-Legendre repose sur l'utilisation de la fonction de Möbius $\mu(d)$ comme valeur commune des poids λ_d :

$$\lambda_d^- = \lambda_d^+ = \mu(d).$$

Nous obtenons alors ce que nous appelons "l'identité de Legendre" :

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d) \, |\mathcal{A}_d|$$

ce qui est donc égal à :

$$\sum_{\substack{d\leq x \\ d|P(z)}} \mu(d) \, |\mathcal{A}_d| = x \sum_{\substack{d\leq x \\ d|P(z)}} \mu(d) \frac{\rho(d)}{d} + \sum_{\substack{d\leq x \\ d|P(z)}} \mu(d) r_d.$$

car $|\mathcal{A}_d| = 0$ si $d > x$.

Estimons d'abord le terme négligeable $\sum_{\substack{d\leq x \\ d|P(z)}} \mu(d) r_d$. Comme $r_d = \mathcal{O}\big(\rho(d)\big)$, nous avons déjà :

$$\sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} |r_d| \ll \sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} \rho(d).$$

Nous associons à ρ la fonction de Mangoldt généralisée λ qui vérifie :

$$\rho(d)\log d = \sum_{n|d} \rho(n)\lambda\left(\frac{d}{n}\right).$$

Il est facile de voir que :

$$\lambda(p) = \rho(p)\log p.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} \rho(d)\log d &= \sum_{\substack{n\le x\\ n|P(z)}} \rho(n) \sum_{\substack{m\le x/n\\ mn|P(z)}} \lambda(m)\\ &\le \sum_{\substack{n\le x\\ n|P(z)}} \rho(n) \sum_{p\le x/n} \rho(p)\log p.\end{aligned}$$

Par sommation par parties, nous obtenons :

$$\sum_{p\le Q} \rho(p)\log p \ll Q$$

et

$$\sum_{p\le Q} \frac{\rho(p)}{p} = \kappa' \log\log Q + \mathcal{O}\big(1\big).$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} \rho(d)\log d \ll x \sum_{\substack{n\le x\\ n|P(z)}} \frac{\rho(n)}{n} \le x \prod_{p\le x}\left(1+\frac{\rho(p)}{p}\right) \le x\exp\left(\sum_{p\le x}\frac{\rho(p)}{p}\right) \ll x(\log x)^{\kappa'}.$$

En utilisant une nouvelle fois une sommation par parties, nous obtenons le résultat final :

$$\sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} \rho(d) \ll x(\log x)^{\kappa'-1}$$

et ainsi nous obtenons la même estimation pour le terme négligeable.

Pour le terme principal, si $\kappa' < 1/2$, nous pouvons utiliser le corollaire 2 avec

$\kappa = -\kappa'$ et la fonction g définie de la manière suivante :

$$g(p) = \begin{cases} \mu(p)\rho(p)/p & \text{si } p \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{si } p \notin \mathcal{P} \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'estimation suivante :

$$\sum_{\substack{d \leq x \\ d | P(\tilde{z})}} \mu(d) \frac{\rho(d)}{d} = \frac{e^{\kappa' \gamma}}{\Gamma(1-\kappa')} W(\tilde{z}) \left\{ f(s) + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)L'}{1-2\kappa'} (\log \tilde{z})^{2\kappa'-1} \right) \right\}$$

où

$$\tilde{z} = \min(x, z), \quad W(\tilde{z}) = \prod_{p \leq \tilde{z}} \left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right), \quad s = \frac{\log x}{\log \tilde{z}}$$

et f est la fonction définie dans la section 4 ; pour $0 < s \leq 1$, nous avons $f(s) = s^{-\kappa'}$. Finalement nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 2.

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \tilde{z}) = \frac{e^{\kappa' \gamma}}{\Gamma(1-\kappa')} W(\tilde{z}) X \left\{ f(s) + \mathcal{O}\left(\frac{(s+1)L'}{1-2\kappa'} (\log \tilde{z})^{2\kappa'-1} + \frac{x}{X} (\log x)^{\kappa'-1} \right) \right\}.$$

Étudions un exemple particulier : nous voulons, par une méthode de crible, déterminer le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\left\{ n \leq X : \forall p | n, p \leq X^{1/5}, p \not\equiv 1[5] \right\}$$

où X est un réel ≥ 1.

Si nous prenons $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers plus petits que X, $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers qui $\equiv 1[5]$ et $z = X^{1/5}$, nous obtenons :

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ (a, P(z)) = 1}} 1 = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, P(z)) = 1}} 1 = \sum_{\substack{n \leq X \\ \forall p | n, p \leq X^{1/5}, p \not\equiv 1[5]}} 1.$$

De plus, nous avons :

$$|\mathcal{A}_d| = X \frac{\rho(d)}{d} + \mathcal{O}\big(\rho(d)\big)$$

où ρ est une fonction multiplicative telle que :

$$\rho(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1[5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or

$$\sum_{p \leq Q} \frac{\rho(p) \log p}{p} = \sum_{\substack{p \leq Q \\ p \equiv 1[5]}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{4} \log Q + \mathcal{O}(1).$$

Il s'agit donc d'un crible de dimension 1/4. En utilisant le théorème 2, nous obtenons comme estimation :

$$\left\{ n \leq X : \forall p | n, p \leq X^{1/5}, p \not\equiv 1[5] \right\}$$
$$= \frac{e^{\gamma/4}}{\Gamma(3/4)} W(X) X \left\{ f(s) + \mathcal{O}\left(\frac{s+1}{(\log X)^{1/2}} \right) \right\}$$

où

$$W(X) = \prod_{p \leq X^{1/5}, p \equiv 1[5]} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad s = \frac{\log X}{\log X^{1/5}}.$$