# PETITS INTERVALLES CONTENANT DES PREMIERS DANS UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE DONNÉE

PATRICK LEMAIRE

## 1. Introduction

Nous nous intéressons à la détermination de petits intervalles effectifs contenant des nombres premiers dans une progression arithmétique donnée. Le problème de la détermination de nombres premiers dans une progression arithmétique semble commencer avec Euler : en 1775, il démontre qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo $q > 2$. En 1847, Dirichlet démontre que le nombre de premiers de la forme $mz+n$ avec $(m,n) = 1$ est infini. Kronecker, en 1875, s'intéresse aux intervalles contenant des nombres premiers dans une progression arithmétique donnée, en affirmant le fait suivant sans le démontrer : pour $m$ entier, il existe $n$ un autre entier assez grand tel que si $(q,r) = 1$, alors l'intervalle $[m;n]$ contient au moins un premier de la forme $hq+r$. L'existence d'une infinité de nombres premiers en progression arithmétique est redémontrée par Mertens en 1897 ; il montre par la même occasion comment trouver une constante $c(n,m)$ tel que $\forall x \geq 1$, l'intervalle $[x;c(n)x]$ contient au moins un nombre premier de la forme $hn+m$ où $(n,m) = 1$. Du théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, nous pouvons rapidement déduire que chaque progression dont le terme principal et la raison sont premiers entre eux, contient des premiers entre $x$ et $2x$, dès que $x$ dépasse une borne dépendant de la progression arithmétique ; mais trouver cette borne à partir de ce théorème s'avère délicat. En 1932, Erdős reprend la démonstration de ce théorème et obtient des bornes explicites, inférieures à $10^6$, pour les progressions $4n+1$, $4n+3$, $3n+1$ et $3n+2$. Ensuite, Mc Curley obtient de meilleurs intervalles et des constantes explicites grâce à une version plus forte du théorème des nombres premiers, puis Rumely et Ramaré[4] obtiennent encore de meilleurs résultats. Les plus récentes améliorations des résultats numériques sont dues à Bennett[1] qui s'y intéresse pour des preuves de transcendance. Les derniers résultats dont nous venons de parler se rapprochent de ceux que nous voulons obtenir dans notre travail.

Ce dernier est une extension des résultats de Ramaré et Saouter[5], qui cherchent des petits intervalles contenant des nombres premiers, sans s'occuper des progressions arithmétiques. Pour cela, ils travaillent avec la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et ses zéros. Nous reprenons la méthode qu'ils utilisent dans leur article, mais nous devons tenir compte de la congruence modulo $q$. Ainsi, au lieu de travailler avec la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, nous manipulons les fonctions $L(s,\chi^*)$ de Dirichlet, où $\chi^*$ est un caractère primitif modulo $q$. La nécessité d'utiliser des caractères primitifs se justifie par le comportement des fonctions $L$ obtenues à partir de ces caractères qui est très proche de la fonction $\zeta$. En particulier, les fonctions $L(s,\chi^*)$ de Dirichlet nous permettent d'obtenir ce qu'on appelle des formules explicites pour certaines fonctions arithmétiques. Nous utilisons les notations classiques : pour tout nombre réel $X$

$$\psi(X,q,\ell)=\sum_{\substack{n\leq X\\ n\equiv\ell[q]}}\Lambda(n),\quad \psi(X)=\sum_{n\leq X}\Lambda(n)$$

où $\Lambda$ désigne la fonction de von Mangold et

$$\vartheta(X,q,\ell)\quad=\quad\sum_{\substack{p\leq X\\ p\equiv\ell[q]}}\log\ p$$

où $p$ désigne un nombre premier. Les fonctions $L$ et les caractères de Dirichlet interviennent lorsque que nous étudions des sommes où intervient une condition de congruence, par exemple : $\sum_{\substack{p\equiv\ell[q]\\ p\leq x}}1=\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi mod q}\sum_{p\leq x}\overline{\chi(\ell)}$. Le problème est que les caractères de la somme précédentes ne sont pas tous primitifs, pour éviter ce problème nous utilisons les travaux de Rumely et Ramaré[4] : ils nous permettent de passer à une somme sur des caractères primitifs modulo $d|q$ où apparaît alors un terme d'erreur qui est négligeable. Nous pouvons résumer notre travail de la façon suivante : nous étudions des sommes de la forme $\sum_{p\equiv\ell[q]}F(p/X)$ où $p$ est un premier de $[(1-\Delta^{-1})X;X]$, $\Delta^{-1}$ un nombre positif plus petit que 1 et $F$ une fonction positive à support compact. Notre objectif est alors de trouver un $\Delta^{-1}$ le plus petit possible pour lequel cette somme est positive, ce qui traduira la présence d'un nombre premier égal à $p$ modulo $q$ dans cet intervalle. Une approche directe, en utilisant les résultats de Rumely et Ramaré[4], consisterait à écrire :

$$\psi(Y,q,\ell)-\psi(Y(1-\Delta^{-1}),q,\ell)\geq\frac{Y}{\phi(q)}\left[(1+\Delta^{-1})(1-\epsilon)-(1+\epsilon)\right],$$

ce qui serait strictement positif pour $\Delta^{-1}>2\epsilon/(1+\epsilon)$. Notre méthode possède deux avantages : les deux termes d'erreurs dans les sommes sont traités simultanément, ce qui fait disparaître le facteur 2 dans l'expression précédente, et nous affectons un poids autre que $\log p$ aux premiers, ce qui en plus amène un argument de crible. Dans la suite de ce travail, nous supposons que, pour un $T_0\geq 1\,000$ et pour tous les caractères de conducteur $d|q$, $q>2$, l'hypothèse généralisée de Riemann est vérifiée pour la hauteur $T_0$ : c'est à dire que les zéros de $L(s,\chi)$ dont la partie imaginaire est inférieure à $T_0$ ont leur partie réelle égale à $1/2$. Nous sommes aussi amener à travailler avec la fonction $\psi(X,q,\ell)$, essentiellement à cause des formules explicites, mais $\vartheta(X,q,\ell)$ est la fonction naturelle à étudier pour déterminer la présence de nombres premiers dans un intervalle. Ainsi nous sommes contraints de passer de $\vartheta(X,q,\ell)$ à $\psi(X,q,\ell)$ : il apparaît un terme d'erreur de la forme $x^{1/\alpha}\log x$ où $\alpha$ est un entier plus grand que 2. Dans un premier temps, nous démontrons des lemmes qui nous permettent d'obtenir un théorème général à la section 4. Nous en déduisons le sous-produit suivant :

**Théorème.** *Sous l'hypothèse généralisée de Riemann pour la hauteur $T_0=\infty$, pour $q>2$, $\ell$ inversible modulo $q$, $Y\geq 100q^7$ et $Y\geq 4.8\times10^{12}$ , l'intervalle $[Y;Y+101\phi(q)\sqrt{Y}\log Y]$ contient au moins un nombre premier égal à $\ell$ modulo $q$.*

Nous verrons dans la section 5 comment nous obtenons la valeur $C=101\phi(q)$. La valeur 101 n'est peut être pas optimale, mais notre approche impose que $C$ doit être de l'ordre de $\phi(q)$. Ensuite, nous faisons l'étude des cas particuliers $q\leq 13$ : ce sont des caractères pour lesquels l'hypothèse généralisée de Riemann est vérifiée pour

$T_0 = 10\,000$. Nous reformulons notre théorème principal pour établir l'affirmation suivante :

**Théorème.** *Pour $q \leq 13$, $\ell$ inversible modulo $q$ et pour $Y \geq 913889$, l'intervalle $[Y - \frac{Y}{654}; Y]$ contient un nombre premier $p$ congru a $\ell$ modulo $q$.*

La constante $\Delta^{-1} = 1/654$ fonctionne pour tous les modules, mais dans la section 7 nous donneront des valeurs de $\Delta^{-1}$ qui seront plus précise et qui dépendront de la progression arithmétique. Nous ferons pareil pour la constante $D = 913889$. Le théorème que nous obtenons nous permet d'obtenir $D = 3 \cdot 10^{11}$, la valeur que nous présentons ici est obtenu par un algorithme sous Pari GP où nous faisons les calculs à partir de la valeur $D = 10^{13}$, ce qui permet d'une part d'avoir de meilleurs intervalles et d'autre part de pouvoir comparer nos résultats à ceux que nous obtiendrions par la méthode de Rumely et Ramaré[4]. Nous aurions pu obtenir des résultats un peu plus précis pour les caractères 3, 4 et 6, pour des grandes valeurs de $Y$ en traitant le caractère principal de manière indépendante, comme le font Rumely et Ramaré[4], et en nous servant du fait que pour ce caractère l'hypothèse de Riemann est vérifiée pour des hauteurs plus grandes que $10^9$. Mais nous voulons un résultat uniforme pour tous les modules et avoir des résultats plus précis seulement pour certains caractères n'est pas notre but.

Les zéros non triviaux des fonctions $L(s, \chi^*)$ sont notés : $\rho = \beta + i\gamma$. $Z(\chi^*)$ désigne l'ensemble des zéros de la fonction $L(s, \chi^*)$. Dans la suite ce travail, $T_0$ désigne une hauteur plus grande que $1\,000$, à laquelle nous supposons que l'hypothèse généralisée de Riemann est vérifiée pour tous les caractères de conducteur $d|q$ où $q$ est un entier plus grand que 2.

## 2. LEMMES PRÉPARATOIRES.

Si $\chi$ est un caractère primitif modulo $q$ on le note $\chi^*$ et on pose :

$$N(T, \chi^*) = \sum_{\substack{\rho \in Z(\chi^*) \\ 0 < \gamma \leq |T|}} 1.$$

On pose également :

$$N(T) = \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq |T|}} 1.$$

où la somme porte sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Dans ce qui suit $f(x) = \mathcal{O}^*(g(x))$ signifiera $|f(x)| \leq g(x)$

**Lemme 1** (Mc Curley[2])**.** *Soit $T$ est un nombre réel $> 2$ et $\chi^*$ un caractère modulo $q$ non principal alors*

$$N(T, \chi^*) = \frac{T}{\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + \mathcal{O}^*\big(C_2 \log qT + C_3\big).$$

*où $C_2 = 0.9185$ et $C_3 = 5.512$.*
*Si $T$ est un nombre réel $> 2$ alors :*

$$N(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + \mathcal{O}^*\big(1.34 \log \frac{T}{2\pi}\big).$$

**Lemme 2.** *Si $T$ est un nombre réel $> 2$ et $m$ un entier naturel $> 0$. Si la somme a lieu sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann :*

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|>T}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}} = \frac{1}{m\pi T^m}\big(\log(T/2\pi) + \frac{1}{m}\big) + \mathcal{O}^*\bigg(\frac{1.34}{T^{m+1}}(2\log(T/2\pi)+1)\bigg).$$

*Si $\chi^*$ est un caratère primitif non principal modulo $q$ :*

$$\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*) \\ |\gamma|>T}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}} = \frac{1}{m\pi T^m}\big(\log(qT/2\pi) + \frac{1}{m}\big) + \mathcal{O}^*\bigg(\frac{2}{T^{m+1}}(2C_2\log(qT)+C_2+2C_3)\bigg)$$

**Preuve:** Dans le premier cas, la fonction L(s,$\chi^*$) est la fonction $\zeta(s)$, et présente donc une symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour les zéros. Nous avons alors :

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|>T}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}} = 2\sum_{\substack{\rho \\ \gamma>T}} \frac{1}{\gamma^{m+1}} = 2(m+1)\sum_{\substack{\rho \\ \gamma>T}} \int_\gamma^\infty \frac{dt}{t^{m+2}}$$
$$= (m+1)\int_T^\infty \frac{N(t,\chi^*)dt}{t^{m+2}} - \frac{N(T,\chi^*)}{T^{m+1}}$$

et on conclut par intégration par parties. Dans le cas d'un caractère non principal, la fonction L(s,$\chi^*$) ne présente pas de symétrie rapport à l'axe des abscisses pour les zéros. Nous procédons de la sorte :

$$\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*) \\ |\gamma|>T}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}} = \sum_{\substack{\rho \\ \gamma>T \\ \chi^*}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}} + \sum_{\substack{\rho \\ -\gamma>T \\ \chi^*}} \frac{1}{|\gamma|^{m+1}}$$
$$= (m+1)\bigg(\sum_{\substack{\rho \\ \gamma>T \\ \chi^*}} \int_\gamma^\infty \frac{dt}{t^{m+2}} + \sum_{\substack{\rho \\ -\gamma>T\chi^*}} \int_{-\gamma}^\infty \frac{dt}{t^{m+2}}\bigg) = (m+1)\int_T^\infty \frac{N(t,\chi^*)dt}{t^{m+2}} - \frac{N(T,\chi^*)}{T^{m+1}}$$

comme précédemment nous concluons par deux intégrations par parties. ■

Nous posons pour $T > 2$, $m > 1$ et $d$ un diviseur de $q$ :

$$(1) \qquad S_m(1,T) = \bigg(\frac{\log(T/2\pi)+1/m}{m\pi} + \frac{1.34(2\log(T/2\pi)+1)}{T}\bigg)(1+10^{-3})$$

$$(2) \qquad S_m(d,T) = \bigg(\frac{\log(qT/2\pi)+1/m}{m\pi} + \frac{2C_2\log(qT)}{T} + \frac{C_2+2C_3}{T}\bigg)(1+10^{-3})$$

**Lemme 3.** *Si $m$ est un entier naturel strictement plus grand que 1, $T$ un nombre réel $> 2$, $X \geq 10^3$ et $\chi^*$ un caractère primitif modulo $d$ un diviseur de $q$ alors :*

$$\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*) \\ |\gamma|>T}} \frac{X^\beta}{|\gamma|^{m+1}} \leq S_m(d,T)\frac{\sqrt{X}}{T^m} + S_m(d,T_0)\frac{X}{2T_0^m}$$

*pour $T \leq T_0$.*

**Preuve:** Par hypothèse, nous savons que si $L(s,\chi^*) = 0$ et $|\gamma| \leq T_0$ alors $\beta = 1/2$. De plus nous utilisons le fait que dans la bande critique : $L(s,\chi^*) = 0 \Leftrightarrow$

$L(1-\bar{s},\chi^*)=0$. Nous en déduisons :

$$\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*)\\ |\gamma|>T}} \frac{X^\beta}{|\gamma|^{m+1}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*)\\ |\gamma|>T}} \frac{X^\beta+X^{1-\beta}}{|\gamma|^{m+1}}.$$

Nous distinguons deux cas :

$$T<\gamma\le T_0 \Rightarrow X^\beta+X^{1-\beta}=2\sqrt{X}$$
$$T_0\le|\gamma|\Rightarrow 0\le X^\beta+X^{1-\beta}\le 1+X\le(1+10^{-3})X.$$

Ainsi nous obtenons :

$$\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*)\\ |\gamma|>T}} \frac{X^\beta}{|\gamma|^{m+1}} \le \sqrt{X}\frac{S_m(d,T)}{T^m}+\frac{XS_m(d,T_0)}{2T_0^m}.$$

■

**Lemme 4.** *Soient $u$, $t$, $\delta$ trois paramètres strictement positifs et $X\ge 10^3$. Nous avons :*

$$\log\left(1-\frac{1}{(e^u(1+\delta t)X)^2}\right)-\log\left(1-\frac{1}{((1+\delta t)X)^2}\right)\le\frac{u}{X}$$
$$\log\left(\frac{e^u(1+\delta t)X-1}{e^u(1+\delta t)X+1}\right)-\log\left(\frac{(1+\delta t)X-1}{(1+\delta t)X+1}\right)\le u+\log 2$$

**Preuve:** Le premier cas est une majoration classique. Nous démontrons la deuxième inégalité. Remarquons d'abord que :

$$\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\log\left(1-\frac{2}{t+1}\right).$$

Majorons ensuite la nouvelle différence :

$$\left|\log\left(1-\frac{2}{Xe^u(1+\delta t)}\right)-\log\left(1-\frac{2}{X(1+\delta t)}\right)\right|\le\left|\log\left(1-\frac{2}{Xe^u}\right)\right|+\left|\log\left(1-\frac{2}{X}\right)\right|$$
$$\le\log\left(\frac{e^u}{(e^u-2/X)(1-2/X)}\right)\le\log 2e^u$$

■

## 3. Fonctions $\psi(X,\chi^*)$, $\psi(X,q,\ell)$ et $\vartheta(X,q,\ell)$

Avant de passer au théorème principal, nous allons nous pencher sur les fonctions $\psi(X,\chi^*)$, $\psi(X,q,\ell)$ et $\vartheta(X,q,\ell)$.

**Définition 1.** *Soit $\chi^*$ un caractère primitif modulo $q$ et $X$ un réel $\ge 2$ non entier, nous utilisons les notations suivantes :*

$$\psi(X,\chi^*)=\sum_{n\le X}\Lambda(n)\chi^*(n)$$
$$R_q(X,T,\chi^*)=\frac{X(\log(qT))^2}{T}+\min\left(1,\frac{X}{T||X||}\right)\log(X)$$
$$R(X,T)=\frac{X(\log(T))^2}{T}+\min\left(1,\frac{X}{T||X||}\right)\log(X)$$

**Théorème 1.** *Soit $T > 2$, $\chi^*$ un caractère primitif modulo $q$, $X$ un nombre positif $\geq 2$ non entier et $\mathfrak{a} = \frac{1-\chi^*(-1)}{2}$. Nous avons plusieurs cas de figures :*
*Pour la fonction $\psi(X)$ :*

$$\psi(X) = X - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\leq T}} \frac{X^\rho}{\rho} + \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1-\frac{1}{X^2}) + \mathcal{O}^*\big(R(X,T)\big).$$

*Si $\chi^*$ est un caractère primitif non principal modulo $q > 2$ et $\mathfrak{a} = 0$ alors :*

$$\psi(X,\chi^*) = -\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*) \\ |\gamma|\leq T}} \frac{X^\rho}{\rho} - \log(X) - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right) - b(\chi^*) + \mathcal{O}^*\big(R_q(X,T,\chi^*)\big).$$

*Si $\chi^*$ est un caractère primitif non principal modulo $q > 2$ et $\mathfrak{a} = 1$ alors :*

$$\psi(X,\chi^*) = -\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*) \\ |\gamma|\leq T}} \frac{X^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - b(\chi^*) + \mathcal{O}^*\big(R_q(X,T,\chi^*)\big).$$

*Dans ces formules, $b(\chi^*)$ est une constante qui ne dépend que de $\chi^*$.*

**Preuve:** Nous montrons la formule pour $\psi(X)$, les formules pour $\psi(X,\chi^*)$ s'en déduiront rapidement. Nous posons :

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < Y < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } Y = 1, \\ 1 & \text{si } Y > 1 \end{cases}, \quad \psi_0(X) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n)\delta(\frac{X}{n}).$$

Nous exprimons $\delta(y)$ au moyen d'une intégrale :

$$\delta(y) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} y^s \frac{ds}{s},$$

où $\alpha$ est un nombre positif. Pour justifier cette formule nous allons approximer $\delta(y)$ par l'intégrale finie :

$$\delta(y,T) = \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} y^s \frac{ds}{s},$$

où $T > 0$. Nous allons montrer :

$$\left|\delta(y) - \delta(y,T)\right| \leq y^\alpha \min(1, (T|\log y|)^{-1}), \text{ si y} \neq 1 \tag{3}$$

$$\left|\delta(y) - \delta(y,T)\right| \leq \frac{\alpha}{T}, \text{ si y} = 1 \tag{4}$$

La preuve se divise en trois cas. Commencons par le cas $0 < y < 1$. Nous décalons le domaine d'intégration aux lignes horiontales $\sigma \pm iT$ avec $\alpha < \sigma < \infty$, nous obtenons :

$$|\delta(y,T)| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int_{\alpha+iT}^{\infty+iT} y^s \frac{ds}{s}\right| \leq \frac{1}{\pi T}\int_\alpha^\infty y^\sigma d\sigma = y^\alpha(\pi T|\log y|)^{-1}.$$

Maintenant, nous intégrons sur un demi cercle de centre 0 orienté vers la droite et nous pouvons écrire :

$$|\delta(y,T)| \leq \frac{1}{2}y^\alpha,$$

ce qui nous donne (3). Passons au cas où $y > 1$. Les arguments sont similaires mais nous décalons cette fois le domaine d'intégration vers la gauche. Il y a une contribution du pôle 0 qui fait apparaître le 1 de $\delta(y)$. Nous aboutissons aussi à (3). Il nous reste à traiter le cas $y = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}\delta(1,T) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha+iT}^{\alpha+iT}\frac{ds}{s} = \frac{1}{2i\pi}\Big(\log(\alpha+iT)-\log(\alpha-iT)\Big)\\ &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\log|\alpha+iT| + i\arg(\alpha+iT) - \log|\alpha-iT| - i\arg(\alpha-iT)\Big)\\ &= \frac{1}{2i\pi}\arg(\alpha+iT) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arg(T-i\alpha),\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir (4). Nous écrivons maintenant la formule classique :

$$-\frac{\zeta^{'}(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)n^{-s}.$$

Cette formule nous encourage à poser :

$$\psi(X,T) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} -\frac{\zeta^{'}(s)}{\zeta(s)}\frac{X^s}{s}ds,$$

avec $\alpha > 1$. Nous déduisons de (3) et (4) :

$$|\psi_0(X)-\psi(X,T)| < \sum_{n\neq X}\Lambda(n)\Big(\frac{X}{n}\Big)^{\alpha}\min\big(1,(T|\log\frac{X}{n}|)^{-1}\big)+\frac{\alpha}{T}\Lambda(X)$$

Pour $\alpha = 1+(\log X)^{-1}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&|\psi_0(X)-\psi(X,T)| \ll X(\log X)\sum_{n\neq X}n^{-\alpha}\min\big(1,(T|\log\frac{X}{n}|)^{-1}\big)+\frac{\log X}{T}\\ &\ll X(\log X)\int_1^{\infty}u^{-\alpha}\min\big(1,(T|\log\frac{X}{u}|)^{-1}\big)\mathbf{1}_A(u)du + (\log X)\min\big(1,\big(T|\log\frac{X}{< X >}|\big)^{-1}\big),\end{aligned}$$

où $A$ est l'ensemble des $u$ qui vérifient $|u-X|\geq 1$ et $< x >$ désigne l'entier le plus proche de $X$ et différent de $X$. L'intégrale est un $\mathcal{O}(\log X)$ et de plus :

$$\left|\log\frac{X}{< X >}\right| = \left|\log\frac{< X >}{X}\right| = \left|\log\big(1+\frac{< X > -X}{X}\big)\right| \geq \frac{1}{2}\frac{||X||}{X},$$

où $||X|| = |X- < X > |$ désigne la distance de $X$ à l'entier le plus proche de $X$ et différent de $X$. Nous pouvons en conclure que :

$$\psi_0(X) = \psi(X,T)+\mathcal{O}(\frac{X}{T}(\log X)^2)+\mathcal{O}(\min(1,\frac{X}{||X||})\log X).$$

Il nous reste à évaluer $\psi(X,T)$. Nous décalons cette fois le domaine d'intégration sur les lignes horizontales $\sigma \pm iT$ avec $-\infty < \sigma < \alpha$. Nous rencontrons des pôles en $s = 1$, $s = 0$, $s = -2m$, avec $m \geq 1$, et $s = \rho = \beta + i\gamma$ où $|\gamma| < T$. La hauteur $T > 2$ est choisie de sorte que $(\log T)^{-1} \ll |\gamma - T|$, pour tous les zéros $\rho$. Nous pouvons écrire ces majorations classiques de la fonction $\zeta(s)$ pour $-1 < \sigma < 2$ et $s = \sigma \pm iT$ avec $T \geq 2$ :

$$\frac{\zeta^{'}}{\zeta}(s) \ll (\log|s|)^2.$$

Cette majoration reste valable pour $\sigma < -1$.

$$\psi(X,T) = X - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X^{-2m}}{m} - \sum_{|\gamma|<T} \frac{X^{\rho}}{\rho} + \mathcal{O}\Big(T^{-1}\int_{-\infty}^{\alpha} X^{\sigma}\big(\log(|\sigma|+T)\big)^2 d\sigma\Big).$$

L'intégrale est un $\mathcal{O}(XT^{-1}(\log T)^2(\log X)^{-1})$, de plus :

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \log 2\pi \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X^{-2m}}{m} = -\log\left(1 - X^{-2}\right)$$

et la conclusion est immédiate. La formule est alors démontrée pour $\psi(X)$, pour $\psi(X,\chi^*)$ nous utilisons les mêmes méthodes. Nous pouvons obtenir :

$$\psi_0(X,\chi^*) = \psi(X,T,\chi^*) + \mathcal{O}(\frac{X}{T}(\log qX)^2) + \mathcal{O}(\min(1,\frac{X}{||X||})\log X),$$

avec :

$$\psi_0(X,\chi^*) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n)\chi^*(n)\delta(\frac{X}{n}) \quad \text{et} \quad \psi(X,T,\chi^*) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} -\frac{L'(s,\chi^*)}{L(s,\chi^*)}\frac{X^s}{s}ds$$

Il reste plus qu'à refaire ce que nous venons de faire plus haut, mais avec les fonctions $L(s,\chi*)$. Nous obtenons alors les formules désirées. ■

**Lemme 5.** *Soit $g$ une fonction continue différentiable sur $[a;b]$ où $2 \leq a \leq b < \infty$. Nous avons :*

$$\int_a^b \psi(t)g(t)dt = \int_a^b tg(t)dt - \sum_{\rho}\int_a^b \frac{t^{\rho}g(t)dt}{\rho} + \int_a^b \left(\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right)g(t)dt$$

*Si le caractère primitif est non principal, alors nous avons deux cas suivant les valeurs de $\mathfrak{a}$. Pour $\mathfrak{a} = 1$ :*

$$\int_a^b \psi(t,\chi^*)g(t)dt = -\sum_{\rho\in Z(\chi^*)}\int_a^b \frac{t^{\rho}g(t)dt}{\rho} - b(\chi^*)\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b \log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)g(t)dt$$

*et pour $\mathfrak{a} = 0$ :*

$$\int_a^b \psi(t,\chi^*)g(t)dt = -\sum_{\rho\in Z(\chi^*)}\int_a^b \frac{t^{\rho}g(t)dt}{\rho} - b(\chi^*)\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b \log\left(1-\frac{1}{t^2}\right)g(t)$$
$$-\int_a^b \log(t)g(t)dt$$

**Preuve:** Nous allons prouver le cas $\omega = 0$. Nous supposons $]a;b[\bigcap \mathbb{N} = \oslash$, et ce sera suffisant par continuité et les propriétés de l'intégrale. Nous avons :

$$\int_a^b \psi(t,\chi*)g(t)dt = -\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T \\ \chi^*}}\int_a^b \frac{t^{\rho}g(t)dt}{\rho} - b(\chi*)\int_a^b g(t)dt$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^b \log(1-\frac{1}{t^2})g(t)dt - \int_a^b \log(t)g(t)dt + \int_a^b R(t,T,\chi*)g(t)dt.$$

Nous pouvons écrire :

$$\Big|\int_a^b R(t,T,\chi*)g(t)dt\Big| \leq \int_a^b \frac{t\log(qtT)^2|g(t)|dt}{T} + \int_a^b \min\left(1, \frac{t}{||t||T}\right)\log(t)|g(t)|dt$$
$$\leq ||g||_1 b\frac{(\log qbT)^2}{T} + ||g||_1\frac{\log(b)b}{T}$$

qui tend vers 0 quand $T$ tend vers $+\infty$. Une intégration par parties nous donne :

$$\int_a^b \frac{t^\rho}{\rho}g(t)dt \quad = \quad -\int_a^b \frac{t^{\rho+1}}{\rho}g(t)dt + \frac{b^{\rho+1}}{\rho}g(b) - \frac{a^{\rho+1}}{\rho}g(a)$$

Nous en déduisons :

$$\left|\int_a^b t^\rho g(t)dt\right| \ll \frac{1}{|\rho|}$$

d'où :

$$\sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*)\\ |\gamma|\leq T}} \left|\int_a^b \frac{t^\rho}{\rho}g(t)dt\right| \ll \sum_{\substack{\rho\in Z(\chi^*)\\ |\gamma|\leq T}} \frac{1}{|\rho|^2}$$

Ainsi la première série converge absolument donc elle converge. ■

Nous rappelons un théorème, qui utilise des majorations à la Brun-Titchmarsh ; nous l'utiliserons de nombreuses fois par la suite :

**Théorème 2** ((Montgomery et Vaughan)[3])**.** *Soit $q \geq 1$ un entier. Nous avons :*

$$Card\{p \in [M+1; N+M], p \equiv a[q]\} \leq \frac{2N}{\phi(q)\log(N/q)}$$

*pour $1 \leq q < N$ et $M > 0$.*

**Lemme 6.** *Soient trois réels $X$, $u$, $\delta$ et $q > 2$ un entier vérifiant :*

$$X \geq 10^2 q^7, \quad 0 \leq \delta \leq 0.1, \quad 0 \leq u \leq 0.1\ ,\ \frac{uX}{q} \geq 40.$$

*Nous avons pour $t \in [0;1]$ :*

$$\vartheta(Xe^u(1+\delta t), q, a) - \vartheta(X(1+\delta t), q, a) \leq 2.8236\frac{\log(X)uX}{\log(uX)\phi(q)}.$$

**Preuve:** Nous posons $Y = X(1+\delta t)$. D'après le théorème 4 :

$$\vartheta(Xe^u(1+\delta t), q, a) - \vartheta(X(1+\delta t), q, a) \leq \log(Ye^u)\sum_{Y<p\leq Ye^u} 1$$
$$\leq 2\log(Ye^u)\frac{Ye^u - Y}{\phi(q)\log\left(\frac{Y(e^u-Y)}{q}\right)} \leq \frac{2.1036Yu}{\phi(q)}\frac{u+\log Y}{\log(e^u-1)+\log(Y/q)}.$$

Comme $Y \geq X$, la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{u+\log(x)}{\log(e^u-1)-\log(q)+\log(x)}$, nous donne :

$$\leq \frac{2.1036Yu}{\phi(q)}\frac{u+\log(X)}{\log(e^u-1)+\log(X/q)} \leq \frac{2.1036Yu}{\phi(q)}\left(1+\frac{u-\log(e^u-1)+\log q}{\log(e^u-1)+\log(X/q)}\right)$$
$$\leq \frac{2.15Yu}{\phi(q)}\left(1-\frac{\log(u/q)}{\log(uX/q)}\right) \leq \frac{2.15Yu}{\phi(q)}\frac{\log X}{\log(uX/q)} \leq \frac{2.172Xu}{\phi(q)}\frac{\log X}{\log(uX/q)}.$$

puisque $e^u - 1 \leq 1.0518u$ et $u - \log(e^u - 1) \leq -1.022 \log u$ pour $u \in ]0; 0.1]$. Nous allons montrer que $\frac{\log uX}{\log uX/q} \leq 1.3$ et la conclusion sera immédiate. Nous écrivons :

$$\frac{\log uX}{\log uX/q} = \frac{1}{1 - \log q/\log uX}.$$

Or comme $uX \geq 40q$, alors :

$$\frac{\log uX}{\log uX/q} \leq \frac{1}{1 - \log q/\log 40q} \leq 1.3.$$

Le lemme est alors démontré. ■

Nous allons maintenant prolonger les estimations de Rosser et Schoenfeld[6] sur la différence $\psi(X) - \vartheta(X)$, à la différence $\psi(X, q, \ell) - \vartheta(X, q, \ell)$. Pour cela nous avons besoin du résultat suivant :

**Lemme 7.** *Soient $q \geq 2$ et $a$ deux entiers naturels et notons $\omega(q)$ le nombre de diviseurs premiers de $q$. Nous avons la majoration suivante :*

$$\mathrm{Card}\{x[q]/x^\alpha \equiv a[q]\} \leq \alpha^{\omega(q)}.$$

**Preuve:** Supposons que $q$ ait une décomposition en facteurs premiers de la forme $q = p_1^{\alpha_1}.....p_n^{\alpha_n}$. Si $x^\alpha \equiv a[q]$ alors $\forall i = 1..n$, $x^\alpha \equiv a_i[p_i]$ où $a_i \equiv a[p_i]$. Comme $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}_p$ est un corps pour $p$ premier alors :

$$\mathrm{Card}\{x[q]/x^\alpha \equiv a_i[p_i]\} \leq \alpha.$$

■

**Lemme 8.** *Pour $X > 100q^7$, nous avons :*

$$0 \leq \psi(X, q, a) - \vartheta(X, q, a) \leq \frac{5^{\omega(q)} 16.6\sqrt{X}}{\phi(q)} + 1.48X^{1/6} \log X.$$

**Preuve:** Nous allons maintenant estimer la différence $\psi(X, q, \ell) - \vartheta(X, q, \ell)$. Nous avons :

$$\psi(X, q, a) - \vartheta(X, q, a) = \sum_{\substack{p^\alpha \leq X \\ p^\alpha \equiv a[q] \\ p^\alpha \geq 2}} \log p = \sum_{2 \leq \alpha \leq 5} \sum_{\substack{p^\alpha \leq X \\ p^\alpha \equiv a[q]}} \log p + \sum_{\substack{p^\alpha \leq X \\ p^\alpha \equiv a[q] \\ p^\alpha \geq 6}} \log p.$$

Nous allons traiter d'abord les quatre premières sommes en utilisant des inégalités à la Brun-Titchmarsh et le lemme 7. Nous obtenons :

$$\sum_{2 \leq \alpha \leq 5} \sum_{\substack{p^\alpha \leq X \\ p^\alpha \equiv a[q]}} \log p \leq 5^{\omega(q)} \frac{\sqrt{X}}{\phi(q)} \left( \frac{14}{5 \times 2} + \frac{21 \times 2}{4 \times 3} + \frac{28 \times 2}{3 \times 4} + \frac{35 \times 2}{2 \times 5} \right)$$

$$\leq 16.6 \times 5^{\omega(q)} \frac{\sqrt{X}}{\phi(q)}.$$

Passons maintenant à la dernière somme :

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leq X \\ p^\alpha \equiv a[q] \\ \alpha \geq 6}} \log p \leq \sum_{\substack{p^\alpha \leq X \\ \alpha \geq 6}} \log p \leq \sum_{\substack{\alpha \geq 6 \\ \alpha \leq \log X/\log 2}} \vartheta(X^{1/\alpha}) \leq \frac{\log X}{\log 2} \vartheta(X^{1/6}).$$

Par un calcul numérique, et en utilisant les travaux de Rosser et Schoenfeld[6], nous pouvons affirmer que :

$$\vartheta(X^{1/6}) \leq 1.023X^{1/6}$$

Finalement :

$$\psi(X,q,a) - \vartheta(X,q,a) \leq \frac{5^{\omega(q)}16.6\sqrt{X}}{\phi(q)} + 1.48X^{1/6}\log X.$$

■

Le lemme 5 nous dit qu'il est possible d'exprimer l'intégrale $\int_a^b \psi(t,\chi^*)g(t)dt$, par l'intermédiaire de sommes sur les zéros des fonctions $L(s,\chi^*)$, quand le caractère est primitif. Pour ne pas avoir le problème des caractères non primitifs, nous allons utiliser les travaux de Ramaré et Rumely[4]. On introduit les fonctions :

$$\psi^*(X,k,\ell) = \sum_{n\leq X} \omega_k(\ell,n)\Lambda(n)$$

avec :

$$\omega_k(\ell,n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \quad mod \quad k} \chi_1^*(n)\overline{\chi(\ell)}$$

où $\chi_1^*$ est le caractère primitif modulo k de $\chi$.
Soit $K$ le plus grand diviseur commun de k et n, nous avons les relations :

$$\omega_k(\ell,n) = \begin{cases} \frac{\phi(K)}{\phi(k)} & \text{si } n \equiv \ell[K] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous posons alors :

$$\psi^*(X,k,\ell) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{d|k} \sum_{\chi * mod \quad d} \overline{\chi(\ell)}\psi(X,\chi*)$$

Les travaux de Ramaré et de Rumely[4], nous permettent d'avoir ces inégalités :

$$\psi(X,k,\ell) \leq \psi^*(X,k,\ell) \leq \psi(X,k,\ell) + \log X \sum_{p|k} \frac{1}{p-1}$$

qui nous évitent le problème des caractères non principaux.

## 4. Le principe général.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Une fonction $f$ définie sur $[0;1]$ est dite $m$-admissible, si elle vérifie les conditions suivantes :

(1) f est $m$ fois différentiable sur $[0;1]$.
(2) $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$ pour $0 \leq k \leq m-1$.
(3) $f \geq 0$.
(4) f est non identiquement nulle.

Pour une telle fonction, nous définissons :

$$\mu_m^*(f) = \frac{||f^{(m)}||_1}{||f||_1}, \quad \mu_m(f) = \frac{||f^{(m)}||_2}{||f||_1},$$

où nous utilisons les notations classiques :

$$||g||_1 = \int_0^1 |g(t)dt, \quad ||g||_2 = \left( \int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Nous allons aussi utiliser les notations, pour $a \in [0; \frac{1}{2}]$ :

$$v(f,a) = \int_0^a f(t)dt + \int_{1-a}^1 f(t)dt \quad \text{et } w(f,a) = v(f,a)/||f||_1.$$

**Lemme 9.** *Soient $X$ et $u$ deux nombres strictement positifs, et $f$ une fonction $m$-admissible. Nous avons dans le cas du caractère principal modulo 1 :*

$$\frac{1}{||f||_1}\left[Xu - \sum_\rho \left(\frac{e^{u\rho}-1}{\rho}\right) X^\rho \int_0^1 (1+\delta t)^\rho f(t)dt - \frac{u}{X}\right]$$
$$\leq u(X - \frac{1}{X}) + u(1+\delta)N(T)\sqrt{X} + (1+\delta)^{m+1}\mu_m^*(f)\frac{e^u+1}{\delta^m} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|>T}} \frac{X^\beta}{|\gamma|^{m+1}}.$$

*Dans le cas où $\omega = 1$,nous pouvons écrire :*

$$\frac{1}{||f||_1}\left| \int_0^1 \left(\psi(Xe^u(1+\delta t), \chi^*) - \psi(X(1+\delta t), \chi^*)\right) f(t)dt \right|$$
$$\leq u(1+\delta)N(T,\chi^*)\sqrt{X} + u + \log 2 + (1+\delta)^{m+1}\mu_m^*(f)\left(\frac{e^u+1}{\delta^m} \sum_{\substack{\rho \in Z(\chi^*) \\ |\gamma|>T}} \frac{X^\beta}{|\gamma|^{m+1}}\right),$$

*et dans le cas où $\omega = 0$ :*

$$\frac{1}{||f||_1}\left| \int_0^1 \left(\psi(Xe^u(1+\delta t), \chi^*) - \psi(X(1+\delta t), \chi^*)\right) f(t)dt \right|$$
$$\leq u(1+\delta)N(T,\chi^*)\sqrt{X} + \frac{u}{2X} + (1+\delta)^{m+1}\mu_m^*(f)\left(\frac{e^u+1}{\delta^m} \sum_{\substack{\rho \in Z(\chi^*) \\ |\gamma|>T}} \frac{X^\beta}{|\gamma|^{m+1}}\right)$$

**Preuve:** Nous traitons en détails le cas de la fonction $\zeta(s)$, les deux autres cas s'en déduisent rapidement, en faisant appel au lemme 4. Nous séparons les cas où $|\gamma| \leq T$ et $|\gamma| > T$ :

$$|\gamma| \leq T \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \text{ , ainsi : } \left| \int_0^1 (1+\delta t)^\rho f(t)dt \right| \leq (1+\delta)^{1/2}||f||_1,$$
$$\left|\frac{e^{u\rho}-1}{\rho}\right| = \left| \int_0^u e^{x\rho}dx \right| \leq ue^{u/2} \leq u(1+\delta)^{1/2}.$$

Pour $|\gamma| > T$, une intégration par parties et les hypothèses sur la $m$-admissibilité donnent :

$$\int_0^1 (1+\delta t)^\rho f(t)dt = \frac{(-1)^m}{(\rho+1)...(\rho+m)(\delta)^m} \int_0^1 (1+\delta t)^{\rho+m} f^{(m)}(t)dt$$

d'où :

$$\left| \int_0^1 (1+\delta t)^\rho f(t)dt \right| \leq \frac{(1+\delta)^{m+1}||f^{(m)}||_1}{|\gamma|^m \delta^m}$$

Le résultat s'en déduit sans problèmes. ■

**Définition 2.** *Soient $m \geq 2$ et $q > 2$ deux entiers naturels et $T \geq 2$ un réel plus petit que $T_0 \geq 1000$. Nous définissons deux fonctions de $T$ de la facon suivante :*

$$\tilde{N}(T) = \sum_{d|q} \sum_{\chi^* mod \quad d} N(T,\chi^*) \text{ et } \tilde{S}(T,T_0) = \sum_{d|q} \sum_{\chi^* mod \quad d} \left( \frac{S_m(d,T)}{\sqrt{Y}} + \frac{S_m(d,T)}{2} \left( \frac{T}{T_0} \right)^m \right).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

**Théorème 3.** *Soit $m \geq 2$ un entier naturel et $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \geq 1$, $\alpha_4 \in [\frac{1}{2};1]$, $a \in [0;\frac{1}{2}]$ quatre paramètres réels. Soit $f$ une fonction $m$ admissible que nous nous laissons le soin de choisir. Nous posons :*

$$Y = X(1+\delta(1-a))e^u; \quad \delta = mu; \quad u = \frac{1.001}{T}\left(\alpha_3 \frac{\mu_m^*(f_m)}{m^m} T\tilde{S}(T,T_0)\right)^{1/m+1}$$

$$\alpha_3^{-1} = \left(0.9 - 1.16\alpha_1 - \frac{2.8236 w(f,a)}{\alpha_4} - \frac{18.31}{\alpha_2}\right)/2.22$$

*et nous supposons que cette constante est positive. De plus nous travaillons avec $X \geq 100q^7$. Soit $T \geq 2$ un réel. Nous supposons de plus les relations suivantes vérifiées :*

$$\tilde{N}(T) \leq \alpha_1\sqrt{Y}; \quad mu \leq 0.1 \ ; \ uY \geq 40q; \quad \alpha_2 \leq \frac{u\sqrt{Y}}{5^{\omega(q)}}; \quad Y^{\alpha_4} \leq uY; \quad T \leq T_0.$$

*Alors :*

$$[\vartheta(Y,q,a) - \vartheta(Y\frac{1+mua}{1+mu(1-a)e^{-u}},q,a)][1-w(f,a)] \geq Y^{\alpha_4 - 1}\left[\frac{0.09Y}{\phi(q)} - 2\right]$$
$$-1.52Y^{1/6}\log 2Y - \frac{(\log 2Y)^2}{\log 2} - \log 2$$

*qui est une borne strictement positive pour $Y$ assez grand.*

**Preuve:** Nous posons $Y^{'} = (Y(1+mua)e^{-u})/(1+mu(1-a))$. Nous pouvons écrire pour $a \in [0;\frac{1}{2}]$ :

$$\int_a^{1-a}\left(\vartheta(e^u(1+\delta(1-a))X,q,a) - \vartheta((1+\delta a)X,q,a)\right)f(t)dt$$
$$\geq \int_a^{1-a}\left(\vartheta(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \vartheta((1+\delta t)X,q,a)\right)f(t)dt.$$

Étendons les majorations sur $[0;1]$ en remarquant que :

- $\displaystyle\int_a^{1-a}\left(\vartheta(e^u(1+\delta(1-a))X,q,a) - \vartheta((1+\delta a)X,q,a)\right)f(t)dt = \left[\vartheta(Y) - \vartheta(Y^{'})\right]\left[||f||_1 - v(f,a)\right].$
- $\displaystyle\int_a^{1-a}\left(\vartheta(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \vartheta((1+\delta t)X,q,a)\right)f(t)dt$

$$\geq \int_0^1\left(\vartheta(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \vartheta((1+\delta t)X,q,a)\right)f(t)dt - \frac{2.8236Xu\log(X)v(f,a)}{\phi(q)\log(uX)}$$
$$\geq \int_0^1\left(\vartheta(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \vartheta((1+\delta t)X,q,a)\right)f(t)dt - \frac{2.8236uXv(f,a)}{\alpha_4\phi(q)}.$$

Nous pouvons remplacer $\vartheta$ par $\psi$. Posons :

$$I = \frac{1}{||f||_1}\int_0^1 \Big(\vartheta(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \vartheta((1+\delta t)X,q,a)\Big)f(t)dt$$

$$J = \frac{1}{||f||_1}\int_0^1 \Big(\psi(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \psi((1+\delta t)X,q,a)\Big)f(t)dt$$

En utilisant le lemme 7, nous sommes en mesure d'écrire pour $t \in [0;1]$ :

$$\vartheta(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \vartheta((1+\delta t)X,q,a) - (\psi(e^u(1+\delta t)X,q,a) - \psi((1+\delta t)X,q,a))$$

$$\geq -\frac{16.6\log(e^uX(1+\delta t))\sqrt{(}e^uX(1+\delta t))}{\phi(q)} - 1.48(Xe^u(1+\delta t))^{1/6}\log(e^uX(1+\delta t))$$

$$\geq -\frac{18.31\log 2X\sqrt{X}}{\phi(q)} - 1.54X^{1/6}\log 2X.$$

Par conséquent nous avons :

$$I \geq J - \frac{18.31\log 2X\sqrt{X}}{\phi(q)} - 1.54X^{1/6}\log 2X.$$

Dorénavant, nous allons nous intéresser à l'intégrale J. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} J \geq & \frac{1}{||f||_1}\int_0^1 \Big(\psi^*(Xe^u(1+\delta t),q,a) - \psi^*(X(1+\delta t),q,a)\Big)f(t)dt - \\ & \frac{1}{||f||_1}\int_0^1 f(t)\log(e^uX(1+\delta t))\sum_{p|k}\frac{1}{p-1}dt \\ \geq & \underbrace{\frac{1}{||f||_1}\int_0^1 \Big(\psi^*(Xe^u(1+\delta t),q,a) - \psi^*(X(1+\delta t),q,a)\Big)f(t)dt}_{A} - \frac{(\log 2X)^2}{\log 2} \end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant à A :

$$\begin{aligned} A \geq \frac{1}{\phi(q)}\Bigg[ & Xu - \sum_\rho \left(\frac{e^{u\rho}-1}{\rho}\right)X^\rho \int_0^1 (1+\delta t)^\rho \frac{f(t)}{||f||_1}dt - \frac{u}{X} - \\ & \sum_{\substack{d|q\\ d\neq 1}}\sum_{\chi^* mod\ d}\frac{\overline{\chi^*(a)}}{||f||_1}\int_0^1 \Big(\psi(Xe^u(1+\delta t),\chi^*) - \psi(X(1+\delta t),\chi^*)\Big)f(t)dt\Bigg]. \end{aligned}$$

Nous traitons d'abord le cas des caractères de conducteurs différents de 1 . Pour la double somme, nous distinguons les cas $\omega = 0$ et $\omega = 1$. Nous pouvons écrire :

$$\left|\frac{1}{\phi(q)||f||_1}\sum_{\substack{d|q\\ d\neq 1}}\sum_{\chi^* mod\ d}\overline{\chi^*(a)}\int_0^1 \Big(\psi(Xe^u(1+\delta t),\chi^*) - \psi(X(1+\delta t),\chi^*)\Big)f(t)dt\right|$$

$$\begin{aligned} \leq \frac{1}{\phi(q)}\Bigg[ & \frac{1}{2}\frac{u(\phi(q)-1)}{X} + (u+\log 2)\phi(q) + u\sqrt{X}(1+\delta)\sum_{d|q}\sum_{\chi^* mod\ d} N(T,\chi^*) + \\ & \sum_{d|q}\sum_{\chi^* mod\ d}\frac{2.106}{\delta^m}\mu_m^*(1+\delta)^{m+1}\left(\frac{S_m(d,T)\sqrt{X}}{T^m} + \frac{XS_m(d,T_0)}{2T_0^m}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Nous regroupons ce que nous savons, et nous en déduisons :

$$A \geq \frac{uX}{\phi(q)}\left[1 - \frac{\phi(q)}{2X^2} - \frac{1}{\sqrt{X}}(1+\delta)\tilde{N}(T) - \frac{\phi(q)}{X} - \frac{2.106\mu_m^*(f)}{uT^{m+1}\delta^m\sqrt{(0.9)}}\tilde{S}(T,T_0) - \phi(q)\frac{\log 2}{uX}\right]$$
$$\geq \frac{uX}{\phi(q)}\left[1 - 1.16\alpha_1 - \frac{\phi(q)}{X^2} - \frac{\phi(q)}{X} - \frac{2.106\mu_m^*(f)}{m^m\sqrt{(0.9)}}\left(\frac{1.001}{uT}\right)^{m+1}\tilde{S}(T,T_0) - \phi(q)\frac{\log 2}{uX}\right]$$
$$\geq \frac{uX}{\phi(q)}\left[1 - 1.16\alpha_1 - \frac{\phi(q)}{X^2} - \frac{\phi(q)}{X} - \frac{2.22}{\alpha_3} - \phi(q)\frac{\log 2}{uX}\right]$$

Nous pouvons maintenant minorer le terme du début :

$$[\vartheta(Y) - \vartheta(Y^{'})][1 - w(f,a)] \geq \frac{uX}{\phi(q)}\left[1 - 1.16\alpha_1 - \frac{\phi(q)}{X^2} - \frac{\phi(q)}{X} - \frac{2.22}{\alpha_3} - \phi(q)\frac{\log 2}{uX}\right]$$
$$- \frac{(\log 2X)^2}{\log 2} - \frac{2.8236w(f,a)}{\alpha_4\phi(q)} - \frac{18.31 \times 5^{\omega(q)}\sqrt{X}}{\phi(q)} - 1.54X^{1/6}\log 2X.$$

Comme $Y^{\alpha_4} \leq uY$, $X \leq Y$et $X \geq 0.9Y$, nous en déduisons grâce aux hypothèses :

$$[\vartheta(Y,q,a) - \vartheta(Y^{'},q,a)][1 - w(f,a)] \geq Y^{\alpha_4 - 1}\left[\frac{0.09Y}{\phi(q)} - 2\right] - 1.54Y^{1/6}\log 2Y$$
$$- \frac{(\log 2Y)^2}{\log 2} - \log 2.$$

Le premier terme de cette somme est prépondérant car $\alpha_4 \geq 1/2$, donc pour un Y assez grand qui dépend de $q$ le minorant est positif. Le théorème est ainsi démontré. ■

Nous donnons à la section 7 une table de valeurs en fonction de $\phi(q)$ des rangs $Y_0(q)$ à partir desquels la fonction minorante est positive. Pour $\phi(q) \geq 34$, c'est à dire $q \geq 35$, des vérifications numériques nous assurent que $Y_0(q) = 100\,q^7$.

## 5. Sous l'hypothèse de Riemann généralisée

Nous supposons maintenant que $T_0 = \infty$. Notre objectif est de trouver un intervalle de la forme, $[Y; Y + f(Y)]$ pour $Y > 100q^7$ contenant un nombre premier égal à $\ell$ modulo $q$. Dans leur article, Ramaré et Saouter[5] obtiennent, sous l'hypothèse de Riemann, un intervalle contenant au moins un nombre premier de la forme $[Y; Y + C\sqrt{Y}\log Y]$. Comme nous utilisons des techniques semblables, l'intervalle que nous pouvons obtenir par notre méthode ne sera pas meilleur que $[Y; Y + C\sqrt{Y}\log Y]$, où $C$ est une constante assez grande et $Y$ un nombre réel assez grand. Nous allons montrer que nous pouvons obtenir un intervalle de cette forme mais où $C$ dépendra de $q$. Nous établissons d'abord la dépendance en $q$ de la constante $C$, et l'ordre de grandeur optimal que l'on peut espérer obtenir pour $C$. Pour cela nous travaillons asymptotiquement, et nous constatons que $T$ doit avoir une certaine forme. Dans ce qui suit, $c$ désigne une constante indépendante de $q$ et $C$ une constante dont on veut connaître la dépendance en $q$. La taille de notre intervalle doit être de la forme :

$$\frac{1 + 2(1-a)u - (1+2au)e^{-u}}{1 + 2(1-a)u}Y \approx cuY.$$

En travaillant avec T suffisamment grand, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{S}(T,T_0) &= \frac{1+10^{-3}}{\sqrt{Y}}\sum_{d|k}\sum_{\chi^* \quad mod \quad d}\left[\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{dT}{2\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)+\frac{2C_2\log(dT)}{T^3}+\frac{C_2+2C_3}{T^3}\right]\\ &\approx (\phi(q))\frac{c}{\sqrt{Y}}\log(qT).\end{aligned}$$

Donc nous avons :

$$\begin{aligned}u = \frac{1.001}{T}\left(\alpha_3\frac{\mu_m^*(f_m)}{m^m}TS^*(T)\right)^{1/m+1} &\approx cT^{1/m+1}S^*(T)^{1/m+1}\frac{1}{T}\\ &\approx cT^{1/m+1}\frac{1}{T}\frac{1}{Y^{1/2(m+1)}}(\log(qT))^{1/m+1}(\phi(q))^{1/m+1}.\end{aligned}$$

Or nous voulons :

$$u \approx C\frac{\log Y}{\sqrt{Y}}.$$

Ainsi $T$ doit être de la forme :

$$T \approx c\frac{\sqrt{Y}}{\log Y}f(q),$$

où $f(q)$ est une constante qui dépend de $q$. Comme $\tilde{N}(T) \approx (\phi(q))\Bigg(\frac{T}{\pi}\log(\frac{qT}{2\pi}) - \frac{T}{2\pi}+\mathcal{O}^*(C_2\log(qT)+C_3)\Bigg)$, asymptotiquement, l'hypothèse $\tilde{N}(T) \leq \alpha_1\sqrt{Y}$ nous donne :

$$\frac{(\phi(q))cf(q)}{2} \leq \alpha_1 \Rightarrow f(q) \leq \frac{c\alpha_1}{\phi(q)-1}$$

Nous pouvons alors obtenir une minoration de $C$ dans $u$ car :

$$C \approx \frac{f(q)^{1/m+1}}{f(q)}\phi(q)^{1/m+1} \approx \frac{\phi(q)^{1/m+1}}{f(q)^{m/m+1}} \Rightarrow C \approx\geq \frac{c(\phi(q)-1)}{\alpha_1^{m/m+1}} \approx\geq c\phi(q)$$

car $\alpha_1 \leq 2$, sinon $\alpha_3$ ne peut pas être positif, dans notre théorème principal. Cette inégalité nous montre d'une part, que C ne peut pas être une constante par rapport à $q$, et d'autre part qu'au mieux C est de l'ordre de grandeur de $\phi(q)$. Pour que $C$ soit de l'ordre de grandeur de $\phi(q)$, nous devons choisir $\alpha_1$ constante par rapport à $q$ et $f(q)$ de l'ordre de $\frac{1}{\phi(q)}$. Maintenant nous allons montrer le résultat sur la taille de l'intervalle. Nous avons besoin des deux résultats suivants :

**Lemme 10.** *Soit $q$ un entier naturel plus grand que 2, nous avons la minoration suivante :*

$$\frac{\phi(q)}{5^{\omega(q)}} \geq \frac{2}{25}.$$

**Preuve:** Nous allons procéder par récurrence sur $\omega(q)$. Pour $\omega(q) = 1$, pour $\omega(q) = 2$ et pour $\omega(q) = 3$,

$$\frac{\phi(q)}{2^{\omega(q)}} \geq \frac{\phi(2)\phi(3)\phi(5)}{5^3} \geq \frac{2}{25}.$$

Supposons pour $\omega(q) = n$, $n \geq 4$, la majoration est vraie. Pour $\omega(q) = n+1$, nous avons $p_{n+1} \geq 7$, d'où grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{\phi(q)}{5^{n+1}} \geq \frac{\phi(p_1)\phi(p_2)..\phi(p_n)\phi(p_{n+1})}{5^n \times 6} \geq \frac{2}{25}\frac{\phi(p_{n+1})}{5} \geq \frac{2}{25} \times \frac{6}{5} \geq \frac{2}{25}.$$

■

**Lemme 11.** *Pour $a \in [0, \frac{1}{2}]$, nous avons :*

$$1 - \frac{1+mua}{1+mu(1-a)}e^{-u} \leq u\big(1 + (1-2a)m\big).$$

**Preuve:**

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1+mua}{1+mu(1-a)}e^{-u} &= \frac{(1+mua)}{1+mu(1-a)}(1-e^{-u}) + mu\frac{1-2a}{1+mu(1-a)} \\ &\leq u + mu(1-2a) \end{aligned}$$

■

Maintenant, nous allons choisir une fonction admissible $f$ et des constantes $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_4$, $a$ et $m$ de facon spécifique. Nous prenons :

$$m = 2; \quad f(t) = (4t(1-t))^m; \quad a = \frac{2}{25}; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = 68.095289; \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

Nous en déduisons les formules :

$$w(f,a) = 2a^3(10 - 15a + 6a^2); \quad \mu^*(f_2) = \frac{40\sqrt{3}}{3}; \quad \alpha_3 = 1119210.338$$

Notre étude nous amène à poser :

$$T = \frac{\pi\sqrt{Y}}{\phi(q)\ln Y}.$$

Nous devons maintenant vérifier les hypothèses du théorème. Commençons par celle sur $\alpha_1$. Nous sommes dans le cas où $Y \geq 100q^7$ pour $q > 2$ et $Y \geq 4.8 \times 10^{12}$. Nous avons :

$$\tilde{N}(T) \leq \phi(q)\left[\frac{T}{\pi}\log\left(\frac{qT}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + (0.9185\log(qT) + 5.512)\right].$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{N}(T,T_0)}{\sqrt{Y}} &\leq \phi(q)\left[\frac{1}{\phi(q)\log Y}\left(\log\left(\frac{q\sqrt{Y}}{2\phi(q)\log Y}\right) - 1\right) + \frac{0.9185}{\sqrt{Y}}\log\left(\frac{q\pi\sqrt{Y}}{\phi(q)\ln Y}\right) + \frac{5.512}{\sqrt{Y}}\right] \\ &\leq \left[\frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{q\sqrt{Y}}{2\phi(q)\log Y}\right) - \frac{1}{\log Y} + \frac{0.9185}{Y^{5/14}}\log\left(\frac{Y^{1/7}\pi\sqrt{Y}}{\ln Y}\right) + \frac{5.512}{Y^{5/14}}\right] \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour vérifier celles sur $\alpha_2$ et $\alpha_4$, nous devons d'abord évaluer $u$ et $T\tilde{S}(T,T_0)$ :

$$.T\tilde{S}(T,T_0) \leq \phi(q)\frac{T}{\sqrt{Y}}1.001\left[\frac{1}{2\pi}\left(\log\left(\frac{qT}{2\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)+\frac{2C_2\log(qT)}{T^3}+\frac{C_2+2C_3}{T^3}\right]$$
$$\leq \frac{1.001}{\log Y}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{Y^{9/14}}{2\log Y}\right)+\frac{1}{4}+2C_2\log\left(\frac{\pi Y^{9/14}}{\ln Y}\right)\frac{(\log Y)^3}{\pi^2 Y^{15/14}}+12\frac{(\log Y)^3}{\pi^2 Y^{15/14}}\right]$$
$$\leq 0.25.$$

$$.T\tilde{S}(T,T_0) \geq (\phi(q)-1)\frac{1.001T}{\sqrt{Y}}\left(\frac{\log(2T/2\pi)+1/m}{m\pi}+\frac{2C_2\log(2T)}{T^{m+1}}+\frac{C_2+2C_3}{T^{m+1}}\right)$$
$$\geq 0.18.$$

$$.33.5\frac{\log Y}{\sqrt{Y}}\phi(q) \leq u = \frac{1.001}{T}\left(\alpha_3\frac{\mu_2^*(f)}{4}T\tilde{S}(T,T_0)\right)^{1/3} \leq 37.39\phi(q)\frac{\log Y}{\sqrt{Y}}.$$

Cette majoration établie, il est clair que l'hypothèse sur $\alpha_4$ est vérifiée. Des calculs rapides nous permettent de vérifier les autres hypothèses. Finalement nous arrivons au résultat suivant :

**Théorème 4.** *Pour $q > 2$, pour $\ell$ inversible modulo $q$, pour $Y \geq 4.8\times 10^{12}$ et $Y \geq 100q^7$, l'intervalle $[Y; Y+101\phi(q)\sqrt{Y}\log Y]$ contient au moins un nombre premier égal à $\ell$ modulo $q$.*

## 6. Étude des modules plus petits que 13.

Dans cette section, nous faisons faire une étude plus détaillée des modules plus petits que 13 ; ce sont des modules où l'hypothèse généralisée de Riemann est vérifiée pour la hauteur $T_0 = 10000$. Dans un premier temps, nous donnons une version plus précise du théorème principal pour ces différents modules. Ensuite, nous établissons le théorème que nous avons énoncé dans l'introduction. Nous commençons par donner une version plus précise du lemme 8 :

**Lemme 12.** *Soit $2 < q \leq 13$, $a$ inversible modulo $q$, $X \geq 3\times 10^{11}$ et $X \geq 100\times q^7$ nous avons :*

$$\psi(X,q,a)-\vartheta(X,q,a) \leq b_q(a)\frac{\sqrt{X}}{\phi(q)}+1.48X^{1/6}\log X$$

*où les valeurs de $b_q(a)$ sont données dans le tableau 2.*

**Preuve:** Nous détaillons le cas $q=3$. Commençons par le cas $a=2$. Les équations $p^2 \equiv 2[3]$, $p^4 \equiv 2[3]$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}_3$ et les équations $\mathbb{Z}_3$ en ont chacune une seule. Grâce à cela et au théorème 2, nous avons :

$$\psi(X,3,2)-\vartheta(X,3,2) = \sum_{2\leq\alpha\leq 6}\sum_{\substack{p^\alpha\leq X\\ p^\alpha\equiv a[q]}}\log p+\sum_{\substack{p^\alpha\leq X\\ p^\alpha\equiv a[q]\\ p^\alpha\geq 7}}\log p$$
$$\leq \frac{\log(X^{1/3})}{\log(X^{1/3})-\log 3}\sqrt{X}\times X^{-1/6}+\frac{\log(X^{1/5})}{\log(X^{1/5})-\log 5}\sqrt{X}\times X^{-3/10}+1.48X^{1/6}\log X$$
$$\leq \frac{0.0288}{2}\sqrt{X}+1.48X^{1/6}\log X.$$

Passons maintenant au cas $a=1$. Les équations $p^2 \equiv 1[3]$, $p^3 \equiv 1[3]$, $p^4 \equiv 1[3]$, $p^5 \equiv 1[3]$ ont chacune deux solutions dans $\mathbb{Z}_3$. Grâce au théorème 2, nous pouvons alors écrire :

$$\psi(X,3,1) - \vartheta(X,3,1) \leq \frac{4.2424}{2}\sqrt{X} + 1.48X^{1/6}\log X.$$

■

Nous sommes en mesure d'écrire un théorème 3 "bis" :

**Théorème 5.** *Soient $2 < q \leq 13$, $X \geq 10^{10}$ et $X \geq 100 \times q^7$. Soient $m \geq 2$ un entier naturel et $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \geq 1$, $\alpha_4 \in [\frac{1}{2};1]$, $a \in [0;\frac{1}{2}]$ quatre paramètres réels. Soit $f$ une fonction $m$ admissible que nous nous laissons le soin de choisir. Nous posons :*

$$Y = X(1+\delta(1-a))e^u; \quad \delta = mu; \quad u = \frac{1.001}{T}\left(\alpha_3 \frac{\mu_m^*(f_m)}{m^m} T\tilde{S}(T,T_0)\right)^{1/m+1}$$

$$\alpha_3^{-1} = \left(0.9 - 1.16\alpha_1 - \frac{2.8236w(f,a)}{\alpha_4} - \frac{b_q^{'}(c)}{\alpha_2}\right)/2.22$$

*et nous supposons que cette constante est positive. Les valeurs de $b_0^{'}(q)$ sont données dans le tableau 3. De plus nous travaillons avec $X \geq 100q^7$. Soit $T \geq 2$ un réel. Nous supposons de plus les relations suivantes vérifiées :*

$$\tilde{N}(T) \leq \alpha_1\sqrt{Y}; \quad mu \leq 0.1; \quad uY \geq 40; \quad \alpha_2 \leq u\sqrt{Y}; \quad Y^{\alpha_4} \leq uY; \quad T \leq T_0$$

*Alors :*

$$\left[\vartheta(Y,q,c) - \vartheta(Y\frac{1+mua}{1+mu(1-a)e^{-u}},q,c)\right][||f||_1 - w(f,a)] \geq (0.9Y)^{\alpha_4-1}\left[\frac{0.1Y}{\phi(q)} - 2\right]$$
$$-1.52Y^{1/6}\log 2Y - \frac{(\log 2Y)^2}{\log 2} - \log 2.$$

*qui est une borne strictement positive pour $Y$ assez grand.*

**Théorème 6.** *Pour $Y \geq 3 \times 10^{11}$, $q > 2$ et $c$ inversible modulo $q$, l'intervalle $[Y - \Delta^{-1}Y;Y]$ contient un nombre premier congru à $c$ modulo $q$. La valeur de $\Delta^{-1}$ dépend des paramètres $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_4$, $m$, $q$ et de $c$. Les valeurs de $\Delta^{-1}$ sont reportées dans le tableau 4.*

Nous avons choisi de prendre $T = T_0$ et $\alpha_1 = \tilde{N}(T)/\sqrt{Y}$. Dans la pratique, nous avons fait les calculs avec $\log Y = 29.94$. Les autres paramètres sont obtenus par un algorithme effectué sous Pari GP ; il ne nous donne pas ceux fournissant la valeur optimale de $\Delta^{-1}$ mais des paramètres renvoyant une valeur satisfaisante pour $\Delta^{-1}$. Un autre algorithme sous Pari GP nous permet d'obtenir le résultat donné dans l'introduction : le tableau 6 donne des valeurs plus précises des constantes $D$ suivant les progressions arithmétiques.

## 7. Tableaux

Nous regroupons dans cette section tous les tableaux dont nous avons parlé précédemment et un tableau des valeurs de $\Delta^{-1}$ pour $X \geq 10^{30}$ et $X \geq 10^{100}$. Nous donnons aussi les valeurs de $\Delta$ que nous aurions obtenus avec en utilisant directement les travaux de Rumely et Ramaré[4] ce que nous permettra de comparer les résultats.

## Références

[1] M. Bennett. Rational approximation to algebraic numbers of small height: the Diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *J. reine angew. Math.*, 535 :1–49, 2001.

[2] K.S. McCurley. Explicit zero-free regions for Dirichlet $l$-functions. *J. Number Theory*, 19 :7–32, 1984.

[3] H.L. Montgomery and R.C. Vaughan. The large sieve. *Mathematatika*, 20(2) :119–133, 1973.

[4] O. Ramaré and R. Rumely. Primes in arithmetic progressions. *Math. Comp.*, 65 :397–425, 1996.

[5] O. Ramaré and Y. Saouter. Short effective intervals containing primes. *J. Number Theory*, 98 :10–33, 2003.

[6] J.B. Rosser and L. Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev Functions $\vartheta(x)$ and $\psi(x)$. *Math. Comp.*, 29(129) :243–269, 1975.

| $\phi(q)$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_0(q)$ | $1.1 \cdot 10^9$ | $8.5 \cdot 10^9$ | $2.9 \cdot 10^{10}$ | $6.86 \cdot 10^{10}$ | $1.4 \cdot 10^{11}$ | $2.4 \cdot 10^{11}$ | $3.8 \cdot 10^{11}$ | $5.8 \cdot 10^{11}$ |
| $\phi(q)$ | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| $Y_0(q)$ | $8.2 \cdot 10^{11}$ | $1.13 \cdot 10^{12}$ | $1.6 \cdot 10^{12}$ | $2.05 \cdot 10^{12}$ | $2.53 \cdot 10^{12}$ | $3.2 \cdot 10^{12}$ | $3.91 \cdot 10^{12}$ | $4.8 \cdot 10^{12}$ |

TAB. 1. Valeurs de $Y_0(q)$.

| $q$ | $b_q(1)$ | $b_q(2)$ | $b_q(3)$ | $b_q(4)$ | $b_q(5)$ | $b_q(6)$ | $b_q(7)$ | $b_q(8)$ | $b_q(9)$ | $b_q(10)$ | $b_q(11)$ | $b_q(12)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4.24 | 0.029 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 4 | 4.25 | $\oslash$ | 0.029 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 5 | 4.26 | 0.029 | 0.029 | 4.25 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 6 | 4.25 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.058 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 7 | 4.31 | 4.23 | 0.001 | 4.23 | 0.001 | 0.084 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 8 | 8.48 | $\oslash$ | 0.023 | $\oslash$ | 0.023 | $\oslash$ | 0.023 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 9 | 4.31 | 0.001 | $\oslash$ | 4.23 | 0.001 | $\oslash$ | 4.31 | 0.08 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 10 | 2.15 | $\oslash$ | 0.023 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.023 | $\oslash$ | 4.25 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 11 | 4.26 | 0.028 | 4.25 | 4.25 | 4.25 | 0.028 | 0.028 | 0.028 | 4.25 | 0.33 | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 12 | 8.48 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.029 | $\oslash$ | 0.029 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.029 | $\oslash$ |
| 13 | 4.32 | 0.01 | 4.23 | 4.22 | 0.085 | 0.001 | 0.001 | 0.085 | 4.23 | 4.22 | 0.001 | 4.3 |

TAB. 2. Valeurs de $b_q$

| $q$ | $b_q^{'}(1)$ | $b_q^{'}(2)$ | $b_q^{'}(3)$ | $b_q^{'}(4)$ | $b_q^{'}(5)$ | $b_q^{'}(6)$ | $b_q^{'}(7)$ | $b_q^{'}(8)$ | $b_q^{'}(9)$ | $b_q^{'}(10)$ | $b'_q(11)$ | $b_q^{'}(12)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4.69 | 0.032 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 4 | 4.69 | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 5 | 4.7 | 0.032 | 0.032 | 0.032 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 6 | 4.7 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 7 | 4.75 | 4.66 | 0.001 | 4.66 | 0.001 | 0.093 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 8 | 9.356 | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 9 | 4.75 | 0.001 | $\oslash$ | 4.66 | 0.001 | $\oslash$ | 4.75 | 0.09 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 10 | 2.37 | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | 4.7 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 11 | 4.7 | 0.03 | 4.7 | 4.7 | 4.7 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 4.7 | 0.03 | $\oslash$ | $\oslash$ |
| 12 | 9.35 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ | $\oslash$ | $\oslash$ | 0.032 | $\oslash$ |
| 13 | 4.8 | 0.001 | 4.7 | 4.7 | 0.093 | 0.001 | 0.001 | 4.7 | 4.7 | 4.7 | 0.001 | 4.8 |

TAB. 3. Valeurs de $b_q^{'}$

| $q$ | $b_q^{'}$ | $c$ | $\alpha_2$ | $\alpha_4$ | $m$ | $a$ | $\Delta^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4.69 | 1 | 782.3 | 1/2 | 26 | 129/320 | 0.001393 |
| 3 | 0.029 | 2 | 773.4 | 1/2 | 26 | 129/320 | 0.001389 |
| 4 | 4.69 | 1 | 782.9 | 1/2 | 26 | 129/320 | 0.001393 |
| 4 | 0.032 | 3 | 766.8 | 1/2 | 26 | 13/32 | 0.001416 |
| 5 | 4.7 | 1 | 831.9 | 1/2 | 26 | 3/8 | 0.001431 |
| 5 | 0.032 | $2, 3, 4$ | 843.5 | 1/2 | 26 | 129/320 | 0.001427 |
| 6 | 4.7 | 1 | 773.1 | 11/20 | 26 | 13/32 | 0.001415 |
| 6 | 0.032 | 5 | 766.5 | 11/20 | 26 | 13/32 | 0.001415 |
| 7 | 4.75 | 1 | 775.2 | 1/2 | 26 | 2/5 | 0.001462 |
| 7 | 4.66 | 2 | 775.2 | 1/2 | 26 | 2/5 | 0.001462 |
| 7 | 0.001 | $3, 5$ | 769.9 | 11/20 | 26 | 129/320 | 0.001466 |
| 7 | 0.032 | 6 | 769.9 | 11/20 | 26 | 129/320 | 0.001466 |
| 8 | 9.356 | 1 | 757.1 | 11/20 | 26 | 129/320 | 0.001436 |
| 8 | 0.032 | $3, 5, 7$ | 851.8 | 1/2 | 26 | 129/320 | 0.001427 |
| 9 | 4.75 | 1 | 787.9 | 1/2 | 27 | 129/320 | 0.001458 |
| 9 | 0.001 | $2, 4$ | 740.4 | 11/20 | 28 | 13/32 | 0.001454 |
| 9 | 4.66 | 4 | 787.7 | 1/2 | 27 | 13/32 | 0.001457 |
| 10 | 2.37 | 1 | 887.6 | 1/2 | 26 | 129/320 | 0.001429 |
| 10 | 0.032 | $3, 7$ | 843.5 | 1/2 | 16 | 129/320 | 0.001427 |
| 10 | 4.7 | 9 | 758.4 | 1/2 | 27 | 129/320 | 0.001430 |
| 11 | 4.7 | $1, 3, 7$ | 790.8 | 1/2 | 28 | 129/320 | 0.001505 |
| 11 | 0.03 | $2, 6, 7, 8, 10$ | 781.9 | 1/2 | 28 | 129/320 | 0.001501 |
| 12 | 9.35 | 1 | 763 | 1/2 | 27 | 129/320 | 0.001433 |
| 12 | 0.032 | $5, 7, 11$ | 752.3 | 11/20 | 27 | 13/32 | 0.001433 |
| 13 | 4.8 | $1, 12$ | 757.7 | 11/20 | 28 | 129/320 | 0.001529 |
| 13 | 0.001 | $2, 6, 7, 11$ | 755.2 | 11/20 | 28 | 129/320 | 0.001524 |
| 13 | 4.7 | $3, 4, 8, 9, 10$ | 757.7 | 11/20 | 28 | 129/320 | 0.001529 |
| 13 | 0.093 | 5 | 755.3 | 11/20 | 28 | 131/320 | 0.001524 |

TAB. 4. Valeurs des paramètres et de $\Delta$ pour $Y \geq 10^{13}$

| $q$ | $\Delta^{-1} : 10^{30}$ | $\Delta^{-1} : 10^{100}$ |
|---|---|---|
| 3 | 0.001382 | 0.001382 |
| 4 | 0.001382 | 0.001382 |
| 5 | 0.001407 | 0.001407 |
| 6 | 0.001382 | 0.001382 |
| 7 | 0.001423 | 0.001421 |
| 8 | 0.001407 | 0.001407 |
| 9 | 0.001421 | 0.001421 |
| 10 | 0.001405 | 0.001405 |
| 11 | 0.001442 | 0.001442 |
| 12 | 0.001405 | 0.001405 |
| 13 | 0.001450 | 0.001450 |

TAB. 5. Valeurs de $\Delta^{-1}$ pour $Y \geq 10^{30}$ et $Y \geq 10^{100}$

| $a[q]$ | $D$ | $a[q]$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| 1[3] | 75511 | 2[3] | 68086 |
| 1[4] | 79133 | 3[4] | 88211 |
| 1[5] | 145361 | 2[5] | 250687 |
| 3[5] | 156253 | 4[5] | 167729 |
| 1[6] | 75511 | 5[6] | 68087 |
| 1[7] | 369979 | 2[7] | 257077 |
| 3[7] | 340693 | 4[7] | 251843 |
| 5[7] | 242639 | 6[7] | 240043 |
| 1[8] | 154681 | 3[8] | 148091 |
| 5[8] | 201389 | 7[8] | 183823 |
| 1[9] | 287731 | 2[9] | 373943 |
| 4[9] | 236209 | 5[9] | 237749 |
| 7[9] | 222073 | 8[9] | 252017 |
| 1[10] | 145361 | 3[10] | 156253 |
| 7[10] | 250687 | 9[10] | 167729 |
| 1[11] | 639167 | 2[11] | 427429 |
| 3[11] | 394507 | 4[11] | 581981 |
| 5[11] | 498613 | 6[11] | 394169 |
| 7[11] | 307171 | 8[11] | 414367 |
| 9[11] | 913889 | 10[11] | 380071 |
| 1[12] | 138157 | 5[12] | 194609 |
| 7[12] | 168943 | 11[12] | 158231 |
| 1[13] | 461891 | 2[13] | 591749 |
| 3[13] | 619583 | 4[13] | 590243 |
| 5[13] | 690721 | 6[13] | 540377 |
| 7[13] | 416501 | 8[13] | 524389 |
| 9[13] | 627961 | 10[13] | 485053 |
| 11[13] | 691637 | 12[13] | 849419 |

TAB. 6. Valeurs de $D$ pour $Y \geq 3 \cdot 10^{11}$