Moyenne de fonctions arithmétiques : l'approche analytique

—

Une introduction agrémentée d'exercices

—

Cours donnés à l'université de Nouakchott

—

Nouakchott

21 Octobre / 30 Octobre 2013

—

Olivier Ramaré

8 octobre 2013

Introduction

Ce cours portera surtout sur les valeurs moyennes de fonctions arithmétiques et se poursuivra par une introduction au crible de Montgomery et des applications.

Les fonctions arithmétiques sont très souvent mal connues, et possèdent un comportement qui semble irrégulier et sans cohérence. Regardons par exemple la fonction

$$f_0(n) = \prod_{p|n}(p-2). \tag{0.1}$$

Si la suite de ses valeurs semble très erratique, de la régularité apparaît lorsque l'on considère des sommes $\sum_{n\geq 1} f_0(n)F(n/X)$ pour des fonctions suffisamment régulières et petites au voisinage de l'infini F. Nous allons par exemple démontrer que

Théorème $\mathscr{A}$

Soit X un réel positif. Nous avons

$$\sum_{n\geq 1} f_0(n)e^{-n/X} = \mathscr{C}_0 X^2 + \mathcal{O}(X^{7/4})$$

où la constante $\mathscr{C}_0$ est donnée par

$$\mathscr{C}_0 = \prod_{p\geq 2}\left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right) = 0.29262\cdots$$

Remarquons que dans cet énoncé et de façon systématique dans la suite, la lettre p désigne un nombre premier.

Le fait de considérer simultanément de nombreuses valeurs de $f_0(n)$ a pour effet de dissimuler certaines valeurs aberrantes prises par la fonction considérée.

Nous considérons ensuite la fonction f_1 définie par :

$$f_1(n) = \prod_{p|n}\frac{p+1}{p+2}. \tag{0.2}$$

Nous montrerons que

Théorème $\mathscr{B}$

Soit X un réel positif. Nous avons

$$\sum_{n \le X} f_1(n)\Big(1 - \frac{n}{X}\Big) = \tfrac{1}{2}\mathscr{C}_1 X + \mathcal{O}(X^{1/4})$$

où la constante $\mathscr{C}_1$ est donnée par

$$\mathscr{C}_1 = \prod_{p \ge 2}\left(1 - \frac{1}{p(p+2)}\right) = 0.8166\cdots$$

Et nous montrerons finalement les deux résultats suivants.

Théorème $\mathscr{C}$

Soit X un réel positif. Nous avons

$$\sum_{n \le X} f_0(n) = \mathscr{C}_0 X^2 + \mathcal{O}(X^{11/8})$$

où la constante $\mathscr{C}_0$ est donnée ci-dessus.

Théorème $\mathscr{D}$

Soit X un réel positif. Nous avons

$$\sum_{n \le X} f_1(n) = \mathscr{C}_1 X + \mathcal{O}(X^{3/8})$$

où la constante $\mathscr{C}_1$ est donnée ci-dessus.

Le lecteur pourra consulter les livres (Apostol, 1976) ou (Ellison, 1975). Les livres (Bombieri, 1987/1974) et (Halberstam & Richert, 1974) sont deux autres références incontournables. D'autres très bons livres : (Vinogradov, 1954), (Davenport, 2000), (Montgomery & Vaughan, 2006) et (Bordellès, 2012).

Contenu

Nous présentons ci-après le déroulement prévu du cours. Il faut noter que le chapitre 4 est un supplément qui ne fera pas partie du cours. De même la section 8.3 ne fera probablement pas partie du cours.

Calendrier :

Lundi 21/10 – 9h30/13h30 Introduction, bestiaire, produit de convolution et multiplicativité.

(a) Introduction : régularité en moyenne. Fonctions multiplicatives. Bestiaire.
(b) Multiplicativité de la fonction de diviseurs. Convolution de fonctions multiplicatives.
(c) Multiplicativité du produit droit.
(d) Fonction ζ de Riemann, abscisse de convergence absolue, unicité des coefficients de Dirichlet.

Mardi 22/10 – 9h30/13h30 Séries de Dirichlet

(a) Abscisse de convergence absolue,
(b) Séries de Dirichlet et produit de convolution,
(c) La fonction zeta de Riemann.
(d) Série de Dirichlet et multiplicativité.

Mercredi 23/10 – 9h30/13h30 Problème de taille.

(a) Majoration à la Tchebychev,
(b) (Majoration de l') Ordre maximal de la fonction de diviseurs,
(c) Diverses applications.

Jeudi 24/10 – 10h00/12h00 Devoir surveillé sur les fonctions multiplicatives.

Jeudi 25/10 – 12h30/13h30 Questions et préparation des devoirs à la maison.

Vendredi 26/10 Jour férié.

Samedi 27/10 – 9h30/13h30 Transformées de Mellin

(a) Quelques transformées de Mellin,
(b) Quelques formules de sommation,
(c) Prolongement de la fonction zeta de Riemann au demi-plan $\Re s > 0$,
(d) Majorations de la fonction zeta de Riemann au demi-plan $\Re s > 0$.

Dimanche 28/10 – 9h30/13h30 Preuve du théorème $\mathscr{A}$. Exemples du chapitre 7.

Lundi 29/10 – 9h30/13h30 Preuve du théorème $\mathscr{B}$. Le symbole de Legendre et sa série de Dirichlet.

Mardi 30/10 – 9h30/13h30 Élimination du lissage et preuve du théorème $\mathscr{C}$.

Mercredi 31/10 – 10h00/12h00 Examen final

Mercredi 31/10 – 12h30/14h00 Questions sur les devoirs à maison.

Table des matières

Chapitre 1

Convolution arithmétique

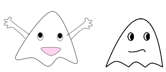
Il s'agit ici d'une présentation des acteurs.

1.1. Bestiaire

1. La fonction de Möbius $\mu(n)$ vaut -1 sur chaque nombre premier et 0 sur toutes leurs puissances [*]
2. $\varphi(n)$ est l'indicateur d'Euler, c'est à dire le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers à n.
3. $d(n)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n.
4. $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs (positifs) de n.
5. La fonction de Liouville $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ en est assez proche : en effet cette dernière est la fonction multiplicative qui vaut $(-1)^\alpha$ sur chaque p^α [†].
6. $d(n^2)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n^2. Il s'agit aussi d'une fonction multiplicative de n.
7. $\omega(n)$ est le nombre de diviseurs premiers de n et par exemple $\omega(12) = 2$ puisque 2 et 3 sont les deux seuls nombres premiers divisant 12. On dit aussi "sans multiplicité" car, en fait, 2^2 divise aussi 12. Le nombre de diviseurs avec multiplicité est $\Omega(n)$ qui vérifie $\Omega(12) = 3$. Ces deux fonctions sont *additives*, i.e. $\omega(nm) = \omega(n) + \omega(m)$ si $(n, m) = 1$ et de même pour Ω. Cette notion est bien sûr le pendant additif de la notion de fonction multiplicative introduite ci-après.
8. $\mu^2(n)$ vaut 1 si n est divisible par un carré > 1 et 0 sinon.
9. $\Lambda(n)$ est la fonction de van Mangoldt
10. $\delta_{n=1}$ ou δ_1 est la fonction qui vaut 1 en $n = 1$ et 0 ailleurs, alors que $\mathbb{1}$ est la fonction qui vaut uniformément 1 sur tous les entiers.

∗. Si cette fonction apparaît déjà chez Euler en 1748 et dans les « Disquisitiones arithmeticae » de Gauss, c'est le mathématicien August Ferdinand Möbius qui en commença l'étude systématique en 1832, avec la célèbre « formule d'inversion » dont nous laissons la découverte au lecteur !

†. Cette fonction porte le nom du mathématicien français Joseph Liouville, qui était un ami proche de Dirichlet. Je ne sais pas d'où vient cette dénomination.



11. $\pi(X)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à X, de sorte que $\pi(3) = 2$ par exemple.

Nous pouvons aussi considérer

1. la fonction φ_2 qui à chaque entier n associe le nombre d'entiers modulo n qui sont premiers à n et tels que $n + 2$ qui le sont aussi,
2. la fonction qui à chaque entier n associe le nombre de carrés modulo n.

1.2. Fonctions multiplicatives

Une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est dite *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{si } n \text{ et } m \text{ sont premiers entre eux.} \end{cases} \tag{1.1}$$

De façon équivalente, nous pouvons écrire

$$f\bigl(\prod_p p^{\alpha_p}\bigr) = \prod_p f\bigl(p^{\alpha_p}\bigr) \tag{1.2}$$

où le produit porte sur tous les nombres premiers et où les α_p sont des entiers positifs ou nuls, dont tous sauf un nombre fini sont nuls. Cette expression montre clairement que la fonction f est complètement déterminée par sa valeur sur les entiers qui sont des puissances de nombres premiers. Réciproquement la donnée de telles valeurs détermine bien une fonction multiplicative, tout simplement en la définissant à partir de l'égalité ci-dessus.

Voici un résultat essentiel de cette théorie.

Lemme 1.1 (Lemme de Gauss) *Soit p un nombre premier. Si p divise le produit des deux entiers x et y, alors p divise x ou y (et, éventuellement, divise les deux).*

(Un peu de théorie des anneaux : ceci est une conséquence du fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau *factoriel*). Ce lemme est attribué à Gauss en France, mais comme Jörn Steuding me l'a fait remarquer, il est attribué à Euclide en Allemagne ! Cette appelation est historiquement plus correcte : il s'agit bel et bien de la proposition 30 du livre VII des éléments d' Euclide, voir (Euclid, 300 BC).

Exercice 1. *Montrer que la fonction f_1 définie par $f_1(n) = \prod_{p|n}(p+1)/(p+2)$ est multiplicative.*

Voici un résultat immédiat mais qu'il faut souligner.

Scholie 1.2 *Pour montrer que deux fonctions multiplicatives g et h sont égales, il faut et il suffit de montrer qu'elles le sont sur les puissances de nombres premiers.*

Il faut peut être s'arrêter un peu sur le terme « Scholie ». Nous l'employons comme Nicolas Bourbaki pour parler d'un résultat annexe mais essentiel. Soit plus qu'un lemme mais pas vraiment un théorème, plutôt un commentaire éclairant.

EXERCICE 2. *Montrer que x, y et z sont trois entiers, et si x est premier à z, alors le pgcd de xy et z est égal au pgcd de y et de z, i.e.*

$$\mathrm{pgcd}(xy, z) = \mathrm{pgcd}(y, z).$$

INDICATION : *Utiliser les décompositions en facteurs premiers.*

EXERCICE 3. *Soit a et b deux entiers premiers entre eux.*

⋄ 1 ⋄ *Montrer que* $\mathrm{pgcd}(a+b, a-b)$ *vaut 1 ou 2. Donner des exemples de chacun des cas.*

⋄ 2 ⋄ *Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.*

Cette notion de multiplicativité va s'avérer fondamentale. Nous constaterons en particulier que beaucoup de fonctions arithmétiques a priori mystérieuses se comprennent beaucoup mieux lorsque l'on regarde leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers.

EXERCICE 4.
Soit f une fonction multiplicative et m et n deux entiers. Nous avons

$$f([m,n])f((m,n)) = f(m)f(n)$$

où $[m,n]$ et (m,n) désigne respectivement le ppcm et le pgcd des entiers m et n.

INDICATION : *Utiliser les décompositions en facteurs premiers.*

EXERCICE 5.

⋄ 1 ⋄ *Montrer que la fonction somme de diviseurs σ est multiplicative.*

⋄ 2 ⋄ *Soit p un nombre premier et $a \geq 1$ un entier. Montrer que*

$$\sigma(p^a) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}$$

où $\sigma(d)$ est la somme des diviseurs entiers positifs de d.

EXERCICE 6.

⋄ 1 ⋄ *Montrer que si n et m sont sans facteurs carrés et distincts, alors*

$$\frac{\varphi(m)}{m} \neq \frac{\varphi(n)}{n}.$$

◇ 2 ◇ *Montrer que la fonction $n \mapsto \sigma(n)/n$ vérifie la même propriété (i.e. que celle de $n \mapsto \varphi(n)/n$ exhibée à la question précédente).*

◇ 3 ◇ *Que pensez-vous de la fonction $n \mapsto \sigma(n)/\varphi(n)$ vis à vis de cette propriété ?*

◇ 4 ◇ *Que pensez-vous de la fonction $n \mapsto \prod_{p|n}(p+2)/(p+1)$ vis à vis de cette propriété ?*

1.3. La fonction nombre de diviseurs

Commençons par détailler ce pourquoi la fonction qui à n associe son nombre de diviseurs est multiplicative. Ceci repose en fait sur la structure de l'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des diviseurs de n. Tout d'abord

$$\mathcal{D}(p^\alpha) = \{1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1} bigr\}. \tag{1.3}$$

Ensuite, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, chaque diviseur du produit $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ est de la forme $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$ avec $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$ et $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$. Par ailleurs, chaque entier de cette forme est bien un diviseur de $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Ceci nous donne

$$\mathcal{D}\bigl(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\bigr) = \mathcal{D}\bigl(p_1^{\alpha_1}\bigr) \cdot \mathcal{D}\bigl(p_2^{\alpha_2}\bigr). \tag{1.4}$$

Nous montrons de la même façon que $\mathcal{D}(mn) = \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n)$ si m et n sont premiers entre eux. De façon explicite la fonction suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(mn) &\to \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n) \\ d &\mapsto \bigl((d,m),(d,n)\bigr). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Il s'agit là d'une forme de multiplicativité au niveau des ensembles, et que nous allons exploiter sous la forme suivante : pour toute fonction F, l'identité suivante a lieu dès que m et n sont deux entiers premiers entre eux

$$\sum_{d|mn} F(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} F(d_1d_2). \tag{1.6}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{D}(\ell)$ l'ensemble des diviseurs positifs de ℓ. Étant donné deux entiers premiers entre eux m et n, nous considérons

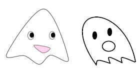
$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n) &\to \mathscr{D}(mn) \\ (u,v) &\mapsto uv \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} g : \mathscr{D}(mn) &\to \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n) \\ w &\mapsto (\mathrm{pgcd}(w,m), \mathrm{pgcd}(w,n)) \end{aligned}$$

Nous montrons que $g \circ f = \mathrm{Id}$. En effet $(g \circ f)(u,v) = (\mathrm{pgcd}(uv,m), \mathrm{pgcd}(uv,n))$. Comme v divise n et que n est premier à m, les entiers v et m sont premiers entre eux. L'exercice 2 nous donne alors $\mathrm{pgcd}(uv,m) = \mathrm{pgcd}(u,m) = u$ et de même $\mathrm{pgcd}(uv,n) = \mathrm{pgcd}(v,n) = v$. Ce qu'il fallait démontrer.

□

Exercice 9. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $d(n) \le 2\sqrt{n}$.*

Indication : *La meilleure constante est $\sqrt{3}$.*



Exercice 10. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, nous avons $d(n) \leq 4\, n^{1/3}$.*

Indication : *La meilleure constante est $18^{1/3}$.*

Exercice 11. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, nous avons $\varphi(n) \geq \sqrt{n/2}$.*

Exercice 12. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, nous avons $\varphi(n) \geq (9/2)^{1/3} n^{2/3}$.*

Exercice 13. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, nous avons $\sigma(n)\varphi(n) \leq n^2$.*

1.4. Convolution et fonctions multiplicatives

Nous définissons le produit de convolution arithmétique $f \star g$ par

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d) \tag{1.7}$$

où la somme porte sur les diviseurs d de n. En notant $\mathbb{1}$ la fonction qui vaut 1 sur tous les entiers, nous avons $d(n) = \mathbb{1} \star \mathbb{1}$. La lectrice vérifiera que ce produit est associatif et commutatif. La fonction $\delta_{n=1}$ en est l'élément neutre, puisque pour toute fonction arithmétique g, nous avons

$$(\delta_1 \star g)(n) = \sum_{\ell m = n} \delta_1(\ell) g(m) = g(n).$$

Ce produit est par ailleurs distributif vis-à-vis de l'addition de deux fonctions arithmétiques et ces deux lois permettent de munir l'ensemble de fonctions arithmétiques d'une structure d'algèbre commutative unitaire sur $\mathbb{C}$. Nous pourrions aussi enrichir cette structure en considérant tout d'abord le produit ponctuel

$$f \cdot g : n \mapsto f(n)g(n)$$

et ensuite la dérivation

$$\partial : (f(n))_{n\geq 1} \mapsto (f(n)\log n)_{n \geq 1}$$

qui est linéaire et vérifie de surcroît $\partial(f \star g) = (\partial f) \star g + f \star (\partial g)$ mais nous sortons ici de notre cadre. La lectrice trouvera une étude assez détaillée de cette structure dans le livre de Bateman & Diamond (Bateman & Diamond, 2004).

Exercice 14. *Montrer que, si $D(f, s)$ converge absolument, il en est de même de $D(\partial f, r)$ pour $r > s$. Que penser de la réciproque ? Peut-on affaiblir cette condition à $r \geq s$?*

Le théorème général suivant nous donne la multiplicativité de toute une kyrielle de fonctions :

Théorème 1.3 *Si f et g sont deux fonctions multiplicatives, il en est de même de $f \cdot g$ et de $f \star g$.*

Démonstration. Le cas de $f \cdot g$ est trivial à traiter et nous le laissons au lecteur studieux. Occupons-nous du produit de convolution. La valeur en 1 est aisée : $f \star g(1) = f(1)g(1) = 1$. Soit ensuite deux entiers m et n premiers entre eux. Nous avons

$$(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f(mn/d)g(d)$$

et appliquons (1.6) :

$$\begin{aligned}(f \star g)(mn) &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\Big(\frac{mn}{d_1 d_2}\Big) g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\Big(\frac{m}{d_1}\Big) f\Big(\frac{n}{d_2}\Big) g(d_1)g(d_2) = (f \star g)(m)(f \star g)(n)\end{aligned}$$

comme requis. □

Ceci nous donne d'un seul coup la multiplicativité de beaucoup de fonctions, en partant des exemples simples que sont les fonctions $\mathbb{1}$ et plus généralement $X^a : n \mapsto n^a$. En particulier, le lecteur vérifiera que

$$d(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1})(n), \quad \sigma(n) = (\mathbb{1} \star X)(n).$$

Cette convolution nous permet aussi d'exprimer simplement certaines relations, comme $\mu^2(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1}_{X^2})(n)$ où $\mathbb{1}_{X^2}$ est la fonction caractéristique des carrés.

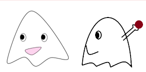
Exercice 15. *Montrer que* $d(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$.

Exercice 16. *Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont dans $\mathscr{F}$, rappelons que $f \star g$ est défini par*

$$f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Alors

1. *Montrer que $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$.*
2. *Montrer que $(\mathscr{F}, +, \star)$ est une algèbre commutative sur $\mathbb{C}$.*
3. *Déterminer une unité δ pour $\star$.*
4. *Montrer que $\mathbb{1}$ (la suite constante égale à 1) et μ sont inverses l'un de l'autre.*



Exercice 17.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que pour tout entier d sans facteurs carrés, le nombre de solutions en d_1 et d_2 de $[d_1, d_2] = d$ est $3^{\omega(d)}$.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Soit q un entier. Nous notons $f(q)$ le nombre de solutions en q_1 et q_2 de $[q_1, q_2] = q$. Montrer que f est multiplicative.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que $\mathbb{1} \star f(n)$ est le nombre de couples (q_1, q_2) tels que $[q_1, q_2]|n$.*

Exercice 18. *On rappelle que f est complètement multiplicative si et seulement si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tout couple d'entiers m et n.*

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Déterminer toutes les fonctions complètement multiplicatives f qui sont telles que $\mathbb{1} \star f$ est encore complètement multiplicatif.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Déterminer l'inverse de la fonction complètement multiplicative f.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que l'inverse de l'inverse de convolution de la fonction $\mathbb{1} \star f$ n'est en général pas $\mu \cdot (\mathbb{1} \star f)$, même si nous nous restreignons aux fonctions complètement multiplicatives f.*

Exercice 21. *Montrer que la fonction qui à l'entier $n > 1$ associe le double de la somme des entiers entre 1 et n qui lui sont premiers, et qui à 1 associe 1, est multiplicative.*

Indication : *On pourra calculer cette somme directement en utilisant le fait que la fonction caractéristique des entiers m premiers à n s'écrit aussi*

$$\sum_{\substack{d|n,\\ d|m}} \mu(d),$$

ce que l'on prendra soin de démontrer.

Exercice 22.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que la fonction f qui à l'entier n associe n admet la fonction g définie par*

$$g(d) = d\mu(d)$$

comme inverse de convolution.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Démontrer l'identité suivante*

$$\sigma(n)^2 = n \sum_{d|n} \sigma(d^2)/d.$$

Exercice 24. *Nous posons $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. Montrer que*

$$\sigma_k(n) \le n^k \zeta(k)$$

dès que $k > 1$.

Exercice 25. *Montrer que*

$$\sum_{m|n} d(m)^3 = \Big(\sum_{m|n} d(m)\Big)^2.$$

Exercice 26. *Montrer que*

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) k^{\omega(d)} = (k+1)^{\omega(d)}.$$

Exercice 27.

⋄ 1 ⋄ *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\frac{n^{n+1}}{\zeta(n+1)} \leq \varphi(n)\sigma(n^n) \leq n^{n+1}.$$

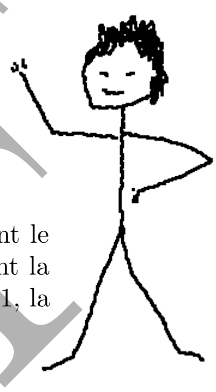
⋄ 2 ⋄ *Déterminer si la série*

$$\sum_{n\geq 1} \Big(\frac{n}{\varphi(n)} - \frac{\sigma(n^n)}{n^n}\Big)$$

est convergente ou non.

Chapitre 2

Initiation aux séries de Dirichlet



Nous utiliserons des séries de Dirichlet d'argument complexe. En notant le nombre complexe $s = \sigma + it$, où σ et t sont réels et appelés respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de s, nous avons, pour tout entier $n \geq 1$, la formule $n^s = n^\sigma(\cos(t\log n) + i\sin(t\log n))$. En particulier $|n^s| = n^\sigma$.

Nous nous bornerons de plus à rester dans des domaines de *convergence absolue*, ce qui nous suffira ici. Pour une étude plus complète, voir (Tenenbaum, 1995), (Queffélec & Queffélec, 2013) ou (Ellison, 1975).

2.1. Abscisse de convergence absolue

Lorsque nous disposons d'une fonction arithmétique, disons f, nous pouvons former sa *série de Dirichlet* qui est, pour tout argument complexe s :

$$D(f,s) = \sum_{n\geq 1} f(n)/n^s. \tag{2.1}$$

Il s'agit d'une série génératrice adaptée à la structure multiplicative. Cette définition est a priori formelle, puisqu'il n'est pas toujours vrai qu'il existe au moins un s pour lequel cette série converge (il n'en existe d'ailleurs pas quand $f(n) = e^n$).

Ces séries ont été nommées « séries de Dirichlet »en l'honneur du mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet qui les utilisa en 1837 / 1839 pour démontrer le théorème des nombres premiers en progression arithmétique (lire (Dirichlet, 1837) et aussi (Lejeune-Dirichlet, 1871)). Notons ici que Dirichlet ne considérait que les séries d'argument réel, et qu'il reviendra à Bernhard Riemann de considérer ce qui se passe dans le plan complexe, et qui contient des informations essentielles.

Lemme 2.1 *Soit f une fonction arithmétique telle que sa série de Dirichlet converge absolument pour un certain nombre complexe s. Alors, pour tout nombre réel $r > \Re s$, la série $D(f, r)$ converge absolument, et donc, pour tout nombre complexe s' tel que $\Re s' > \Re s$, la série $D(f, s')$ converge absolument.*

Démonstration. Nous avons

$$D(f,r) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \frac{n^s}{n^r}.$$

Or $r > s$ donc $n^s/n^r < 1$, d'où $D(|f|, r) < D(|f|, s)$, i.e. la série de Dirichlet de f converge pour tout $r > s$. □

Cette propriété nous donne accès à la notion d'abscisse de convergence.

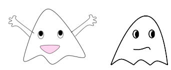
Définition 2.2 *On appelle* abscisse de convergence *de la fonction f, le plus petit réel s tel que la série de Dirichlet $D(f, s)$ converge. Si $D(f, s)$ converge pour tout s, on dit alors que l'abscisse de convergence est $-\infty$.*

Notons qu'il n'est pas acquis que la série en question converge en son abscisse de convergence. D'après un théorème de Landau, voir (Dress, 1983/84), cette situation n'arrive même jamais dès que cette abscisse est finie et que que f est positive ou nulle. Notons ici que l'abscisse de convergence peut valoir $-\infty$ et la fonction f être positive ou nulle, sans que cela n'implique que f soit à support borné, i.e. qu'elle s'annule partout sauf sur un nombre fini de valeurs. Le cas $f(n) = e^{-n}$ fournit un contre-exemple.

Nous pouvons associer à chaque fonction arithmétique f une série de Dirichlet, et cette série convergera au moins en un point si la fonction f croît *raisonnablement*. Une telle série de Dirichlet définit en fait parfaitement la fonction dont elle est issue comme le montre la propriété suivante. Nous ne l'utiliserons pas dans la suite.

Lemme 2.3 *Soit f et g deux fonctions arithmétiques telles que leurs séries de Dirichlet respectives convergent absolument pour un certain s. Supposons en outre que $D(f, r) = D(g, r)$ pour tout $r > s$. Alors $f = g$.*

Démonstration. En posant $h_1 = f - g$, nous avons $D(h_1, r) = 0$ pour tout $r > s$. Comme cette série converge en $r = s + 1$, nous en déduisons que $h_2(n) = h_1(n)/n^{r+1}$ est bornée en valeur absolue et vérifie $D(h_2, r) = 0$ pour tout $r > -1$ et il nous faut établir que $h_2 = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas, et nommons n_0 le plus petit entier n tel que $h_2(n) \neq 0$. Une comparaison à une



intégrale nous donne directement, pour $r > 1$:

$$\begin{aligned}|n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0)| &\leq \max_n |h_2(n)| \sum_{n \geq n_0+1} \frac{n_0^r}{n_r} \\ &\leq \max_n |h_2(n)| n_0^r \int_{n_0}^{\infty} \frac{dt}{t^r} \leq n_0 \max_n |h_2(n)|/(r-1),\end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Mais $D(h_2, r) = 0$, ce qui nous garantit que $h_2(n_0) = 0$ contrairement à notre hypothèse. Le lecteur pourra modifier cette démonstration de deux façons : tout d'abord remplacer le recours à un raisonnement par l'absurde par une démonstration par récurrence. Ensuite, une petite modification donne $n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0) = \mathcal{O}((1 + n_0^{-1})^{-r})$ alors que la preuve ci-dessus ne donne que $\mathcal{O}(1/r)$. □

Exercice 28. *Supposons que la série de Dirichlet $D(f, s_0)$ converge* simplement *en un nombre complexe s_0. Soit alors s un autre nombre complexe tel que $\Re s > \Re s_0$. Montrer que la série $D(f, s)$ converge aussi (*simplement*).*

Exercice 29. *Supposons que la série de Dirichlet $D(f, s_0)$ converge* simplement *en un nombre complexe s_0. Montrer que la série de Dirichlet $D(f, s)$ converge absolument en tout nombre complexe s tel que $\Re s > \Re s_0 + 1$.*

2.2. Séries de Dirichlet et produit de convolution

Les deux lois internes sur les fonctions arithmétiques se traduisent agréablement en termes de séries de Dirichlet :

– Concernant l'addition $(+)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, nous avons

$$D(f + g; s) = D(f; s) + D(g; s).$$

– Concernant la multiplication $(\star)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, alors celle de $f \star g$ est également absolument convergente, et nous avons

$$D(f \star g; s) = D(f; s)D(g; s).$$

Cette dernière égalité est facile à vérifier de ce que les séries convergent absolument, ce qui nous permet d'en déplacer les termes comme bon nous semble. Elle montre en particulier que l'opérateur qui, à une fonction arithmétique, lui associe sa série de Dirichlet trivialise le produit de convolution arithmétique, de la même façon que la transformée de Fourier trivialise le produit de convolution des fonctions de la droite réelle.

Il est clair que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet de $f \star g$ est majorée par le maximum des abscisses de convergence absolue des séries de Dirichlet associées à de f et g. Cette majoration est souvent une égalité *lorsque* ces deux abscisses ne sont pas égales ... et qu'aucun des facteurs n'est nul !

Exercice 30. *Montrer que*

1. $D(\varphi, s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$,
2. $D(\lambda, s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$,
3. $D(\mu^2, s) = \zeta(s)/\zeta(2s)$.

Exercice 31. *Montrer que la série de Dirichlet associée à la fonction de Moebius μ est $1/\zeta(s)$ et en déduire un exemple montrant que l'abscisse de convergence absolue d'un produit peut être strictement inférieure à la plus grande des deux abscisses des deux facteurs (considérer $\mathbb{1} \star \mu$).*

Exercice 32. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à n associe $2^{\omega(n)}$ en fonction de la fonction ζ de Riemann. Ici $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés sans multiplicité.*

Exercice 33. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à n associe $2^{\omega(n)}\lambda(n)$ en fonction de la fonction ζ de Riemann. Ici, λ est la fonction de Liouville définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ où $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité.*

Exercice 34. *Dans cet exercice, nous posons $\kappa(n) = \nu_1\nu_2\cdots\nu_k$, où Montrer que*

◇ 1 ◇ $\sum_{n\geq 1} \kappa(n)/n^s = \zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)/\zeta(6s)$,

◇ 2 ◇ $\sum_{n\geq 1} 3^{\omega(n)}\kappa(n)/n^s = \zeta^3(s)/\zeta(3s)$.

Indication : *Toutes ces fonctions étant multiplicatives (à montrer), il suffit de calculer chaque facteur eulérien.*

2.3. La fonction ζ de Riemann

La fonction ζ est très importante en arithmétique puisqu'elle intervient dans la formule d'Euler, elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi la série de Dirichlet la plus simple puisqu'elle est associée à la fonction constante 1 (fonction que nous avons notée $\mathbb{1}$ dans notre bestiaire). Elle est définie pour $s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}.$$

Si il s'agit de la série de Dirichlet la plus simple et la plus célèbre, cependant elle reste assez mal connue. Elle porte le nom du mathématicien allemand Georg Friedrich Bernhard Riemann, en honneur à son fameux mémoire (Riemann, 1859) de quelques pages et qui allait révolutionner la théorie, et poser les fondations de la théorie moderne.

Pour une étude approfondie de cette fonction, le lecteur pourra se référer à (Tenenbaum, 1995) et (Ellison, 1975).

Exercice 35. *Montrer que la série qui définit $\zeta(s)$ est absolument convergente pour $\Re s > 1$.*

Indication : *On pourra utiliser une comparaison à une intégrale.*

Exercice 36. *Montrer que l'on a*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}}$$

et en déduire un équivalent de $\zeta(1+u)$ lorsque u tend vers 0.

Indication : *On pourra écrire, pour $n \geq 1$,*

$$\frac{1}{n^s} = s\int_n^\infty \frac{dt}{t^{s+1}}$$

(technique dite de sommation par parties).

Exercice 37.

◇ 1 ◇ *Nous posons $L(s) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n n^{-s}$. Montrer que $L(s)$ est convergente pour $\Re s > 0$, puis que $L(1) < 0$ et enfin que $L'(1) < 0$.*

◇ 2 ◇ *Montrer que $-\zeta'(s)/\zeta(s) < 1/(s-1)$ lorsque s est réel et > 1.*

Indication : *On pourra utiliser $\zeta(s) = L(s)/(2^{1-s}-1)$, que l'on démontrera.*

Exercice 38. *Montrer que, pour $\sigma > 1$, nous avons $1/(\sigma-1) < \zeta(\sigma) < \sigma/(\sigma-1)$.*

Exercice 39. *Montrer que, pour $\sigma > 1$, nous avons $\zeta(\sigma) = (\sigma-1)^{-1} + \gamma + \mathcal{O}(\sigma-1)$.*

2.4. Séries de Dirichlet et multiplicativité

Théorème 2.4 *Supposons que la série de Dirichlet de la fonction multiplicative f converge absolument pour un certain s. Alors, $D(f,s)$ est développable en produit eulérien :*

$$D(f,s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Le reste de cette section est dédiée à établir cette propriété, mais il est préférable de commencer par quelques commentaires.

Convergence et produit convergent

Nous ouvrons ici une parenthèse sur la signification de (2.9). La suite $1/2$, $(1/2)\times(1/2)$, $(1/2)\times(1/2)\times(1/2)$, et de terme général $(1/2)^n$, est convergente, et de limite 0. Ici, rien de neuf. Toutefois, par une maladresse terminologique, on dit qu'un produit (formel) infini

$$\prod_{n\geq 1} a_n$$

est convergent si et seulement

1. La suite des produits partiels converge vers une limite, disons P ;
2. $P \neq 0$.

L'equation (2.9) donne donc une écriture sous forme de produit, c'est à dire comme la limite d'une suite de produits partiels qui converge vers une limite, mais il faut en général vérifier la condition 2 ci-dessus. Parfois on dit que le produit *converge strictement* lorsque cette condition est vérifiée.

Convergence et produit convergent : le point de vue de Godement

Hervé Queffelec propose d'adopter le point de vue suivant, qui est efficace et limpide. Godement dit que le produit $\prod_{n\geq 1} a_n$ est absolument convergent en tant que produit si $\sum_{n\geq 1} |a_n - 1| = M < \infty$. Ceci à cause du théorème suivant :

Théorème 2.5 *Supposons que* $\sum_{n\geq 1} |u_n| = M < \infty$. *Alors*

1. $P_n = \prod_{1\leq j\leq n}(1+u_j) \to P \in \mathbb{C}$.
2. *Si* $1+u_j \neq 0$ *pour tout* j *alors* $P \neq 0$.

Démonstration. Nous avons $P_n - P_{n-1} = u_n P_{n-1}$ et donc

$$|P_n - P_{n-1}| \leq |u_n||P_{n-1}| \leq |u_n| \prod_{1\leq j\leq n-1} e^{|u_j|} \leq |u_n| e^M.$$

Il en résulte que la série $\sum_n (P_n - P_{n-1})$ est absolument convergente, et donc la suite P_n converge, disons vers $P \in \mathbb{C}$.

Pour montrer que $P \neq 0$, on exhibe Q tel que $PQ = 1$. Quoi de plus naturel que de chercher Q sous la forme d'un autre produit infini $Q = \prod_{j\geq 1}(1+v_j)$, avec $\sum_{j\geq 1} |v_j| < \infty$? L'idéal serait d'ajuster v_j pour avoir $(1+u_j)(1+v_j) = 1$ pour tout j. Or c'est possible car $1+u_j \neq 0$. Et ça donne

$$v_j = \frac{1}{1+u_j} - 1 = \frac{-u_j}{1+u_j}, \quad \text{d'où } |v_j| \sim |u_j|$$

et tout est dit. $\square$

Les logarithmes sont cachés dans les majorations $1+x \leq e^x$ et $P_{n-1} \leq e^M$. Mais leur présence reste discrète.

Nouvel énoncé et preuve

Théorème 2.6 *Supposons que la série de Dirichlet de la fonction multiplicative f converge absolument pour un certain s. Alors, $D(f,s)$ est développable en produit eulérien :*

$$D(f,s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}$$

où le produit est absolument convergent au sens de Godement.

Démonstration. Nous constatons que le produit en question s'écrit $\prod_p(1+u_p)$ avec

$$u_p = \sum_{k\geq 1}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}. \tag{2.2}$$

Or

$$\sum_p |u_p| \leq \sum_p\sum_{k\geq 1}\frac{|f(p^k)|}{|p^{ks}|} \leq \sum_{n\geq 1}|f(n)|/|n^s|$$

et le théorème 2.5 s'applique. □

Il s'agit véritablement de la bonne notion qui accompagne la notion de série absolument convergente. Notons que le produit peut être convergent et nul, mais alors l'un des facteurs est nul. Voici un exemple. Nous définissons la fonction multiplicative f_4 par

$$f_4(2) = 1, f_4(4) = -6,\ \forall k\geq 3,\ f_4(2^k) = 0,$$
$$\forall p\geq 3, \forall k\geq 1,\ f_4(p^k) = 1.$$

En conséquence $\sum_{n\geq 1} f_4(n)/n^s$ est absolument convergent pour $\Re s > 1$ et l'on a

$$\sum_{n\geq 1} f_4(n)/n^s = \Bigl(1+\frac{2}{2^s}-\frac{6}{2^{2s}}\Bigr)\prod_{p\geq 3}\Bigl(1-\frac{1}{p^s}\Bigr)^{-1}.$$

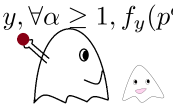
qui s'annule effectivement pour $s=2$.

2.5. Une variation populaire

Nous nous donnons ici une fonction arithmétique multiplicative f que nous supposons bornée en valeur absolue par 1. Nous pouvons dans tous les cas pratiques nous ramener à ce cas, quitte à considérer une fonction auxiliaire de la forme $f(n)/n^a$ qui est, elle aussi, multiplicative (dès lors que f l'est).

Soit $y\geq 1$ un paramètre réel. Nous considérons la fonction multiplicative f_y définie par

$$\begin{cases}\forall p\leq y, \forall\alpha\geq 1, f_y(p^a) = f(p^a),\\[2ex] \forall p > y, \forall\alpha\geq 1, f_y(p^a) = 0,\end{cases} \tag{2.3}$$



(p est ici un nombre premier) et, de façon symétrique,

$$\begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = 0, \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = f(p^a). \end{cases} \tag{2.4}$$

Notons que nous avons l'équation

Lemme 2.7

$$f = f_y \star f^y \tag{2.5}$$

Démonstration. En effet, les sommants de la somme

$$\sum_{d_1 d_2 = n} f_y(d_1) f^y(d_2)$$

sont presque tous nuls puisque l'entier n admet une unique écriture sous la forme $n = \ell m$ où tous les facteurs premiers de ℓ sont inférieurs y et tous ceux de m sont strictement supérieurs à y. La somme ci-dessus se réduit donc à $f_y(\ell) f^y(m)$ qui vaut bien $f(n)$. □

Nous posons alors

$$D_y^\flat(f,s) = D(f_y, s), \quad D_y^\sharp(f,s) = D(f^y, s) \tag{2.6}$$

de telle sorte que $D(f,y) = D_y^\flat(f,s) D_y^\sharp(f,s)$. La série de Dirichlet $D_y^\flat(f,s)$ se réduit à un produit, pour $\Re s > 1$:

$$D_y^\flat(f,s) = \prod_{p \leq y} \Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\Big). \tag{2.7}$$

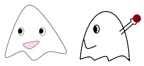
La série $D_y^\sharp(f,s)$ tend à devenir petite lorsque y tend vers l'infini. En effet, avec $\sigma = \Re s$,

$$|D_y^\sharp(f,s) - 1| \leq \sum_{n > y} 1/n^\sigma \leq y^{-\sigma} + \int_y^\infty dt/t^\sigma \leq \frac{\sigma}{(\sigma - 1) y^{\sigma - 1}}. \tag{2.8}$$

En laissant y tendre vers l'infini, nous obtenons donc l'expression de $D(f,s)$ sous forme d'un produit dit *eulérien*

$$D(f,s) = \prod_{p \geq 2} \Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\Big), \quad (\Re s > 1), \tag{2.9}$$

où chaque facteur est dit le facteur *local*, ou *eulérien*, en p.



Un détour historique

La décomposition (2.5) a été beaucoup exploitée, notamment par (Daboussi, 1989) (voir aussi (Daboussi, 1996) et (Daboussi & Rivat, 2001)) et permet dans l'article cité de donner une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. Cette décomposition est au cœur du travail récent (Granville & Soundararajan, 2001) où les auteurs développent la philosophie suivante : le comportement de la fonction f_y est très bien décrit par son produit eulérien alors que le comportement de f^y est lui décrit par des équations fonctionnelles (ce que nous ne décrivons pas ici). Essayer de réduire la compréhension d'une fonction multiplicative f à la composante f_y est l'essence des méthode dites probabilistes, notoirement développées par Kubilius.

Exercice 40. *Soit a un réel ≥ 0. Nous posons $\lambda_a(n) = \sum_{d|n} d^a \lambda(d)$ où $\lambda(d)$ est la fonction de Liouville. Montrer que*

$$\sum_{n\ge1} \frac{\lambda_a(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s-2a)}{\zeta(s-a)} \quad \text{et} \quad \sum_{n\ge1} \frac{\lambda(n)\lambda_a(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)\zeta(s-a)}{\zeta(s)}$$

pour $\Re s > 1 + a$.

Exercice 41. *Montrer que l'on a, pour $\Re s > 1$,*

$$\zeta(s) = \prod_{p\ge2} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

où le produit est absolument convergent au sens de Godement.

2.6. Quelques digressions sans preuve

Les séries des Dirichlet ont été introduites dans (Dirichlet, 1837) par P.G. Lejeune-Dirichlet en 1937 pour montrer de l'existence d'une infinité de nombres premiers dans les progressions arithmétiques (de type $a + nq$ avec a et q premiers entre eux). Dedekind, d'abord un élève puis un ami de Dirichlet, a établi plusieurs propriétés de ces séries enrichissant ainsi le livre (Lejeune-Dirichlet, 1871). L'étape de structuration suivante est due à un mémoire de Cahen (Cahen, 1894), qui est notamment célèbre pour ... l'inexactitude de ses preuves ! L'élaboration de la théorie est allée bon train à cette période, et en 1915 parut la splendide petite monographie (Hardy & Riesz, 1964) de Hardy & Riesz qui reste à ce jour l'ouvrage de base sur la question. La lectrice pourra retrouver dans (Tenenbaum, 1995) une partie de ce matériel.

Nous nous intéressons ici à deux points :

1. Dans quelle mesure l'ordre moyen et l'abscisse de convergence sont-ils liés ?
2. L'écriture $D(f, s) = D(h, s)D(g, s)$ nous permet-elle de conclure que l'abscisse de convergence absolue de $D(f, s)$ est le maximum de celle de $D(h, s)$ et de celle de $D(g, s)$?

En ce qui concerne le premier point, l'identité simple (2.10) ci-dessous montre que la connaissance de l'ordre moyen de la fonction f permet d'en déduire l'abscisse de convergence de $D(f,s)$. La réciproque est fausse, tout simplement parce qu'il est tout à fait possible que f n'admette pas d'ordre moyen. Ces deux notions sont tout de même liées par le théorème suivant (dû à Cahen (Cahen, 1894)) :

Théorème 2.8 *Si l'abscisse de convergence absolue σ_0 de $D(f,s)$ est strictement positive, elle est donnée par*

$$\sigma_0 = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sum_{1\le n\le N} |f(n)|}{\log N}.$$

Il existe un théorème analogue pour déterminer l'abscisse de convergence (mais nous n'avons pas établi son existence !), et il est aussi possible de traiter le cas où σ_0 est négative ou nulle (mais la formule est différente). La lectrice remarquera que cette formule est l'exact pendant de la formule de Hadamard donnant le rayon de convergence d'une série entière, moyennant de rappeler l'identité suivante valable lorsque $\Re s > -1$:

$$D(|f|,s) = s\int_1^\infty \Big(\sum_{n\le t} |f(n)|\Big) dt/t^{s+1}. \tag{2.10}$$

Démonstration. Voici formellement la preuve de cette identité. Il vient

$$s\int_1^\infty \Big(\sum_{n\le t} |f(n)|\Big) dt/t^{s+1} = \sum_{n\ge 1} |f(n)|\, s\int_n^\infty dt/t^{s+1} = \sum_{n\ge 1} |f(n)|/n^s.$$

□

Tournons-nous à présent vers la seconde question. Nous supposons ici que nous disposons d'une décomposition de la forme $D(f,s) = D(h,s)D(g,s)$, où nous connaissons l'abscisse de convergence absolue, disons σ_0, de $D(g,s)$ et où celle de $D(h,s)$ est strictement plus petite. Pouvons-nous en conclure que σ_0 est encore l'abscisse de convergence absolue σ_0' de $D(f,s)$? Il est clair que $\sigma_0' \le \sigma_0$, mais peut-elle être plus petite ? C'est évidemment le cas si $h = 0$, amis qu'en est-il si $h \neq 0$? Les auteurs de cet article ne savent pas répondre à cette question générale, mais il est loisible dans notre cas d'application d'ajouter une hypothèse : nous supposons que, pour tout $\delta > 0$, le module de $D(h,s)$ est minoré lorsque s décrit le demi-plan complexe $\Re s \ge \sigma_0 + \delta$. Cette hypothèse ne nous coûte rien en pratique puisque nous obtenons $D(h,s)$ sous la forme d'un produit eulérien, qui en tant que produit convergent, n'est ni infini, ni nul. Mais il nous faut maintenant considérer les s du domaine complexe, ce que nous avions réussi à éviter jusqu'à présent ! Voici le théorème (Hewitt & Williamson, 1957) de Hewitt & Williamson qui nous intéresse :

Théorème 2.9 *Soit $D(h,s)$ une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re s \geq \sigma$ et minorée en module par une constante > 0, alors $1/D(h,s)$ est encore une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re s \geq \sigma$.*

Ce résultat nous permet d'écrire $D(g,s) = D(h,s)^{-1}D(f,s)$ et d'en conclure que $\sigma_0' \geq \sigma_0$, ce qui nous donne bien $\sigma_0 = \sigma_0'$.

De nombreux travaux comparent les abscisses de convergence simple, absolue ou uniforme des trois constituants de l'égalité $D(f,s) = D(h,s)D(g,s)$; la lectrice en trouvera un exposé ainsi que leurs extensions au cas de plusieurs facteurs et les dernières améliorations (optimales) dans (Kahane & Queffélec, 1997).

Exercice 42. *Montrer que $\mathbb{1} \star \lambda$ est la fonction caractéristique des carrés et en déduire la série de Dirichlet de λ. Ici, λ est la fonction de Liouville, définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ où $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité.*

Exercice 43. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à n associe $\varphi(n)$ en fonction de la fonction ζ de Riemann.*

Exercice 44.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Déterminer la série de Dirichlet de $d(n^2)$.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Déterminer la série de Dirichlet de $d(n)^2$.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *En utilisant les deux questions précédentes, montrer que*

$$d(n)^2 = \sum_{m|n} d(m^2).$$

Terminons ce chapitre avec le célèbre théorème de Bohr qui montre bien le caractère arithmétique des séries de Dirichlet, voir (Queffélec & Queffélec, 2013, Théorème 4.4.1).

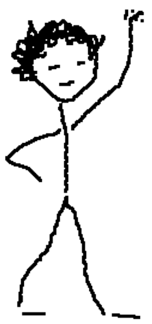
Théorème 2.10 *Soit $D(f,s) = \sum_{n\geq 1} f(n)/n^s$ une série de Dirichlet qui converge uniformément sur la droite $\Re s = 0$. Alors elle y est bornée, disons par une constante A et l'on a*

$$\sum_{p\geq 2} |f(p)| \leq A$$

où la somme porte sur tous les nombres premiers.

Chapitre 3

Un théorème de Tchebyshev



Nous allons évidemment avoir besoin de quantifier le nombre de nombres premiers dans un intervalle. De telles estimations existent depuis longtemps, et le travail consistant à les rendre explicite numériquement a débuté dans les années quarante. Nous disposons maintenant de bonnes estimations pour les quantités simples. Nous proposons ici une estimation simple et dnas le chapitre suivant des estimations plus poussées.

Théorème 3.1 *Pour X réel ≥ 1, nous avons* $\sum_{p \leq X} 1 \leq 9X/\log X$.

Une telle majoration est en fait due au mathématicien russe Pafnouti Tchebychef vers 1842.

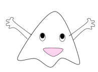
La méthode que nous employons a été mise en place par le mathématicien "itinérant", nom donné au mathématicien hongrois Pàl Erdös. Cette preuve date de 1939 ; c'est grâce à elle qu'il fut remarqué et invité à Berlin pour poursuivre ses études. La remarque essentielle est le lemme suivant.

Lemme 3.2 *Pour tout entier $m \geq 1$, le produit* $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$ *divise le coefficient binomial* $\binom{2m+1}{m}$.

Démonstration. En effet, chaque nombre premier p de l'intervalle $]m+1, 2m+1]$ divise le numérateur de

$$\binom{2m+1}{m+1} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

alors que le dénominateur $m!(m+1)!$ est un produit de nombres qui sont tous premiers à p. Il n'y a donc pas de simplification à ce niveau entre le numérateur et le dénominateur. $\square$

Voici un petit lemme technique intermédiaire.

Lemme 3.3 *Pour tout entier* $m \geq 1$*, nous avons* $\binom{2m+1}{m+1} \leq 4^m$.

Démonstration. En effet, le développement du binôme nous donne

$$\begin{aligned}(1+1)^{2m+1} &= \binom{2m+1}{0} + \binom{2m+1}{1} + \cdots + \binom{2m+1}{2m} + \binom{2m+1}{2m} \\ &\geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2\binom{2m+1}{m+1}\end{aligned}$$

et le lemme s'ensuit. □

Exercice 47. *Montrer que, pour tout réel* $X \geq 1$*, le produit* $\prod_{X/2<p\leq X} p$ *est inférieur à* $(7/3)^X$.

Nous déduisons de nos lemmes préparatoires le résultat central suivant :

Lemme 3.4 *Pour tout entier* $n \geq 1$*, le produit* $\prod_{p\leq n} p$ *est inférieur à* 4^n.

Démonstration. Montrons par récurrence sur l'entier $\ell \geq 1$ la propriété :

$$\forall k \leq 2\ell, \quad \prod_{p\leq k} p \leq 4^k.$$

Celle-ci est vraie pour $\ell = 1$. En effet $\prod_{p\leq 1} p = 1$, car tout produit sur un ensemble vide vaut 1, et $\prod_{p\leq 2} p = 2 \leq 4^1$. Supposons maintenant la propriété vérifiée en ℓ et montrons-là en $\ell+1$. Il suffit de montrer que $\prod_{p\leq 2\ell+1} p \leq 4^{2\ell+1}$ et que $\prod_{p\leq 2\ell+2} p \leq 4^{2\ell+2}$. Mais comme $2\ell+2$ n'est jamais premier, la seconde somme se réduit en fait à la première. Nous avons

$$\prod_{p\leq 2\ell+1} p = \prod_{p\leq \ell+1} p \prod_{\ell+1<p\leq 2\ell+1} p \leq 4^{\ell+1}4^{\ell} = 4^{2\ell+1}$$

car $\prod_{p\leq \ell+1} p \leq 4^{\ell+1}$ par hypothèse de récurrence et $\prod_{\ell+1<p\leq 2\ell+1} p \leq \binom{2\ell+1}{\ell+1} \leq 4^{\ell}$ en combinant les lemmes 3.2 et 3.3. Ce qui règle l'étape de récurrence et conclut par conséquent la preuve de ce lemme. □

Lemme 3.5 *Pour tout réel $X > 1$, nous avons* $\sum_{p \leq X} \log p \leq X \log 4$.

Démonstration. Partons d'un réel X, et notons N sa partie entière (i.e. l'entier qui lui est immédiatement inférieur). Nous avons à partir du lemme 3.4

$$\prod_{p \leq X} p = \prod_{p \leq N} p \leq 4^N \leq 4^X.$$

En prenant le logarithme à droite et à gauche, cela nous donne

$$\sum_{p \leq X} \log p \leq X \log 4$$

comme attendu. $\square$

Lemme 3.6 *Pour tout réel $X \geq 2$, nous avons*

$$\int_2^X \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{12X}{(\log X)^2}$$

Démonstration. Pour $X \leq X_0 = 10$, nous avons

$$\int_2^X \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \int_2^X \frac{dt}{(\log 2)^2} \leq \left(\frac{\log X_0}{\log 2}\right)^2 \frac{X}{(\log X)^2} \leq \frac{12X}{(\log X)^2}.$$

Pour $X \geq X_0$, nous considérons la fonction

$$f : [X_0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \tfrac{12X}{(\log X)^2} - \int_2^X \tfrac{dt}{(\log t)^2}$$

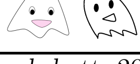
que nous dérivons f. Il vient

$$f'(X) = \frac{12}{(\log X)^2} - \frac{24}{(\log X)^3} - \frac{1}{(\log X)^2} \geq \left(11 - \frac{24}{\log 10}\right)\frac{1}{(\log X)^2} \geq 0.$$

Notre fonction f est donc croissante et en X_0, nous avons déjà vérifié qu'elle est positive. Le lemme s'ensuit. $\square$

Exercice 48. *Montrer que, pour $X \geq 2$, nous avons*

$$\int_2^X \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{12X}{5(\log X)^2}.$$



Preuve du théorème 3.1. Nous allons procéder par sommation par parties. Nous utilisons, pour tout nombre premier $p \leq X$,

$$\frac{1}{\log p} = \frac{1}{\log X} + \int_p^X \frac{dt}{t(\log t)^2}$$

ce qui nous permet d'écrire en utilisant le lemme 3.5

$$\begin{aligned}\sum_{p \leq X} 1 &= \sum_{p \leq X} \log p \left(\frac{1}{\log X} + \int_p^X \frac{dt}{t(\log t)^2} \right) \\ &= \frac{\sum_{p \leq X} \log p}{\log X} + \int_2^X \sum_{p \leq t} \log p \frac{dt}{t(\log t)^2} \leq \frac{X \log 4}{\log X} + \int_2^X \frac{dt}{(\log t)^2} \log 4.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.6, nous obtenons, pour $X \geq 2$,

$$\sum_{p \leq X} 1 \leq \frac{X \log 4}{\log X} + \frac{12 X \log 4}{(\log X)^2} \leq \frac{X \log 4}{\log X} \left(1 + \frac{12}{\log X} \right).$$

Et donc $\sum_{p \leq X} 1 \leq 9X/\log X$ si $X \geq 11$. D'un autre côté, nous avons

- Quand $2 \leq X < 3$ alors $\sum_{p \leq X} 1 = 1 \leq X/\log X$;
- Quand $3 \leq X < 5$ alors $\sum_{p \leq X} 1 = 2 \leq X/\log X$;
- Quand $5 \leq X < 7$ alors $\sum_{p \leq X} 1 = 3 \leq X/\log X$;
- Quand $7 \leq X < 11$ alors $\sum_{p \leq X} 1 = 4 \leq \frac{3}{2} X/\log X$; Mais l'inégalité $\sum_{p \leq X} 1 \leq^? X/\log X$ est fausse dans cet intervalle.

Le théorème est démontré. □

Exercice 49. *Montrer que, pour X réel > 1, nous avons* $\sum_{p \leq X} 1 \leq 5X/\log X$.

Chapitre 4

Les estimations de Mertens sur les nombres premiers

Nous allons évidemment avoir besoin de quantifier le nombre de nombres premiers dans un intervalle. De telles estimations existent depuis longtemps, et le travail consistant à les rendre explicite numériquement a débuté dans les années quarante. Nous disposons maintenant de bonnes estimations pour les quantités simples. Nous en profitons aussi pour introduire deux techniques simples et efficaces.

4.1. La fonction de von Mangoldt

Nous avons besoin ici d'une fonction nommée d'après Hans von Mangoldt. Celui-ci a publié en 1894 un mémoire important sur les nombres premiers où il introduit notamment cette fonction sous la notation $L(n)$. Nous la notons $\Lambda(n)$ comme il est usuel à l'heure actuelle. Elle est définie par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^a \text{ avec } a \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Par exemple $\Lambda(2) = \Lambda(4) = \log 2$ et $\Lambda(15) = 0$. Notons explicitement que $\Lambda(1) = 0$. L'apparition de cette fonction n'est pas du tout mystérieuse si l'on raisonne en termes de séries de Dirichlet mais nous évitons ce point de vue ici. Du coup, la justification de son introduction vient de deux aspects. Tout d'abord, elle permet d'isoler les puissances des nombres premiers des autres entiers tout en leur attribuant un poids assez peu fluctuant $\log p$, et nous verrons au lemme 4.5 que la contribution des p^2, p^3, ... est négligeable devant celle des nombres premiers p.

Cela étant, son intérêt véritable résulte de l'identité :

$$\forall n \text{ (entier) } \geq 1, \quad \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n, \tag{4.2}$$

où la somme porte sur tous les diviseurs $d \geq 1$ de n.

Démonstration. Pour $n = 1$, cette identité est évidente. Pour n plus grand, nous le décomposons en facteurs premiers $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_K^{a_K}$ où les p_i sont des nombres premiers distincts et les a_i des entiers ≥ 1. Il vient alors

$$\log n = a_1 \log p_1 + a_2 \log p_2 + \cdots + a_K \log p_K$$

et les diviseurs d de n pour lesquels $\Lambda(d) \neq 0$ sont les $p_1^{b_1}$ avec $1 \leq b_1 \leq a_1$ (il y en a a_1 de cette forme), puis les $p_2^{b_2}$ avec $1 \leq b_2 \leq a_2$ (il y en a a_2 de cette forme), etc. Et bien sûr, $a_1 \log p_1 = \sum_{b_1} \log p_1$, ce qui permet de clore la preuve. □

4.2. De la fonction $\log$ à la fonction Λ

Commençons par un lemme classique d'analyse :

Lemme 4.1 *Pour $x \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \log n = x \log x - x + \mathcal{O}^*(\log(2x)).$$

Démonstration. Soit N la partie entière de x. Nous procédons par comparaison à une intégrale, c'est à dire que nous utilisons les inégalités

$$\int_{n-1}^{n} \log t \, dt \leq \log n \leq \int_{n}^{n+1} \log t \, dt$$

qui sont une simple conséquence du caractère croissant du logarithme. En les sommant, nous obtenons

$$\int_{1}^{N} \log t \, dt \leq \sum_{2 \leq n \leq N} \log n \leq \int_{2}^{N+1} \log t \, dt \tag{4.3}$$

et un peu de travail permet de conclure, moyennant de se souvenir que $x \mapsto x \log x - x$ est une primitive de $x \mapsto \log x$.

Voici une interprétation graphique de l'encadrement :

La somme cumulée de l'aire des petits rectangles est la quantité qui nous interesse. Nous constatons graphiquement qu'elle est majorée par l'intégrale de la fonction ce qui est le membre de droite de 4.3 et minorée par l'intégrale de cette fonction translatée d'une unité vers la gauche, soit le membre de gauche de 4.3. □

Nous écrivons alors

$$\sum_{n\le x}\log n=\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda(d)=\sum_{d\le x}\Lambda(d)[x/d]$$

et l'idée de tout ce qui suit est basée sur l'égalité :

$$\sum_{d\le x}\Lambda(d)[x/d]=x\log x-x+\mathcal{O}^*(\log(2x)). \tag{4.4}$$

Exercice 50.

◇ 1 ◇ *Montrer que, pour* $\Re s>1$*, nous avons* $-\dfrac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n\ge1}\dfrac{\Lambda(n)}{n^s}$.

◇ 2 ◇ *Montrer que, pour* $s>1$*, nous avons* $\log\zeta(s)=\sum_{n\ge2}\dfrac{\Lambda(n)}{n^s\log n}$.

4.2.1 Une majoration à la Chebyshev

Théorème 4.2 *Nous avons pour tout* $x\ge1$*,*

$$\sum_{x/2<d\le x}\Lambda(d)\le 7x/10.$$

Démonstration. Une utilisation directe de 4.4 donne

$$\sum_{d\le x}\Lambda(d)\bigl([x/d]-2[x/(2d)]\bigr)=x\log 2+\mathcal{O}^*(2\log(2x)).$$

Nous remarquons maintenant que $[x]-2[x/2]\ge0$ pour tout x réel : en effet, cette quantité vaut 0 si x est dans $[0,1[$, puis 1 si x est dans $[1,2[$ et enfin est périodique de période 2. Par conséquent, l'équation ci-dessus implique

$$\sum_{x/2<d\le x}\Lambda(d)\bigl([x/d]-2[x/(2d)]\bigr)\le x\log 2+2\log(2x).$$

Pour les d entre $x/2$ et x, nous avons $[x/d]-2[x/(2d)]=1$ ce qui aboutit à

$$\sum_{x/2<d\le x}\Lambda(d)\le x\log 2+2\log(2x).$$

Cette inégalité permet de prouver le théorème si $x\ge1150$ et une vérification numérique permet d'étendre ce résultat à tout x réel ≥1. □

En découpant l'intervalle $[1,x]$ entre $]x/2,x]$ union $]x/4,x/2]$ union etc, nous obtenons le corollaire classique :

Corollaire 4.3 *Nous avons* $\sum_{d\le x}\Lambda(d)\le 7x/5$ *pour tout* $x\ge 1$.

Pafnouty Chebyshev est le premier à avoir établi en 1848 une telle estimation, par une méthode d'ailleurs proche de celle que nous avons développée. Notons ici que John Rosser a montré en 1941 que le maximum de la fonction $\sum_{d\le x}\Lambda(d)/x$ était atteint en $x=113$ et était un peu inférieur à 1.04.

Ceci nous donne aussi une majoration du nombre de nombres premiers inférieurs à une borne donnée :

Corollaire 4.4 *Pour tout* $x\ge 1$, *le nombre de nombres premiers inférieurs à* x *est au plus* $3x/(2\log x)$.

Signalons les notations traditionnelles $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$ et $\psi(x)=\sum_{d\le x}\Lambda(d)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que ce nombre de nombres premiers s'écrit aussi $\sum_{p\le x}1$. Or, nous tirons du corollaire précédent la majoration : $\sum_{p\le x}\log p\le 7x/5$. Nous nous débarrassons alors du poids $\log p$ par une technique que l'on appelle *la sommation par parties* du fait que, dans le formalisme de l'intégrale de Stieltjes, il s'agit effectivement de l'extension de la technique du même nom standard au niveau du calcul intégral. Une version souple et élémentaire s'obtient en écrivant :

$$\frac{1}{\log p}=\frac{1}{\log x}+\int_p^x\frac{dt}{t\log^2 t}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{\log p}\le\frac{7x}{5\log x}+\int_2^x\frac{7dt}{5\log^2 t}.$$

Pour la dernière intégrale, nous commençons par remarquer qu'une intégration par parties (classique !) implique, pour $k\ge 0$, que :

$$J_k=\int_2^x\frac{dt}{\log^k t}\le\frac{x}{\log^k x}+\int_2^x\frac{k\,dt}{\log^{k+1}t}$$

d'où nous déduisons que $(\log x-3)(\log^2 x)J_3\le x$ et $J_2\le x/\log^2 x+J_3$. Ce qui à termes nous donne le résultat annoncé si $x\ge\exp(5)$. Un calcul finit. □

Exercice 51. *Montrer que la série* $\sum_p 1/(p\log p)$ *est convergente.*

La fonction Λ donne aussi un poids non nul à des entiers qui ne sont pas de nombres premiers mais des puissances de ceux-ci. Leur contribution est la plupart du temps négligeable grâce au lemme suivant :

Lemme 4.5 *Pour $x \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{\substack{d \leq x \\ d \text{ non premier}}} \Lambda(d) \leq 3\sqrt{x}/2.$$

Démonstration. En effet, les d comptés s'écrivent p^a avec $a \geq 2$ et $p \leq \sqrt{x}$. Un nombre premier va apparaître en p, puis p^2, et caetera jusqu'à p^a où $a \leq (\log x)/\log p$. Le corollaire précédent conclut. □

Exercice 52. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4m + 3$.*

Indication : *On pourra montrer que l'entier $4 \cdot m! + 3$ admet au moins un facteur premier $\equiv 3[4]$.*

Exercice 53. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6m + 5$.*

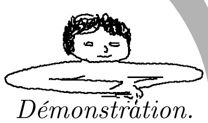
Indication : *On pourra montrer que l'entier $6 \cdot m! + 5$ admet au moins un facteur premier $\equiv 5[6]$.*

4.2.2 Un théorème à la Mertens

Nous en arrivons à un théorème dans l'esprit d'un résultat de Franz Mertens issu d'un mémoire de 1874. Il contient en essence une *minoration* du nombre de nombres premiers comme nous le montrons ci-après.

Théorème 4.6 *Pour $x \geq 2$, l'égalité suivante a lieu*

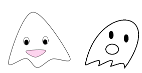
$$\sum_{d \leq x} \Lambda(d)/d = \log x - \tfrac{2}{3} + \mathcal{O}^*(\tfrac{1}{2})$$



Démonstration. Nous partons toujours de (4.4) et écrivons cette fois-ci $[x] = x - \{x\}$ où nous majorons la partie fractionnaire par 1 et la minorons par 0. Il vient

$$\tfrac{7}{10} + \log(2x)/x \geq \sum_{d \leq x} \Lambda(d)/d - \log x + 1 \geq -\log(2x)/x.$$

Pour $x \geq 120$, cela donne la borne supérieure $\log x - \frac{4}{15}$ et la borne inférieure $\log x - \frac{21}{20}$, ce qui est meilleur que le résultat annoncé. Pour x plus petit, une vérification numérique conclut. □



EXERCICE 54.

⋄ 1 ⋄ *(A. Selberg) Montrer que* $\Lambda\star\Lambda+\Lambda\log=\mu\star\log^2$ *où* $\Lambda\log$ *est la fonction qui à* n*, associe* $\Lambda(n)\log n$.

⋄ 2 ⋄ *Montrer que* $\Lambda\star\Lambda-\Lambda\log=\mathbb{1}\star\mu\log^2$ *où* $\mu\log^2$ *est la fonction qui à* n*, associe* $\mu(n)(\log n)^2$.

4.3. Un résultat de type postulat de Bertrand

Le mathématicien français Joseph Bertrand conjecturait en 1845 qu'il y a toujours un nombre premier dans l'intervalle $[n, 2n-3]$ si n est un entier ≥ 4, conjecture qui devait être démontrée par Chebyshev en 1850. Les résultats que nous avons montrés sont un peu plus faibles que ceux dont disposaient Chebyshev mais nous permettent de démontrer un résultat du même genre, à savoir :

Théorème 4.7 *Pour* $x\geq 2$*, nous avons*

$$C(x)=\sum_{x/4<p\leq x}1\geq 2x/(25\log x).$$

Il existe donc un nombre premier dans l'intervalle $]x/4, x]$ pour tout $x\geq 2$. Pour arriver au postulat de Bertrand, nous pourrions rechercher une autre inégalité sur les parties entières, ce qui est le chemin suivi par Chebyshev. Ou inclure dans le théorème 4.2 la contribution des entiers entre $x/4$ et $x/8$ et modifier conséquemment le théorème 4.6.

Démonstration. En appliquant le théorème 4.6 en x et $x/4$, nous obtenons

$$\sum_{x/4<d\leq x}\Lambda(d)/d\geq\log 4-1 \tag{4.5}$$

et par conséquent $\sum_{x/4<d\leq x}\Lambda(d)\geq x(\log 4-1)/4\geq x/11$ pour $x\geq 16$. Nous étendons cette inégalité à $x\geq 2$ par le calcul et il s'agit ensuite de passer de $\Lambda(d)$ à une somme sur les nombres premiers, ce que nous effectuons à l'aide du lemme 4.5, obtenant

$$\sum_{x/4<p\leq x}\log p\geq\frac{x}{11}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\geq 2x/25$$

si $x\geq 19\,000$ d'où le théorème dans ce cas. Un calcul numérique permet d'étendre ce résultat. □

Concernant de bonnes approximations de la somme des nombre premiers $\leq x$, signalons ici que dans la continuité des travaux de Rosser, Pierre Dusart a établi en 1999 que, pour $x \geq 598$

$$1 + \frac{0.992}{\log x} < \frac{\log x}{x} \sum_{p \leq x} 1 < 1 + \frac{1.2762}{\log x}. \tag{4.6}$$

Nous aurons encore besoin à la fin de ce livre d'un dernier résultat que voici.

Lemme 4.8 *Pour $x \geq 2$, nous avons*

$$\sum_{p \leq x} 1/p = \log\log x - \tfrac{1}{5} + \mathcal{O}^*(7/5).$$

Démonstration. Le théorème de Mertens implique que

$$-\tfrac{7}{6} - \sum_{k \geq 2, p \geq 2} \frac{\log p}{p^k} \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} - \log x \leq -\tfrac{1}{6}.$$

En sommant d'abord sur k et en utilisant un peu de calcul numérique, nous montrons que la somme sur k et p qui apparaît vaut au plus 0.8. Pour obtenir le lemme, nous utilisons une sommation par parties comme page 34. Il en résulte la majoration

$$\sum_{p \leq x} 1/p \leq \log\log x + 1 - \frac{1}{6 \log 2} - \log\log 2$$

et la minoration $\log\log x + 1 - \frac{59}{30 \log 2} - \log\log 2$. □

Exercice 55. *Montrer que*

$$\sum_{n \leq X} \omega(n) = X \log\log X + \mathcal{O}(X)$$

où $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n.

Exercice 56.

⋄ 1 ⋄ *Montrer qu'il existe une constante b telle que*

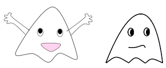
$$\sum_{p \leq x} 1/p = \log\log x + b + \mathcal{O}(1/\log x)$$

et telle que

$$-\sum_{p \leq x} \log\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = \log\log x + c + \mathcal{O}(1/\log x)$$

où la constante c est donnée par

$$c = b + \sum_{p \geq 2} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k}.$$



◇ 2 ◇ *Montrer que, pour* $x \geq 1$,

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n} = \sum_{n \leq \log x} \frac{1}{n} + c - \gamma + \mathcal{O}(1/\log(2x)).$$

◇ 3 ◇ *Montrer que, pour* $\delta > 0$,

$$\delta \int_1^\infty \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n} \frac{dx}{x^{1+\delta}} = \log \zeta(1+\delta) = -\log \delta + \mathcal{O}(\delta).$$

◇ 4 ◇ *Montrer que, pour* $\delta > 0$,

$$\delta \int_1^\infty \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} \frac{dx}{x^{1+\delta}} = \log(1 - e^{-\delta})^1 = -\log \delta + \mathcal{O}(\delta)$$

et en conclure que $c = \gamma$.

4.4. Le théorème des nombres premiers

En 1896, Hadamard d'un côté et De la Vallée-Poussin de l'autre (de la Vallée-Poussin, 1899) démontraient le théorème suivant :

Théorème 4.9 (Théorème des nombres premiers)
Nous avons, pour tout constante $A \geq 1$,

$$\sum_{p \leq X} \log p = X + \mathcal{O}(X/(\log X)^A).$$

La constante impliquée dans le symbole $\mathcal{O}$ *dépend bien sûr du choix de* A.

Nous ne le démontrerons pas ici. Sa preuve est assez simple mais demande du matériel théorique dont nous ne disposons pas ici.

Exercice 60.

◇ 1 ◇ *Montrer que* $\sum_{p \leq X} 1 \sim X/\log X$.

◇ 2 ◇ *Montrer que* $\sum_{p \leq X} 1 - X/\log X = \mathcal{O}\big(X/(\log X)^2\big)$.

◇ 3 ◇ *Montrer que* $\sum_{p \leq X} 1 - X/\log X = X/(\log X)^2 + \mathcal{O}\big(X/(\log X)^3\big)$. *Ceci montre que le terme d'erreur de la question précédente ne peut pas être amélioré.*

Exercice 61. *Montrer que*

$$\sum_{n \le X} \Lambda(n) = X + \mathcal{O}\big(X/(\log X)^{10}\big)$$

Exercice 62. *Montrer que*

$$\sum_{n \le X} \Lambda(n)\Big(1 - \frac{n}{X}\Big) = \tfrac{1}{2}X + \mathcal{O}(X/\log^2 X).$$

Indication : *Une sommation par parties résoud le problème, c'est à dire que l'on utilise* $1 - u = \int_u^1 dt$.

Exercice 63. *Montrer que*

$$\sum_{n+m \le X} \Lambda(n)\Lambda(m) = \tfrac{1}{2}X^2 + \mathcal{O}(X^2/\log^2 X).$$

Indication : *L'exercice 62 peut aider.*

Exercice 64. *(Théorème de Mertens)*

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer qu'il existe une constante* $B > 0$ *telle que*

$$\prod_{p \le X} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sim B/\log X$$

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que*

$$\prod_{p \le X} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \sim \frac{\pi^2}{6B}/\log X.$$

Voir l'exercice 56 pour la valeur $B = e^{-\gamma}$.

Exercice 65. *Nous définissons* $m(D) = \sum_{d \le D} \mu(d)/d$ *et* $M(D) = \sum_{d \le D} \mu(d)$. *Montrer que*

$$m(D) = \frac{M(D)}{D} + \frac{1}{D}\int_1^D \Big\{\frac{D}{t}\Big\}\frac{M(t)dt}{t} + \frac{\log D}{D}$$

pour $D \ge 1$.

Indication : *On pourra démontrer l'identité annexe :*

$$\int_1^D \Big[\frac{D}{t}\Big]\frac{M(t)dt}{t} = \log D.$$

Exercice 66. *Montrer que*

$$-\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} \ge 0$$

en utilisant $\log = \Lambda \star \mathbb{1}$.

Exercice 67. *Montrer que*

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \vartheta(x^{1/4}) + \cdots$$

où $\vartheta(y) = \sum_{p \le y} \log p$.

Exercice 68. *En notant* $M(z) = \sum_{d \le z} \mu(d)$, *montrer que*

$$M(x) + M(x/2) + M(x/3) + M(x/4) + \cdots = 1$$

pour tout réel $x \ge 1$.

Exercice 69. *(Iseki & Tatuzawa) Soit* F *une fonction de la variable réelle. Nous définissons*

$$G(x) = (\log x) \sum_{n \le x} F(x/n).$$

Montrer que

$$F(x) \log x + \sum_{n \le x} F(x/n)\Lambda(n) = \sum_{d \le x} \mu(d) G(x/d).$$

Indication : *On pourra partir de*

$$F(x) \log x = \sum_{n \le x} F(x/n) \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{x}{n}$$

et utiliser

$$\sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \Lambda(n).$$

Exercice 70.

⋄ 1 ⋄ *Utiliser la formule d'Iseki & Tatuzawa de l'exercice précédent avec* $F_1(x) = \psi(x)$ *et* $F_2(x) = x - \gamma - 1$ *pour montrer la formule de Selberg :*

$$\psi(x) \log x + \sum_{n \le x} \Lambda(n)\psi(x/n) = 2x \log x + \mathcal{O}(x).$$

⋄ 2 ⋄ *Utiliser la formule d'Iseki & Tatuzawa de l'exercice précédent pour montrer :*

$$M(x) \log x + \sum_{n \le x} \Lambda(n) M(x/n) = \mathcal{O}(x).$$

Chapitre 5

Taille des fonctions arithmétiques

Nous abordons ici le problème de donner des majorations et minorations assez grossières de la valeurs des fonctions arithmétiques en un point fixé.

5.1. Taille de la fonction de diviseurs

Notre premier problème concerne la fonction nombre de diviseurs. Pour chaque nombre premier p, nous avons $d(p) = 2$. De plus $d(n) = 1$ si et seulement si $n = 1$.

Exercice 72. *Montrer que $d(n) = 1$ si et seulement si $n = 1$.*

Exercice 73. *Montrer que $d(n) = 2$ si et seulement si n est un nombre premier.*

Exercice 74. *Montrer que $d(n) = 7$ si et seulement si n est la puissance 6-ième d'un nombre premier.*

Rappelons l'expression explicite de la fonction (nombre) de diviseurs :

$$n = \prod_i p_i^{\alpha_i}, \quad (p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j), \quad d(n) = \prod_i (\alpha_i + 1). \tag{5.1}$$

Par conséquent, la fonction $d(n)$ n'est pas bornée.

Exercice 75. *Quel est le plus petit entier n tel que $d(n) \geq 10$?*
Quel est le plus petit entier n tel que $d(n) \geq 11$?

À quelle vitesse la fonction $d(n)$ tend-elle vers l'infini ? Nous apportons une réponse partielle dans le théorème suivant, à l'aide du théorème 3.1.

Théorème 5.1 *Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons*

$$\log d(n) \leq 90 \log(3n)/\log\log(3n).$$

La constante 90 de ce théorème est loin d'être optimale !

Démonstration. L'inégalité est vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons donc $n \geq 3$. Nous écrivons

$$\log d(n) = \sum_{p_i^{\alpha_i} \| n} \log(\alpha_i + 1) \leq \sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \leq P}} \log(\alpha_i + 1) + 2 \sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \geq P}} \alpha_i.$$

Posons $q_i = p_i^{\alpha_i}$. Les q_i sont premiers entre eux. Par conséquent, la deuxième somme, disons R, vérifie $P^R \leq n$, i.e.

$$\sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \geq P}} \alpha_i \leq (\log n)/\log P.$$

Concernant la première somme, nous écrivons simplement

$$\sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \leq P}} \log(\alpha_i + 1) \leq \log\log(3n) \sum_{p \leq P} 1 \leq 50 \log\log(3n) \frac{P}{\log P}.$$

Le choix

$$P = \frac{\log(3n)}{(\log\log(3n))^2}$$

donne la majoration, avec $y = \log(3n) \geq \log 9$,

$$\begin{aligned} \log d(n) &\leq \frac{y}{\log y - 2\log\log y} + 50(\log y) \frac{y}{(\log y)^2(\log y - 2\log\log y)} \\ &\leq \frac{y}{\log y} \frac{\log y + 50}{\log y - 2\log\log y}. \end{aligned}$$

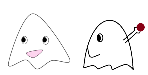
Considérons la fonction de $z = \log y$ définie par

$$\begin{aligned} g : [\log\log 9, \infty[&\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \frac{z + 50}{z - 2\log z}. \end{aligned}$$

Il est facile de la dessiner sur ordinateur et de voir qu'elle est croissante puis décroissante et vérifie $g(z) \leq 90$, mais montrons-le. Voici tout d'abord sa dérivée :

$$g'(z) = \frac{\frac{100}{z} - 48 - 2\log z}{(z - 2\log z)^2}.$$

Le dénominateur est positif alors que le numérateur est une fonction décroissante de z, qui vaut $79.511\cdots$ en $\log\log 9$ et tend vers $-\infty$ en l'infini. Il existe donc



un unique point z_0 tel que $h(z_0) = \frac{100}{z_0} - 48 - 2\log z_0 = 0$ qu'il est facile de cerner par dichotomie : en effet $h(2.023880) > 0$ et $h(2.023881) < 0$ donc $z_0 = 2.023880\cdots$. Bien sûr g est croissante sur $[\log\log 9, z_0]$ et décroissante sur $[z_0, \infty[$ et ce z_0 vérifie $g(z_0) = 85.75\cdots$. □

Exercice 76. *Montrer que si n admet un seul facteur premier, nous avons*

$$d(n) \leq \log(2n)/\log 2.$$

Exercice 77. *Montrer qu'il existe une suite (n_k) tendant vers l'infini et telle que*

$$\liminf \frac{\log d(n_k)\ \log\log n_k}{\log n_k} > 0.$$

Quelle est la meilleure minoration possible ?

Exercice 78. *Montrer que $\sigma(n)/n \ll \log\log(3n)$ où $\sigma(n)$ est la somme de diviseurs de n.*
Indication : *On pourra d'abord montrer que σ est multiplicative, en déduire une expression explicite et enfin considérer* $\log(\sigma(n)/n)$.

Corollaire 5.2 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, nous avons $d(n) \leq C(\varepsilon)n^{\varepsilon}$.*

Démonstration. En effet, d'après le théorème, nous avons la majoration $d(n) \leq \exp\bigl(90\log(3n)/\log\log(3n)\bigr)$. Ensuite, nous remarquons que la fonction $n \mapsto 1/\log\log(3n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il existe donc un réel $N(\varepsilon)$ tel que $1/\log\log(3n) \leq \varepsilon/90$ pour $n \geq N(\varepsilon)$. En fait nous pouvons prendre $N(\varepsilon) = \exp(\exp(90/\varepsilon))$. Nous avons alors, toujours pour $n \geq N(\varepsilon)$, $d(n) \leq \exp(\varepsilon\log(3n)) = 3^{\varepsilon}n^{\varepsilon}$. Considérons alors

$$C(\varepsilon) = \max\Bigl(3^{\varepsilon}, \max_{n<N(\varepsilon)} d(n)/n^{\varepsilon}\Bigr)$$

Nous avons bien

$$d(n) \leq C(\varepsilon)n^{\varepsilon}$$

puisque c'est vrai si $n < N(\varepsilon)$ et si $n \geq N(\varepsilon)$, c'est à dire : tout le temps ! □

Ce corollaire n'est pas très pratique. En effet, si nous suivons la preuve pour $\varepsilon = 1/10$, nous considérons $N(1/10) = \exp(\exp(900))$ et il nous faut donc calculer

$$\max_{n<e^{e^{900}}} (d(n)/n^{1/10})$$

Les astrophysiciens estiment qu'il y a moins de 10^{85} atomes dans l'univers, et $\exp(\exp(900)) \geq 10^{10^{390}}$! ! ! Le nombre de calculs à faire n'est donc pas astronomique : il est bien pire ! !

5.2. Applications

Exercice 79. *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante strictement positive $C(\varepsilon)$ telle que, pour tout entier n, nous avons*

$$C(\varepsilon)\, n^{1-\varepsilon} \le \varphi(n) \le C(\varepsilon)\, n^{1+\varepsilon}.$$

En déduire l'abscisse de convergence absolue de la série $\sum_{n\ge1} 1/(\varphi(n)n^s)$. Que pensez-vous de l'abscisse de convergence absolue de la série $\sum_{n\ge1} \mu^2(n)/(\varphi(n)n^s)$?

Exercice 80. *Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que, pour tout entier q, on a*

$$q/\varphi(q) \le c_1 \log\log 3q.$$

Indication : *On peut partir de $\log(q/\varphi(q)) = -\sum_{p|q} \log(1-1/p)$ puis séparer le traitement des $p \le P = \log q$ de ceux qui sont plus grands. Ces derniers sont peu nombreux.*

Exercice 81. *Montrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que, pour tout entier q, on a*

$$\sum_{p|q} \frac{1}{p} \le c_2 \log\log\log 9q.$$

Indication : *On pourra utiliser un procédé similaire à celui de l'exercice 80.*

Exercice 82. *Montrer pour tout entier q, on a $\sigma(q) \le q(1+\log q)$ Montrer en outre qu'il existe une constante $c_3 > 0$ telle que, pour tout entier q, on a*

$$\sigma(q) = \sum_{d|q} d \le c_3 q \log\log(9q).$$

Montrer que cette majoration est la meilleure possible à la constante multiplicative c_3 près.

Indication : *On pourra d'abord montrer que σ est multiplicative, en déduire une expression explicite et enfin considérer $\log(\sigma(n)/n)$. On pourra utiliser un procédé similaire à celui de l'exercice 80 ou utiliser l'exercice 81.*

Exercice 83.

⋄ 1 ⋄ *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des entiers n'ayant que des facteurs premiers $\le D$ où D est un paramètre ≥ 1. Montrer que*

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} 1/d \ll \log(2D).$$

⋄ 2 ⋄ *Montrer que, pour tout $q \ge 1$, nous avons*

$$\tau(m)^q \le \sum_{dk=m} \tau(d)^{q-1}\tau(k)^{q-1}$$

◇ 3 ◇ *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des entiers n'ayant que des facteurs premiers $\leq D$ où D est un paramètre ≥ 1. Montrer que, pour tout q paramètre entier ≥ 1, nous avons*

$$\sum_{m\in\mathcal{D}} \tau(m)^q/m \ll (\log(2D))^{2^q}.$$

INDICATION : *On pourra procéder par récurrence sur q.*

◇ 4 ◇ *Soit D est un paramètre ≥ 1 fixé et soit $\tau_D(n)$ le nombre de diviseurs de n qui sont $\leq D$. Soit $q \geq 1$ un paramètre. Montrer que*

$$\sum_{n\leq X} \tau_D(n)^q \ll X(\log(2D))^{2^q}.$$

INDICATION : *On pourra noter $k(n)$, pour tout entier n, le plus grand diviseur de n dans $\mathcal{D}$.*

EXERCICE 87. *Nous notons ici $\tau_r(n)$ le nombre r-uplets d'entiers $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ tels que $n_1 n_2 \cdots n_r = n$.*

◇ 1 ◇ *Calculer $\tau_r(p^a)$ lorsque p est un nombre premier.*

◇ 2 ◇ *Montrer que*

$$\sum_{n\leq N} \tau_r(n)^2/n \leq (\log N + 1)^{r^2}$$

INDICATION : *On pourra utiliser $\tau_r(n_1 n_2 \cdots n_r) \leq \tau_r(n_1)\tau_r(n_2)\cdots\tau_r(n_r)$ que l'on prendra soin de démontrer.*

◇ 3 ◇ *Montrer que*

$$\sum_{n\leq N} \tau_r(n)^2 \ll_r N(\log N + 1)^{r^2-1}$$

où le symbole $\ll_r$ signifie que la valeur absolue du membre de gauche est inférieure au membre de droite multiplié par une constante qui peut dépendre de r.

EXERCICE 90. *Montrer que la série*

$$\sum_{n\geq 1} \Big(\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\Big)^r$$

est convergente pour tout entier $r \geq 2$.

EXERCICE 91. *Montrer que*

$$d(n) \leq 2 \sum_{\substack{\delta | n,\\ \delta\leq\sqrt{n}}} 1.$$

EXERCICE 92. *(B. Landreau sur une idée de van der Corput) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, et tout réel $s > 0$, nous avons*

$$d^s(n) \leq k^{k(k-1)s} \sum_{\substack{\delta | n, \\ \delta \leq n^{1/k}}} d^{ks}(\delta).$$

INDICATION : *On définira la fonction auxiliaire*

$$G(n) = \sum_{\substack{\delta | n, \\ \delta \leq n^{1/k}}} d^{ks}(\delta)$$

et on montrera d'abord que cette fonction est sur-multiplicative, i.e. que $G(n_1 n_2) \geq G(n_1)G(n_2)$ si $\mathrm{pgcd}(n_1, n_2) = 1$. On établira ensuite que $d^s(p^\nu) \leq d^{ks}(p^{[\nu/k]}) \leq G(p^\nu)$ lorsque $\nu \geq k$ et que $d^s((p_1 \cdots p_r)^\nu) \leq k^{ks} G((p_1 \cdots p_r)^\nu)$ lorsque $\nu < k$, car, si $r < k$, nous avons $d^s(n) \leq k^{ks}$ et si $r \geq k$, $d^s(n) \leq k^{ks} d^{ks}((p_1 \cdots p_{[r/k]})^\nu)$ (et en rangeant $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, on a $(p_1 \cdots p_{[r/k]})^\nu \leq n^{1/k}$).

Voir (Bordellès, 2006) pour une application.

Chapitre 6

Des fonctions multiplicatives de caractère algébrique

Ce chapitre présente une famille de fonctions multiplicatives issues de l'algèbre. Les série de Dirichlet qui en sont issues sont l'objet de recherches intenses.

6.1. Rappels sur le groupe multiplicatifs modulo $\mathfrak{f}$

Soit $\mathfrak{f}$ un nombre premier ≥ 3 fixé (il s'agit d'un $\mathfrak{f}$ minuscule gothique). Nous considérons

$$G_{\mathfrak{f}} = \left(\mathbb{Z}/\mathfrak{f}\mathbb{Z}\right)^{\times} = \mathbb{Z}/\mathfrak{f}\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{1, 2, \cdots, \mathfrak{f} - 1\} \tag{6.1}$$

est l'ensemble des classes inversibles modulo $\mathfrak{f}$. Un entier relatif n est dans une classe de $G_{\mathfrak{f}}$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, \mathfrak{f}) = 1$. Comme $\mathfrak{f}$ est un nombre premier, dire que $\mathfrak{f}$ est premier à n est exactement la même chose que de dire que $\mathfrak{f}$ ne divise pas n. L'ensemble $G_{\mathfrak{f}}$ muni de la multiplication est un groupe. En effet, nous rappelons les points à vérifier :

(a) Si x et y sont dans $G_{\mathfrak{f}}$, alors xy est dans $G_{\mathfrak{f}}$.

(b) La multiplication est associative, i.e. $(xy)z = x(yz)$.

(c) La multiplication admet un élément neutre qui est la classe de 1 que l'on note encore 1.

(d) La multiplication est commutative, i.e. $xy = yx$.

(e) Tout élément x admet un inverse y, i.e. un élément tel que $xy = yx = 1$.

Tout cela est à peu près évident moyennant de se souvenir de la définition, sauf peut être le dernier point. En voici deux démonstrations.

Première preuve. Soit un élément x de $G_{\mathfrak{f}}$, soit la classe d'un entier n premier à $\mathfrak{f}$. Nous considérons la suite x, x^2, x^3, $\cdots$. Comme cette suite varie dans un ensemble fini, il existe deux entiers positifs distincts ℓ et k tels que $x^\ell = x^k$. Supposons par exemple que $\ell < k$. La classe x^ℓ est représentée par n^ℓ, et nous avons donc $n^\ell \equiv n^k \pmod{\mathfrak{f}}$. Cela nous donne $n^{k-\ell}(n^\ell - 1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}}$. Ceci signifie que $p | n^{k-\ell}(n^\ell - 1)$. Le lemme 1.1 de Gauss nous dit que $\mathfrak{f}$ divise $n^{k-\ell}$ ou $n^\ell - 1$. Comme $\mathfrak{f}$ ne divise pas n, il ne divise pas non plus $n^{k-\ell}$, ce qui implique qu'il divise $n^\ell - 1$. En redescendant modulo $\mathfrak{f}$, nous obtenons $n^\ell \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, i.e. $x^\ell = 1$. Ceci nous donne aussi $x \cdot x^{\ell-1} = 1$ d'où nous tirons que $x^{\ell-1}$ est un inverse de x. □

Cette preuve est classique et issue de la théorie générale des groupes finis. Elle est le cœur du théorème de Lagrange qui dit que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe qui le contient. En fait le mathématicien français Joseph-Louis Lagrange n'a pas démontré ce théorème, la notion de groupe n'existait d'ailleurs pas vers 1770, mais il a établi une proposition qui est l'ancêtre de ce résultat (et concernait les groupes de permutations).

Seconde preuve. Partons encore d'un élément x de $G_\mathfrak{f}$, qui est la classe d'un entier n premier à $\mathfrak{f}$. D'après l'identité de Bézout [*], il existe deux entiers a et b tel que $an + b\mathfrak{f} = 1$. En réduiasnt cette égalité modulo $\mathfrak{f}$, cela nous donne $an \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$. La classe de l'entier a nous donne donc l'inverse de x. □

Nous aurions pu aller plus vite en établissant directement le petit théorème de Fermat, du nom du mathématicien Pierre de Fermat, qui l'établit en 1640.

Théorème 6.1 (Petit théorème de Fermat)
Pour tout entier n, nous avons $n^\mathfrak{f} \equiv n \pmod{\mathfrak{f}}$.

Démonstration. Il existe plusieurs preuves de ce résultat, mais voici celle d'Euler et Leibniz. Regardons les coefficients binomiaux $\binom{\mathfrak{f}}{k}$ comme dans le chapitre 3. La remarque essentielle est que $\mathfrak{f}$ divise ce coefficient si $1 \leq k \leq \mathfrak{f} - 1$. Nous laissons le lecteur comprendre pourquoi. Nous en déduisons que, pour tout entier m, nous avons $(m+1)^\mathfrak{f} \equiv m^\mathfrak{f} + 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, ce qui permet de démontrer notre théorème par récurrence sur m : nous avons bien $0^\mathfrak{f} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}}$, et si $m^\mathfrak{f} \equiv m \pmod{\mathfrak{f}}$ alors $(m+1)^\mathfrak{f} \equiv m + 1 \pmod{\mathfrak{f}}$. □

En conséquence, si n est premier à $\mathfrak{f}$, nous avons $n^{\mathfrak{f}-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$.

6.2. Le sous-groupe des carrés

Dans notre groupe $G_\mathfrak{f}$, nous considérons le sous-groupe

$$G_\mathfrak{f}^{(2)} = \{x^2, x \in G_\mathfrak{f}\}. \tag{6.2}$$

Comme le produit de deux carrés est encore un carré, cet ensemble est bien stable sous le produit ; de plus l'inverse d'un carré est aussi un carré [†].

∗. Cette identité porte ce nom, mais elle est due à Claude-Gaspard Bachet de Méziriac vers 1624 et est contenue dans son livre « Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres ».

†. C'est assez évident. Si $x \cdot x^{-1} = 1$ alors $x^2 \cdot (x^{-1})^2 = 1$.

Peut-on avoir $G_{\mathfrak{f}}^{(2)} = G_{\mathfrak{f}}$? Cette question n'est pas anodine parce qu'il existe plein de groupes finis où tout le monde est effectivement un carré. Il faut utiliser des informations particulières sur notre groupe.

Voici une preuve qui utilise le petit théorème de Fermat. Écrivons $\mathfrak{f} - 1 = 2^\ell \frac{\mathfrak{f}-1}{2^\ell}$ où $(\mathfrak{f}-1)/2^\ell$ est impair. Supposons que tout élément de $G_{\mathfrak{f}}$ soit un carré. Un x est donc de la forme y_1^2. Mais comme y_1 est aussi un carré, nous pouvons l'écrire y_2^2. En réitérant, nous pouvons donc écrire $x = y_\ell^{2^\ell}$ pour un certain y. Le petit théorème de Fermat nous donne $x^{(\mathfrak{f}-1)/2^\ell} = y_\ell^{\mathfrak{f}-1} = 1$. Prenons $x = -1$ (soit la classe de -1). Comme $(\mathfrak{f}-1)/2^\ell$ est impair, nous avons $x^{(\mathfrak{f}-1)/2^\ell} = -1$. Nous n'avons $-1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ si et seulement si $\mathfrak{f} = 2$, mais nous avons supposé $\mathfrak{f} > 2$. Ce qui entre en contradiction avec notre hypothèse : par conséquent, il existe une classe inversible qui n'est pas un carré.

Nous donnons maintenant une approche plus efficace en considérant

$$\begin{aligned} h : G_{\mathfrak{f}} &\to G_{\mathfrak{f}}^{(2)} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un homomorphisme surjectif de groupes, puisque $h(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = h(x)h(y)$. Que dire de son noyau ? L'équation $x^2 = 1$ se traduit par $n^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ si n est un représentant de la classe x. Il vient $\mathfrak{f} | (n^2 - 1) = (n+1)(n-1)$. Par le lemme 1.1 de Gauss, nous avons $\mathfrak{f} | n-1$ ou $\mathfrak{f} | n+1$, i.e. $x = 1$ ou $x = -1$. Bien sûr, nous utilisons là encore le fait que $1 \not\equiv -1 \pmod{\mathfrak{f}}$. Le noyau de l'homomorphisme de h est donc $\{\pm 1\}$. Donc tout élément de $G_{\mathfrak{f}}^{(2)}$ admet deux antécédents, et nous en déduisons tout d'abord que

$$\left| G_{\mathfrak{f}}^{(2)} \right| = (\mathfrak{f} - 1)/2. \tag{6.3}$$

Nous en déduisons encore qu'il existe un élément y_0 qui n'est pas un carré. Et enfin que toute classe inversible s'écrit soit sous la forme x^2, soit sous la forme $y_0 x^2$. Cette dernière propriété n'est pas tout à fait évidente : regardons l'ensemble $H = \{y_0 x^2, x \in G_{\mathfrak{f}}\}$. Cet ensemble admet le même cardinat que $G_{\mathfrak{f}}^{(2)}$, soit $(\mathfrak{f}-1)/2$, et n'admet aucune intersection avec $G_{\mathfrak{f}}^{(2)}$. En effet un élément de cette intersection s'écrirait à la fois $y_0 x^2$ et z^2, ce qui nous donnerait $y_0 = (zx^{-1})^2$ et y_0 serait un carré. Nous constatons maintenant que la somme des cardinaux de H et de $G_{\mathfrak{f}}^{(2)}$ vaut $2 \cdot (\mathfrak{f}-1)/2 = \mathfrak{f} - 1$ ce qui fait que $H \cup G_{\mathfrak{f}}^{(2)}$ couvre tout $G_{\mathfrak{f}}$ comme nous le souhaitions.

6.3. Le symbole de Legendre

Après ces digressions, nous en venons à la définition du symbole de Legendre (défini vers 1783).

$$\left(\frac{n}{\mathfrak{f}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathfrak{f} | n, \\ 1 & \text{si } n \text{ est un carré modulo } \mathfrak{f}, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Voici le théorème principal concernant ce « symbole » *

∗. Il s'agit en fait d'une fonction qui à l'entier n associe 0, 1 ou -1.

Théorème 6.2 *Le symbole de Legendre* $n \mapsto \left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)$ *est une fonction complètement multiplicative.*

Rappelons qu'une fonction f est complètement multiplicative si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous entiers m et n, et non spécialement premiers entre eux, comme nous nous contentons de le demander dans le cas des fonctions multiplicatives.

Démonstration. Soit donc m et n deux entiers. Si m ou n est divisible par $\mathfrak{f}$, alors $\mathfrak{f}$ divise mn. L'un de $\left(\frac{m}{\mathfrak{f}}\right)$ et de $\left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)$ est nul, et de même $\left(\frac{mn}{\mathfrak{f}}\right) = 0$, ce qui nous donne bien $\left(\frac{mn}{\mathfrak{f}}\right) = \left(\frac{m}{\mathfrak{f}}\right)\left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)$. Voici réglé ce cas particulier. Supposons maintenant que m et n sont premiers à $\mathfrak{f}$.

Si m et n sont congrus à des carrés modulo $\mathfrak{f}$, disons $m \equiv u^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ et $n \equiv v^2 \pmod{\mathfrak{f}}$. Il vient $mn \equiv (uv)^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ et donc $\left(\frac{mn}{\mathfrak{f}}\right) = 1 = 1 \times 1 = \left(\frac{m}{\mathfrak{f}}\right)\left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)$.

Si m est congru à un carré modulo $\mathfrak{f}$, mais pas n, alors nous pouvons écrire $m \equiv u^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ et $n \equiv w_0 v^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ où w_0 est un représnetant de la classe y_0 exhibée dans la section précédente : il s'agit d'un non-carré choisi. Par conséquent $mn \equiv w_0(uv)^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ n'est pas un carré modulo $\mathfrak{f}$ et $\left(\frac{mn}{p}\right) = -1 = 1 \times (-1) = \left(\frac{m}{\mathfrak{f}}\right)\left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)$ comme attendu.

De même, si n est congru à un carré modulo $\mathfrak{f}$, mais pas m, la relation $\left(\frac{mn}{\mathfrak{f}}\right) = \left(\frac{m}{\mathfrak{f}}\right)\left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)$ a encore lieu.

Si, enfin, m et n ne sont ni l'un, ni l'autre des carrés modulo $\mathfrak{f}$, alors nous pouvons écrire $m \equiv w_0 u^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ et $n \equiv w_0 v^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ et donc $mn \equiv (w_0 uv)^2 \pmod{\mathfrak{f}}$ est un carré. I.e. $\left(\frac{mn}{\mathfrak{f}}\right) = 1 = (-1) \times (-1) = \left(\frac{m}{\mathfrak{f}}\right)\left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)$ comme attendu. □

En suivant une approche algébrique, nous aurions utilisé le groupe quotient $G_{\mathfrak{f}}/G_{\mathfrak{f}}^{(2)}$. Ce que nous avons fait ci-dessus revient en fait à le définir.

Voici une propriété qui nous servira :

Théorème 6.3 *Nous avons*

$$\sum_{1 \le n \le \mathfrak{f}} \left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right) = 0.$$

Démonstration. En effet, il y a exactment $(\mathfrak{f}-1)/2$ entiers modulo $\mathfrak{f}$ qui sont congrus à des carrés non nuls modulo $\mathfrak{f}$, ce qui nous donne

$$\sum_{1\le n\le \mathfrak{f}} \left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right) = \frac{\mathfrak{f}-1}{2} + (-1)\frac{\mathfrak{f}-1}{2} + 0 = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

6.4. La fonction L du symbole de Legendre

La série de Dirichlet du symbole de Dirichlet se note

$$L\big(s, (\tfrac{\cdot}{\mathfrak{f}})\big) = \sum_{n\ge 1} \left(\frac{n}{\mathfrak{f}}\right)/n^s \tag{6.5}$$

Nous avons

$$L\big(s, (\tfrac{\cdot}{\mathfrak{f}})\big) = \prod_{p\ge 2}\left(1 - \frac{(\frac{p}{\mathfrak{f}})}{p^s}\right)^{-1} \tag{6.6}$$

où le produit porte sur tous les nombres premiers p. C'est d'ailleurs à cause de cette formule dans laquelle il est automatique d'utiliser la variable p que nous avons utilisé la lettre $\mathfrak{f}$ pour le module.

Exercice 93. *Pour tout module $r \ge 1$, nous posons*

$$\Xi_r = \left\{\frac{u}{r}, 1 \le u \le r, \mathrm{pgcd}(u,r) = 1\right\}.$$

Soit q et q' deux entiers premiers entre eux. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \Xi_q \times \Xi_{q'} & \to & \Xi_{qq'} \\ & (a/q, a'/q') & \mapsto & (aq' + a'q)/(qq') \end{array}$$

est une bijection.

Indication : *On vérifiera que cette fonction est injective. Pour montrer la surjectivité, ou bien on prendra un argument de cardinalité, ou bien on emploiera le théorème de Bezout : il existe deux entiers u et v tels que $uq + vq' = 1$. Le point $b/(qq')$ de $\Xi_{qq'}$ est alors égal à $\Psi(bv/q \bmod 1, bu/q' \bmod 1)$.*

Exercice 94. *Soit $P(X)$ un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $\rho(q)$ le nombre de solutions de $P(x) \equiv 0[q]$. Montrer que la fonction $q \mapsto \rho(q)$ est multiplicative.*

EXERCICE 95. *Nous souhaitons montrer le lemme de Thue qui dit : soit $a \geq 1$ un entier et $p \geq 3$ un nombre premier tel que $p \nmid a$. L'équation $au \equiv v[p]$ admet une solution $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ telle que*

$$1 \leq |u| < \sqrt{p}, \quad 1 \leq |v| < \sqrt{p}.$$

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Considérons $\mathcal{S} = \{0, \cdots, [\sqrt{p}]\}$ et l'application*

$$\begin{aligned} &f : S^2 \to \{0, \cdots, p-1\}, \\ &(u, v) \mapsto f(u, v) \equiv au - v[p]. \end{aligned}$$

Montrer que f n'est pas injective.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Soit deux paires (u_1, v_1) et (u_2, v_2) telles que $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2)$. Nous posons $u = u_1 - u_2$ et $v = v_1 - v_2$. Montrer que $au \equiv v[p]$, puis que $|u| < \sqrt{p}$ et $|v| < \sqrt{p}$, et enfin que ni u ni v n'est nul.*

Chapitre 7

Un peu de pratique

Ce chapitre détaille trois exemples, notamment parce que les mécanismes de manipulation des expressions arithmétiques en jeu sont fondamentaux pour comprendre les développements subséquents. Son écriture est très différente de celle des autres chapitres : nous énonçons des propriétés et le travail du lecteur est bien sûr de les montrer !

7.1. Cinq exemples

Exemple 1. $f_0(n) = \prod_{p|n}(p-2)$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_0, s) &= \prod_{p\geq 2}\left(1 + \frac{p-2}{p^s-1}\right) = \prod_{p\geq 2}\left(1 - \frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}\right)\frac{1}{1-1/p^{s-1}} \\ &= C_0(s)\zeta(s-1) \end{aligned}$$

où $C_0(s)$ est holomorphe pour $\Re s > \frac{3}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_0, s)$ est méromorphe pour $\Re s > \frac{3}{2}$ et admet un pôle simple en $s = 2$. —

Exemple 2. $f_2(n) = \mu^2(n)/\varphi(n)$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_2, s) &= \prod_{p\geq 2}\left(1 + \frac{1}{(p-1)p^s}\right) \\ &= \prod_{p\geq 2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)p^{s+1}} - \frac{1}{(p-1)p^{2s+1}}\right)\frac{1}{1-1/p^{s+1}} \\ &= C_2(s)\zeta(s+1) \end{aligned}$$

où $C_2(s)$ est holomorphe pour $\Re s > -\frac{1}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_2, s)$ est méromorphe pour $\Re s > -\frac{1}{2}$ et admet un pôle simple en $s = 0$. —

Exemple 3. $f_3(n) = 2^{\Omega(n)}$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_3, s) &= \prod_{p\geq 2}\frac{1}{1-\frac{2}{p^s}} = \prod_{p\geq 2}\left(1 + \frac{1}{p^{2s}-2p^s}\right)\zeta^2(s) \\ &= C_3(s)\zeta^2(s) \end{aligned}$$

où $C_3(s)$ est holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_3, s)$ est méromorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et admet un pôle double en $s = 1$. —

Exemple4. Nous considérons la fonction

$$\mathcal{F}(s) = \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right). \tag{7.1}$$

— Ce produit est absolument convergent au sens de Godement pour $\Re s > 1$ (preuve ?), mais représente-t'il une série de Dirichlet ? C'est à dire, peut on trouver une fonction arithmétique f_4 telle que

$$D(f_4, s) \stackrel{?}{=} \mathcal{F}(s).$$

En remarquant que, pour une indéterminée X, nous avons

$$(1 - X + X^2) \frac{1 - X^2}{1 - X} = \frac{1 - X^6}{1 - X^3}$$

nous montrons que

$$D(f_4, s) = \frac{\zeta(3s)}{\zeta(6s)} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Exemple5. Nous considérons la série de Dirichlet

$$L(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}. \tag{7.2}$$

— Cette série est absolument convergente lorsque $\Re s > 1$. Elle est en fait convergente pour $Res > 0$. Nous avons en fait $L(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$, ce qui fait que cette série se prolonge à tout le plan complexe.

7.2. Développement en séries de Dirichlet

Nous cherchons à développer alors les C_i en séries de Dirichlet :

$$C_i(s) = D(g_i, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_i(n)}{n^s}, \tag{7.3}$$

pour $i = 0, 2$ ou 3, et où les fonctions g_i sont bien sûr multiplicatives. Pour obtenir leurs valeurs exactes, il suffit d'identifier les coefficients dans le développement du facteur local en série de p^{-s}. Nous obtenons ainsi

$$\begin{cases} g_0(p) = -2 \\ g_0(p^k) = -(p^2 - 3p + 2), \quad (k \geq 2) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_2(p) = g_2(p^2) = -\dfrac{1}{p(p-1)} \\ g_2(p^k) = 0, \quad (k \geq 3) \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} g_3(p) = 0 \\ g_3(p^k) = 2^{k-2}, \quad (k \geq 2) \end{cases}$$

Nous posons aussi

$$\overline{C_i}(s) = \sum_n \frac{|g_i(n)|}{n^s} \tag{7.4}$$

et il se trouve que ces séries convergent encore là où nous avons montré que chaque C_i existait, c'est à dire respectivement pour $\Re s > 3/2$, $\Re s > -1/2$ et $\Re s > 1/2$.

7.3. Produits de convolution

Nous pouvons donc écrire

$$f_1(n) = \sum_{\ell m = n} g_1(\ell) m.$$

Mais aussi

$$f_4(n) = \sum_{ab^2c^3d^6 = n} \mu(a)\mu(c).$$

7.4. Un théorème général

Le lemme suivant est une généralisation d'un lemme de (Riesel & Vaughan, 1983) et se trouve dans (Ramaré, 1995). L'un des aspects essentiels de cette question tient dans la nature complètement explicite des termes d'erreur.

Lemme 7.1 *Soit g, h et k trois fonctions sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ à valeurs complexes. Posons $H(s) = \sum_n h(n)n^{-s}$, et $\overline{H}(s) = \sum_n |h(n)|n^{-s}$. Supposons que $g = h \star k$, que $\overline{H}(s)$ soit convergente pour $\Re(s) \geq -1/3$ et enfin qu'il existe quatre constantes A, B, C et D telles que*

$$\sum_{n \leq t} k(n) = A \log^2 t + B \log t + C + \mathcal{O}(Dt^{-1/3}) \quad \textit{pour} \quad t > 0;$$

Alors, pour tout $t > 0$, nous avons :

$$\sum_{n \leq t} g(n) = u \log^2 t + v \log t + w + \mathcal{O}(Dt^{-1/3}\overline{H}(-1/3))$$

avec $u = AH(0)$, $v = 2AH'(0) + BH(0)$ and $w = AH''(0) + BH'(0) + CH(0)$. Nous avons aussi

$$\sum_{n \leq t} ng(n) = Ut \log t + Vt + W + \mathcal{O}(2.5Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3))$$

avec

$$\begin{cases} U = AH(0), \qquad V = -2AH(0) + 2AH'(0) + BH(0), \\ W = A(H''(0) - 2H'(0) + 2H(0)) + B(H'(0) - H(0)) + CH(0). \end{cases}$$

Démonstration. Écrivons $\sum_{\ell \le t} g(\ell) = \sum_m h(m) \sum_{n \le t/m} k(n)$, et toute la régularité de nos expresions vient de ce qu'il n'est pas nécessaire d'imposer $m \le t$ dans $\sum_m h(m)$. Nous complétons alors la preuve facilement

Pour estimer $\sum_{\ell \le t} \ell g(\ell)$ for $t > 0$, nous écrivons

$$\sum_{\ell \le t} \ell g(\ell) = t \sum_{\ell \le t} g(\ell) - \int_1^t \sum_{\ell \le u} g(\ell) du,$$

et utilisons l'expression asymptotique de $\sum_{\ell \le u} g(\ell)$. □

Pour appliquer le lemme précédent, nous aurons besoin de

Lemme 7.2 *Pour tout $t > 0$, nous avons*

$$\sum_{n \le t} \frac{1}{n} = \log t + \gamma + \mathcal{O}\big(0.9105 t^{-1/3}\big).$$

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Pour tout $t > 0$, nous avons

$$\sum_{n \le t} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}\log^2 t + 2\gamma \log t + \gamma^2 - \gamma_1 + \mathcal{O}\big(1.641 t^{-1/3}\big),$$

avec

$$\gamma_1 = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m \le n} \frac{\log m}{m} - \frac{\log^2 n}{2} \right).$$

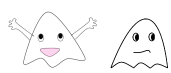
$(-0.072816 < \gamma_1 < -0.072815)$.

Démonstration. La preuve de la seconde partie de ce lemme se trouve dans (Riesel & Vaughan, 1983, Lemma 1).

Pour la première partie, rappelons que

$$\Big|\sum_{n \le t} \frac{1}{n} - \log t - \gamma\Big| \le \frac{7}{12t} \quad \text{pour} \quad t \ge 1.$$

Pour $0 < t < 1$, nous choisissons $a > 0$ tel que $\log t + \gamma + a\, t^{-1/3} \ge 0$. Cette fonction décroît de 0 à $(a/3)^3$ et ensuite croît. Cela nous donne la valeur minimale $a = 3\exp(-\gamma/3 - 1) \le 0.9105$. □



Dans la pratique, la fonction g sera multiplicative et vérifiera $g_p = b/p + o(1/p)$ avec $b = 1$ or 2. Dans ce cas, nous prenons $\sum k(n)n^{-s} = \zeta(s+1)^b$ et h est la fonction multiplicative déterminée par $\sum h(n)n^{-s} = \sum g(n)n^{-s}\zeta(s+1)^{-b}$.

Lorsque h est multiplicative, nous avons

$$H(0) = \prod_p (1 + \sum_m h(p^m)),$$

et

$$\frac{H'(0)}{H(0)} = \sum_p \frac{\sum_m mh(p^m)}{1 + \sum_m h(p^m)}(-\log p),$$

ainsi que

$$\frac{H''(0)}{H(0)} = \left(\frac{H'(0)}{H(0)}\right)^2 + \sum_p \left\{\frac{\sum_m m^2 h(p^m)}{1 + \sum_m h(p^m)} - \left(\frac{\sum_m mh(p^m)}{1 + \sum_m h(p^m)}\right)^2\right\}\log^2 p.$$

7.5. Un quatrième exemple détaillé

Lemme 7.3 *Pour tout $X > 0$ et tout entier $d \geq 1$, la fonction*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$$

est approximée par

$$\frac{\varphi(d)}{d}\left\{\log X + \gamma + \sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p(p-1)} + \sum_{p|d} \frac{\log p}{p}\right\} + \mathcal{O}(7.284X^{-1/3}f_1(d))$$

avec

$$f_1(d) = \prod_{p|d}(1 + p^{-2/3})\Big(1 + \frac{p^{1/3} + p^{2/3}}{p(p-1)}\Big)^{-1}.$$

Remarque : La somme de gauche est $G_d(X)$. Le cas $d = 1$ a déjà été étudié plus haut. La série de Dirichlet associée est

$$\sum_n \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)n^{s-1}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)(p^s+1)}\right)$$

ce qui fait que le terme d'erreur $\mathcal{O}(X^{-1/2})$ est admissible (notre méthode pourrait donner $\mathcal{O}(X^{-1/2}\log^2 X)$), et que nous ne pouvons espérer mieux que $\mathcal{O}(X^{-3/4})$.

Rosser & Schoenfeld ((Rosser & Schoenfeld, 1962) équation (2.11)) nous donne

$$\gamma + \sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p(p-1)} = 1.332\ 582\ 275\ 332\ 21...$$

Démonstration. Définissons la fonction multiplicative h_d par

$$h_d(p) = \frac{1}{p(p-1)}, \quad h_d(p^2) = \frac{-1}{p(p-1)}, \quad h_d(p^m) = 0 \quad \text{si} \quad m \geq 3,$$

si p est un nombre premier qui ne divise pas d, et par $h_d(p^m) = \frac{\mu(p^m)}{p^m}$ pour tout $m \geq 1$ si p est un facteur premier de d.

Nous avons alors

$$\sum_{n \geq 1} \frac{h_d(n)}{n^s} \zeta(s+1) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n) n^s}$$

ce qui nous permet d'appliquer le lemme 2. Nous vérifions que

$$\prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{p^{1/3} + p^{2/3}}{p(p-1)}\right) \leq 8.$$

□

Exercice 96.

◇ 1 ◇ *Montrer que* $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = (3/\pi^2) x^2 + \mathcal{O}(x \log x)$ *pour* $x \geq 2$.

◇ 2 ◇ *Montrer que*

$$\sum_{\substack{m,n \leq x, \\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1}} 1 = -1 + 2 \sum_{n \leq x} \varphi(n)$$

et en conclure que le membre de gauche est égal à $(6/\pi^2) x^2 + \mathcal{O}(x \log x)$.

Exercice 97. *Montrer que* $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = (\pi^2/12) x^2 + \mathcal{O}(x \log x)$ *pour* $x \geq 2$.

Exercice 98.

◇ 1 ◇ *Montrer que* $2^{\omega(n)} = \sum_{d^2 m = n} \mu(d) d(m)$.

◇ 2 ◇ *Montrer que* $\sum_{n \leq x} 2^{\omega(n)} = (6/\pi^2) x \log x + cx + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x)$ *pour* $x \geq 2$ *et où* $c = 2\gamma - 1 - 2\zeta'(2)/\zeta(2)$.

◇ 3 ◇ *Montrer que* $\sum_{n \leq x} 2^{\Omega(n)} = Cx(\log x)^2 + \mathcal{O}(x \log x)$ *pour* $x \geq 2$ *pour une constante* $C > 0$.

Chapitre 8

La fonction zeta de Riemann

La fonction ζ est très importante en arithmétique puisqu'elle intervient dans la formule d'Euler, elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi la série de Dirichlet la plus simple puisqu'elle est associée à la fonction constante 1 (fonction que nous notons $\mathbb{1}$). Elle est définie pour $\Re s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s.$$

Si il s'agit de la série de Dirichlet la plus simple et la plus célèbre, cependant elle reste assez mal connue. Pour une étude approfondie de cette fonction, le lecteur pourra se référer à (Tenenbaum, 1995) et (Ellison, 1975).

Exercice 99. *Montrer que la série qui définit $\zeta(s)$ est absolument convergente pour $\Re s > 1$.*

Indication : *On pourra utiliser une comparaison à une intégrale.*

Exercice 100. *Montrer que l'on a*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{u\}\frac{du}{u^{s+1}}$$

où $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire de u, c'est à dire $u - [u]$, où, cette fois-ci, $[u]$ désigne la partie entière de u. En déduire un équivalent de $\zeta(1+z)$ lorsque z tend vers 0.

Indication : *On pourra écrire, pour $n \geq 1$,*

$$\frac{1}{n^s} = s\int_n^\infty \frac{dt}{t^{s+1}}$$

(technique dite de sommation par parties).

Exercice 101. *Montrer que, pour $\sigma > 1$, nous avons $\zeta(\sigma) = (\sigma-1)^{-1} + \gamma + \mathcal{O}(\sigma - 1)$.*

Indication : *On rappelle que la constante d'Euler est aussi définie par*

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \{u\} du/u^2.$$

Voici un autre exercice qui démontre la même chose que le précédent.

Exercice 102. *On définit une série de fonctions* $\sum f_n$ *par*

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

◇ 1 ◇ *Montrer que la suite de terme général* $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1)$ *est convergente. Sa limite est notée* γ *et on l'appelle la constante d'Euler.*

◇ 2 ◇ *Prouver que pour* $n \geq 1$ *et* $x > 0$*, on a :* $0 \leq f_n(x) \leq n^{-x} - (n+1)^{-x}$.

◇ 3 ◇ *Montrer que la série de fonctions* $\sum f_n$ *est convergente sur* $]0, \infty[$.

◇ 4 ◇ *Soit* S *la somme de la série* $\sum f_n$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$*. Montrer que* $S(1) = \gamma$ *et donner l'expression de* $S(x)$ *quand* $x > 1$.

◇ 5 ◇ *Prouver que la convergence de la série* $\sum f_n$ *est uniforme sur* $[1, \infty[$.

◇ 6 ◇ *En déduire que lorsque* x *tend vers* 1 *alors* $\zeta(s) - \frac{1}{x-1}$ *tend vers* γ.

8.1. Majorations dans la bande critique

Écrivons

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n\leq N} n^{-s} + s\int_N^\infty \sum_{N<n\leq u} 1 \,\frac{du}{u^{s+1}} \\ &= \sum_{n\leq N} n^{-s} + s\int_N^\infty (u - \{u\} - N)\frac{du}{u^{s+1}} \\ &= \sum_{n\leq N} n^{-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - s\int_N^\infty \{u\}\frac{du}{u^{s+1}} \qquad (8.1)\end{aligned}$$

pour un entier $N \geq 0$ à choisir. Remarquons que nous aurions pu intégrer au départ de $N+1$ à l'infini, ce qui est effectivement le mieux à faire lorsque $N = 0$ et donne

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{u\}\frac{du}{u^{s+1}}. \qquad (8.2)$$

Théorème 8.1 *La fonction* ζ *se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan* $\Re s > 0$ *avec un unique pôle en* $s = 1$ *de résidu* 1.

La fonction ζ se prolonge se prolonge en fait à tout le plan complexe avec un unique pôle en $s = 1$.

Démonstration. L'équation (8.1) donne un prolongement à $\Re s > 0$. □

Lemme 8.2 *Si $s = \sigma + it$ avec $\sigma > 0$, nous avons*

$$\begin{cases} |\zeta(s)| \le |s| \left(\dfrac{1}{|1-\sigma|} + \dfrac{1}{\sigma} \right) & \text{si } |t| \le 2, \\ |\zeta(s)| \le 4 + \log|t| & \text{si } |t| \ge 2 \text{ et } 2 \ge \sigma \ge 1, \\ |\zeta(s)| \le 6\sigma^{-1}|t|^{1-\sigma}\log|t| & \text{si } |t| \ge 2 \text{ et } 1 \ge \sigma \ge 0. \end{cases}$$

Démonstration. Commençons par (8.2). Cela nous donne pour $|t| \le 2$

$$|\zeta(s)| \le \frac{|s|}{|\sigma - 1|} + |s| \int_1^\infty \frac{du}{u^{1+\sigma}}.$$

Maintenant, si $|t| \ge 2$ et $\sigma \ge 1$, nous prenons $N = 1 + [|t|]$ dans (8.1) (soit 1 plus la partie entière de la valeur absolue de t), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\le \sum_{n \le N} n^{-\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{|1-s|} + (2 + |t|) \int_N^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} \\ &\le 1 + \log N + \frac{1}{2} + \frac{2 + |t|}{N} \le 4 + \log|t|. \end{aligned}$$

Supposons enfin que $|t| \ge 2$ et que $\sigma \le 1$. Il vient

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\le \sum_{n \le N} n^{-\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{|1-s|} + (2 + |t|) \int_N^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} \\ &\le 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{1 + |t|} + \frac{2 + |t|}{\sigma N^\sigma} \\ &\le 1 + \frac{N^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{1 + |t|} + \frac{2 + |t|}{\sigma(1 + |t|)} N^{1-\sigma}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que la dérivée en x de $N^x - 1 - xN^x \log N$ est négative alors que cette fonction s'annule en $x = 0$, ce qui nous donne

$$\frac{N^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \le N^{1-\sigma} \log N \quad (1 \ge \sigma \ge 0)$$

et par conséquent

$$|\zeta(s)| \le 1 + N^{1-\sigma} \log N + \frac{N^{1-\sigma}}{1 + |t|} + \frac{2 + |t|}{\sigma(1 + |t|)} N^{1-\sigma}.$$

Nous majorons finalement N par $1+|t|$, et nous montrons que, lorsque $|t| \geq 2$, nous avons

$$\left(1+\frac{\log(|t|+1)}{3}+\frac{4}{3\sigma}\right)\frac{(|t|+1)^{1-\sigma}}{|t|^{1-\sigma}\log|t|} \leq 3(1+\sigma^{-1}) \leq 6/\sigma.$$

$\square$

Exercice 108. *Montrer que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 1^+ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 109. *Montrer que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est convexe pour $s \in]1,+\infty[$.*

Chapitre 9

Transformée de Mellin

Commençons par un petit détour historique. Robert Hjalmar Mellin était un mathématicien finlandais (un élève de Weierstrass) qui a, entre 1880 et 1920, étudié le couple de transformations

$$\begin{cases} \Phi(x) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} dz, \quad (x > 0) \\ F(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} \Phi(x) x^{z-1} dx. \end{cases}$$

Chacune des intégrales en question requiert bien sûr des hypothèses pour converger ! Et dans les bons cas, ces transformations sont inverses l'une de l'autre. Lorsqu'elle existe, la fonction F est dite la transformée de Mellin de Φ et on note $F = M\Phi$.

9.1. Exemples

Avant toute généralités, il nous faut calculer quelques intégrales complexes à titre d'exemples.

Lemme 9.1 *Nous avons, pour $x > 0$ et tout $a > 0$:*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{-s} ds}{s(s+1)} = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Lemme 9.2 *Nous avons, pour $x > 0$ et tout $a > 0$:*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{-s} ds}{s^2} = \begin{cases} -\log x & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Lemme 9.3 *Nous avons, pour $x > 0$ et tout $a > 0$:*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{2x^{-s}ds}{s(s+1)(s+2)} = \begin{cases}(1-x)^2 & si\ x<1\\ 0 & si\ x\geq 1.\end{cases}$$

Démonstration. En effet, si $x \geq 1$, il suffit de déplacer la droite d'intégration vers la droite, en notant que dans ce cas-là, les contributions des pôles doivent être affectées d'un signe $-$ et que les segments horizontaux ne contribuent pas. Cette phrase peut sembler mystérieuse de prime abord, aussi donnons-nous ici une démonstration complète. Tout d'abord l'intégrale sur un chemin infini est la limite de l'intégrale sur un chemin fini :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)} = \lim_{T,T'\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{a-iT}^{a+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)}$$

où s parcourt le segment du bas vers le haut, et où T et T' tendent indépendamment vers l'infini. Nous comparons ensuite l'intégrale sur le segment à

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{A-iT}^{A+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)}$$

pour un $A \geq a$ que l'on prendra grand mais qui est pour l'instant fixé. Cette comparaison se fait en appliquant le théorème des résidus sur le rectangle de sommets $a-iT$, $a-iT'$, $A-iT$ et $A-iT'$. Les intégrales sur les segments horizontaux sont majorées respectivement par A/T^2 et A/T'^2 qui tendent bien vers 0 quand T et T' tendent vers 0. Par ailleurs aucun résidu n'appartient à la zone enclose par le contours, donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-iT}^{2+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)} = \frac{-1}{2i\pi}\int_{A-iT}^{A+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)} + o(1)$$

où ce $o(1)$ tend vers 0 quand T et T' tendent vers l'infini. Ensuite l'intégrale sur $\Re s = A$ est un $\mathcal{O}(x^{-A})$ car

$$\frac{1}{2\pi}\int_{A-iT}^{A+iT'}\left|\frac{ds}{s(s+1)}\right|$$

est majoré indépendamment de T, T' et $A \geq a$. Il suffit alors de laisser tendre A vers l'infini. Procédé que l'on résumera dans la suite par un "on déplace la droite d'intégration vers la droite".

Si $x < 1$, nous déplaçons cette fois-ci la droite d'intégration vers la gauche et rencontrons des contributions polaires en $s = 0$, $s = -1$ et $s = -2$ qui donnent la valeur :

$$1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

comme attendu. Le second lemme se prouve de la même façon. □

EXERCICE 110. *Nous avons pour $x > 0$:*

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{2x^s ds}{s^2(1-s)(2-s)} = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & si\ x < 1 \\ \log x + \frac{3}{2} & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

EXERCICE 111. *Nous avons pour $x > 0$:*

$$\mathfrak{q}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{x^s ds}{s(1-s)(2-s)} = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} & si\ x < 1 \\ 1/2 & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

Le lecteur remarquera que déplacer la droite d'intégration de $\Re s = \frac{1}{2}$ à $\Re s = 3$ changerait la fonction obtenue dans les deux derniers exercices.

EXERCICE 112. *Pour $x > 0$ et $n \geq 1$, montrer que :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{x^{-z}}{z^{n+1}}\,dz = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n!}\log^n x, & si\ x \leq 1, \\ 0, & si\ x > 1. \end{cases}$$

Voici une autre transformation classique (lemme de Cahen-Millen).

Lemme 9.4 *Nous avons pour $x > 0$ et tout $a > 0$:*

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)x^{-s}ds$$

La convergence de l'intégrale du membre de droite est garantie par la formule de Stirling complexe. Celle-ci nous dit en effet que $\Gamma(\frac{1}{2}+it)$ décroît exponentiellement en $|t|$.

Lemme 9.5 (Formule de Stirling complexe) *Soit $\varepsilon \in]0,1]$ fixé, et a un complexe fixé. Nous avons, de façon uniforme dans le domaine $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ et $|z| \geq 1$,*

$$\Gamma(z+a) = \sqrt{2\pi}e^{-z}z^{z+a-1/2}\big(1 + \mathcal{O}(1/|z|)\big).$$

L'uniformité est valable pour a variant dans un compact fixé du plan complexe.

L'uniformité signifie que

$$\max_{\substack{z/|\arg z|\leq\pi-\varepsilon,\\ |z|\geq 1}} |z|\left|\frac{\Gamma(z+a)}{\sqrt{2\pi}e^{-z}z^{z+a-1/2}} - 1\right| < \infty.$$

Ce maximum est une constante, qui peut dépendre de ε et de a (ou du compact dans lequel a varie).

Par ailleurs ce lemme emploie une exponentiation d'un complexe à une puissance complexe et il convient de prendre des précautions. Par exemple l'expression z^z signifie $\exp(z \log z)$ où nous avons juste déplacé le problème à celui de la définition du logarithme ! Le logarithme est défini ici de la façon suivante : si $z = re^{-i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, pi]$, nous avons

$$\log z = \log r + i\theta, \qquad (z = re^{i\theta}, r \geq 0, \theta \in]-\pi, \pi]). \tag{9.1}$$

Démonstration. [Preuve du lemme 9.4] Nous repoussons la droite d'intégration vers gauche. En chaque entier négatif $-n$, la fonction Γ admet un pôle simple de résidu $(-1)^n/n!$ comme le montre par exemple la formule des compléments

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}.$$

Ceci nous donne la contribution $\sum_{n\geq 0}(-x)^n/n! = e^{-x}$ comme attendu. □

Exercice 113. *Rappelons que la fonction Gamma d'Euler est définie par*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}.$$

Cette fonction est holomorphe pour $\Re(s) > 0$.

◇ 1 ◇ *La fonction Gamma d'Euler satisfait l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ (ce qui permet de la prolonger en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier).*

◇ 2 ◇ *Si $\Re(s) > 1$, alors*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} t^s \frac{dt}{t}.$$

9.2. Transformées de Mellin

Illustrons tout d'abord comment nous entendons utiliser les lemmes précédents. Nous pouvons écrire par exemple

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq Q} f_0(q)(1-q/Q) &= \sum_{q\geq 1} f_0(q) \frac{1}{2i\pi} \int_{3-\infty}^{3+i\infty} \frac{(q/Q)^{-s} ds}{s(s+1)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \sum_{q\geq 1} \frac{f_0(q)}{q^s} \frac{Q^s ds}{s(s+1)}\end{aligned}$$

ce qui nous permet de lier l'étude de la somme initiale à celle de la série de Dirichlet $D(f_0, s)$ que nous étudions page 74. Formellement, nous partons d'une fonction f sur $]0, \infty[$ et cherchons à l'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Mf(s) x^{-s} ds. \tag{9.2}$$

Si nous écrivons $s = c + 2i\pi y$ et $x = e^u$, il vient

$$f(e^u) = \int_{-\infty}^{\infty} Mf(c + 2i\pi y) e^{-uc} e^{-2i\pi uy} dy$$

c'est à dire que $Mf(c + 2i\pi y)$ est simplement la transformée de Fourier de $e^{uc} f(e^u)$, i.e.

$$Mf(c + 2i\pi y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^u) e^{uc} e^{2i\pi uy} du$$

soit encore

$$Mf(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \tag{9.3}$$

et l'on nomme Mf la transformée de Mellin de la fonction f. Il s'agit bien sûr d'une argumentation formelle et il convient aussi de s'adresser aux problèmes de convergence mais les exemples donnés aux exercices 110 et 111 montrent que la situation peut être délicate. Nous n'entendons pas ici de rédiger un traité théorique abordant ces problèmes mais de montrer comment atteindre (9.2) et donc comment deviner Mf. Un procédé consiste à utiliser le paramètre c pour garantir la convergence, mais les conditions en 0 et en l'infini sont souvent antagonistes. Il suffit alors de de décomposer f est $f_1 + f_2$, où f_1 est nulle pour $x > 1$ et f_2 nulle pour $x < 1$ et par exemple $f_1(1) = f_2(1) = f(1)/2$. Nous pouvons alors calculer les transformées de Mellin de f_1 et de f_2 mais dans des domaines distincts de s. Si ces fonctions admettent un prolongement dans un domaine commun du plan complexe, alors $Mf_1 + Mf_2$ est le candidat pour Mf.

9.3. Transformation tronquée

La transformée de Mellin de la fonction Y qui vaut 0 sur $]0, 1[$, puis $1/2$ en 1 et 1 ensuite est tout simplement $1/s$. Mais cette transformée ne tend généralement pas suffisamment vite vers 0 dans les bandes verticales et pose des problèmes de convergence. Le mieux est alors d'avoir recours à une transformation tronquée et le matériel nécessaire est contenu dans le lemme suivant :

Lemme 9.6 *Pour $\kappa > 0$ et $x > 0$, nous avons*

$$\left| Y(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{x^s ds}{s} \right| \leq \frac{x^\kappa}{\pi} \min\left(\tfrac{7}{2}, \frac{1}{T|\log x|} \right).$$

La preuve montrera que nous aurions eu la même majoration en prenant n'importe quelle valeur entre 0 et 1 pour $Y(1)$.

Démonstration. Si $x < 1$, nous écrivons pour $K > \kappa$ et tendant vers l'infini :

$$\left(\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} + \int_{\kappa+iT}^{K+iT} + \int_{K+iT}^{K-iT} + \int_{K-iT}^{\kappa-iT}\right) \frac{x^s ds}{s} = 0.$$

La troisième intégrale tend vers 0 quand K tend vers l'infini. Les deux intégrales sur des segments horizontaux sont chacunes majorées par $x^\kappa/(T|\log x|)$. Ce qui nous donne

$$\left|Y(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s}\right| \le \frac{x^\kappa}{\pi T|\log x|} \quad (0 < x < 1).$$

La même majoration a lieu si $x > 1$, ce que nous prouvons en procédant comme précédemment, mais en déplaçant cette fois-ci la droite d'intégration vers la gauche. Ces majorations sont efficaces si $T|\log x|$ est assez grand ; sinon nous écrivons

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s} = x^\kappa \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s} + x^\kappa \int_{-T}^{T} \frac{(x^{it}-1)idt}{\kappa+it}.$$

La première intégrale vaut $2\arctan(T/\kappa) \le \pi$ alors que pour la seconde, nous utilisons

$$\left|\frac{x^{it}-1}{it\log x}\right| = \left|\int_0^1 e^{iut\log x} du\right| \le 1$$

ce qui nous permet de la majorer par $2T|\log x|$ (même si $x = 1$), d'où

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s}\right| \le \frac{x^\kappa}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + T|\log x|\right)$$

ce qui nous suffit si $x < 1$. Si $x > 1$, nous remarquons que

$$1 - \frac{x^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s} = 1 - \frac{x^\kappa}{\pi}\arctan(T/\kappa)$$

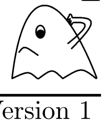
qui est $\ge -x^\kappa/2$ et $\le 1 \le x^\kappa$. En définitive, nous obtenons

$$\left|Y(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s}\right| \le \frac{x^\kappa}{\pi}\min\left(\pi + T|\log x|, \frac{1}{T|\log x|}\right).$$

Nous simplifions cette borne supérieure en remarquant que

$$\min(\pi + u, 1/u) \le \min(\alpha, 1/u)$$

avec $\alpha = 1/u_0 = \pi + u_0$. Comme cela nous donne $\alpha \le 7/2$, le lemme est bien démontré. □



Exercice 115. *Soit s un nombre complexe tel que $\Re s > 1$.*

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que*

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[u]}{u^{s+1}}\,du \quad et \quad \frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{M(u)}{u^{s+1}}\,du$$

où $M(t) = \sum_{n\le t}\mu(n)$.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u^{s+1}}\,du,$$

où $\psi(u) = \sum_{n\le u}\Lambda(n)$.

Indication : *Pour la seconde question, le lecteur pourra appliquer l'opérateur de dérivation logarithmique aux deux membres de la formule énoncée à l'exercice 41.*

Nous déduisons du lemme 9.6 la formule de sommation classique et très utile suivante.

Théorème 9.7 (Formule de Perron tronquée) *Soit $F(s) = \sum_n a_n/n^s$ une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\Re s > \kappa_a$, et soit $\kappa > 0$ strictement plus grand que κ_a. Pour $x \ge 1$ et $T \ge 1$, nous avons*

$$\sum_{n\le x} a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^s ds}{s} + \mathcal{O}^*\left(\int_{1/T}^\infty \sum_{|\log(x/n)|\le u} \frac{|a_n|}{n^\kappa}\frac{2x^\kappa du}{Tu^2}\right).$$

Le mémoire de 1908 du mathématicien allemand Oskar Perron est un point fort de l'histoire des séries de Dirichlet, mais des formules d'inversion apparaissent dès 1859 dans les travaux de Riemann.

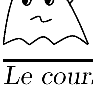
Dans ce théorème, le terme d'erreur est essentiellement inétudié. Il fait toutefois intervenir une majoration des sommes plutôt courtes

$$\sum_{|\log(x/n)|\le u} |a_n|/n^\kappa$$

où l'intervalle en n peut se réécrire $e^{-u}x \le n \le e^u x$. Pour $u \ge 1$, la majoration par $\sum_{n\ge1}|a_n|/n^\kappa$ suffit généralement. Pour u plus petit, nous aurons recours la plupart du temps à une majoration du style $ux^{\kappa_a}B/x^\kappa$ avec un B *raisonnable* (une constante fois $\log x$ par exemple), ce qui résultera en le terme d'erreur

$$\mathcal{O}\left(\frac{Bx^{\kappa_a}\log T}{T} + \frac{x^\kappa}{T}\sum_{n\ge1}|a_n|/n^\kappa\right).$$

Il faut noter que les sommes les plus courtes que nous aurons à considérer sont de taille $\simeq x/T$.



Démonstration. Nous partons de

$$\sum_{n \le x} a_n = \sum_{n \ge 1} a_n Y(x/n) = \sum_{n \ge 1} a_n \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{(x/n)^s ds}{s} + \mathcal{O}^*\left(\sum_{n \ge 1} \frac{|a_n| x^\kappa}{\pi n^\kappa} \min\left(\tfrac{7}{2}, \frac{1}{T|\log(x/n)|} \right) \right)$$

d'après le lemme 9.6. Nous posons $\varepsilon = 1/T$. Pour l'étude du terme d'erreur, commençons par la contribution des entiers n tels que $|\log(x/n)| \le \varepsilon$, contribution que nous gardons telle quelle. Sinon, nous écrivons

$$\sum_{\varepsilon \le |\log(x/n)|} \frac{|a_n| x^\kappa}{n^\kappa |\log(x/n)|} = \sum_{\varepsilon \le |\log(x/n)|} \frac{|a_n| x^\kappa}{n^\kappa} \int_{|\log(x/n)|}^{\infty} \frac{du}{u^2}$$
$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{|\log(x/n)| \le u} \frac{|a_n| x^\kappa}{n^\kappa} \frac{du}{u^2} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{|\log(x/n)| \le \varepsilon} \frac{|a_n| x^\kappa}{n^\kappa} \frac{du}{u^2}$$

ce qui nous suffit. □

Pour à la fois tester la force et illustrer le théorème précédent, essayons de calculer le nombre d'entiers inférieurs à x ... La série génératrice est bien sûr la fonction ζ de Riemann qui vérifie $\kappa_a = 1$. Nous prenons $\kappa = 1 + 1/\log x$ et obtenons un terme d'erreur de $\log(xT)/T$ si $T \le x$. Quant à l'intégrale, nous la déplaçons jusqu'à la droite $\kappa = 0$ où la fonction zeta de Riemann est $\mathcal{O}(\sqrt{|t|+1}\log(|t|+2))$. Cela nous donne finalement

$$\sum_{n \le x} 1 = x + \mathcal{O}\big(\sqrt{T}\log T + x\log(xT)/T\big).$$

En prenant $T = x^{2/3}$, nous obtenons un terme d'erreur de taille ... $x^{1/3}\log x$. Voilà qui permet de se faire une idée de la perte occasionnée par cette technique, puisque nous pouvons ici espérer un terme d'erreur en $\mathcal{O}(1)$. Il est assez facile de récupérer un terme d'erreur en $\mathcal{O}_\varepsilon(x^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ en utilisant un lissage au lieu de la somme tronquée brutalement en $n \le x$.

Toutefois, lorsque nous utilisons cette formule, la perte est généralement compensée par le fait que l'on peut ensuite utiliser des informations sur la transformée de Mellin de la suite de départ.

Lemme 9.8 *Nous avons pour $x > 0$:*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{x^s ds}{s \sin \pi s} = \log(1 + x).$$

Démonstration. Nous distinguons encore selon que x est ou non < 1. Si oui, nous déplaçons la droite d'intégration vers la droite et obtenons le développement en série de $\log(1+x)$. Sinon, nous déplaçons la droite vers la gauche et tenons compte du pôle double en 0 qui contribue pour $\log x$ alors que les autres pôles contribuent comme $\log(1+x^{-1})$. $\square$

9.4. Des formules lissées

Le lecteur vérifiera facilement les deux formules suivantes.

Théorème 9.9 *Soit $F(s) = \sum_n a_n/n^s$ une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\Re s > \kappa_a$, et soit $\kappa > 0$ strictement plus grand que κ_a. Pour $x \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{n \leq x} a_n (1 - n/x)^2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) \frac{2x^s ds}{s(s+1)(s+2)}.$$

Théorème 9.10 *Soit $F(s) = \sum_n a_n/n^s$ une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\Re s > \kappa_a$, et soit $\kappa > 0$ strictement plus grand que κ_a. Pour $x > 0$, nous avons*

$$\sum_{n \geq 1} a_n e^{-n/x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) \Gamma(s) x^s ds.$$

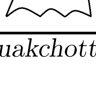
Exercice 116. *Si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ à décroissance rapide à l'infini.*

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que pour $\Re(s) > 0$, la fonction $D(f,s)$ donnée par l'equation suivante*

$$D(f,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(t)\, t^s \frac{dt}{t},$$

admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, alors $D(f,-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.*



$\diamond$ 3 $\diamond$ *Soit*

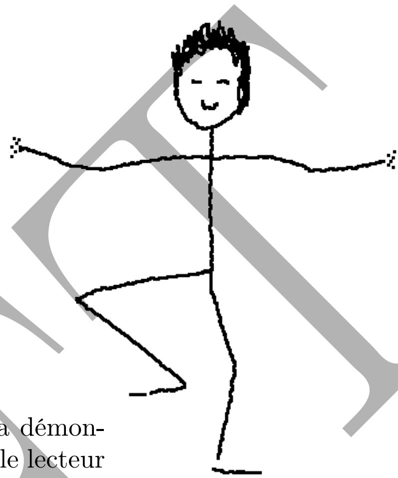
$$f_0(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

Les b_n sont des nombres rationnels appelés nombres de Bernoulli. On a en particulier

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\tfrac{1}{2},\ b_2 = \tfrac{1}{6},\ b_4 = -\tfrac{1}{30}, \cdots,\ b_{12} = -\tfrac{691}{2730},$$

et $b_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$. Montrer que :
a. Pour $n \in \mathbb{Q}$, nous avons $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{b_{n+1}}{n+1}$.
b. Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{b_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}.$$



Chapitre 10

Preuve du théorème $\mathscr{A}$

Revenons-en à la fonction f_0 définie par (0.1). Nous présentons la démonstration avec le maximum de détails dans un premier temps pour que le lecteur puisse vérifier sa compréhension. La preuve en devient longue, mais nous invitons le lecteur à en écrire une preuve plus courte.

Voici la première chose à vérifier :

Étape 1

La fonction f_0 est une fonction multiplicative.

Notre outil principal est le lemme de Gauss, soit le lemme 1.1. Donnons-nous donc m et n deux entiers premiers entre eux. Nous avons donc

$$f_0(mn) = \prod_{p|mn}(p-2).$$

Les nombres premiers p qui divisent le produit mn se séparent, d'après le lemme de Gauss, en deux groupes : ceux qui divisent m et ceux qui divisent n. Ces deux groupes sont distincts puisque tout premier dans l'intersection diviserait le pgcd (m, n) de m et n, lequel vaut 1. Par conséquent

$$f_0(mn) = \prod_{p|m}(p-2)\prod_{p|n}(p-2) = f_0(m)f_0(n)$$

ce que nous voulions démontrer. Qu'en est-il de la condition $f_0(1) = 1$? Dans l'expression $\prod_{p|1}(p-2)$, l'ensemble de nombres premiers du produit est vide, et, par convention, un produit sur un ensemble vide vaut 1.

Étape 2

La série de Dirichlet $D(f_0, s)$ vaut

$$D(f_0, s) = \prod_{p\geq 2}\left(1 + \frac{p-2}{p^s-1}\right).$$

Nous avons, par définition :

$$D(f_0, s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0}\frac{\prod_{\ell|p^k}(\ell-2)}{p^{ks}}.$$

Regardons de plus près chaque facteur. Dans la somme portant sur k, la contribution correspondant à $k = 0$ est exceptionnelle et vaut 1 ; le facteur eulérien en p devient :

$$1 + \sum_{k\geq 1} \frac{\prod_{\ell|p^k}(\ell-2)}{p^{ks}}.$$

Or ℓ et p sont des nombres premiers, ce qui implique que $\ell = p$. Il nous reste

$$\sum_{k\geq 1}(p-2)/p^{ks} = \frac{p-2}{p^s-1}$$

ce que nous avions annoncé.

Étape 3

Nous avons $D(f_0, s) = H(s)\zeta(s-1)$ où

$$H(s) = \prod_{p\geq 2}\left(1 - \frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}\right). \tag{10.1}$$

Ce produit est absolument convergent au sens de Godement dès que $\Re s > 3/2$.

En effet, le produit qui définit $D(f_0, s)$ *ressemble* à $\prod_{p\geq 2}\bigl(1+\frac{1}{p^{s-1}-1}\bigr)$ qui, lui, correspond à $\zeta(s-1)$. Entreprenons par conséquent de sortir ce facteur de notre produit. Nous écrivons

$$\begin{aligned} D(f_0,s) &= \prod_{p\geq 2}\left(1+\frac{p-2}{p^s-1}\right) = \prod_{p\geq 2}\left(1-\frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}\right)\left(\frac{1}{1-1/p^{s-1}}\right) \\ &= H(s)\zeta(s-1) \end{aligned}$$

comme annoncé. Le produit définissant $H(s)$ converge absolument pour les s pour lesquels la série $\sum \frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}$ converge absolument, ce qui a lieu au moins, en étendant cette somme à tous les entiers, pour $\Re s > 3/2$.

Étape 4

La série de Dirichlet $D(f_0, s)$ admet un pôle simple en $s = 2$, de résidu

$$H(2) = \prod_{p\geq 2}\left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right).$$

Lorsque $1 + \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 2$ et t réel tel que $|t| \geq 2$, nous avons

$$|D(f_0, s)| \leq 160|t|^{2-\sigma}\log|t|.$$

Si nous savons juste que $\sigma \geq 7/4$ et que t est réel, nous disposons de $|D(f_0, s)| \leq 20|\zeta(s-1)|$.

En effet, dans le domaine en question, la fonction $H(s)$ se majore (lorsque $s = \sigma + it$) en module par

$$\prod_{p\geq 2}\left(1+\frac{3p+3}{(p^\sigma-1)p^{\sigma-1}}\right) \leq \prod_{p\geq 2}\left(1+\frac{3p+3}{(p^{7/4}-1)p^{3/4}}\right) \leq 20$$

grâce à GP, via le petit script :

```
prodeuler(p=2,300000,1.0+3*(p+1)/(p^(7/4)-1)/p^(3/4))
```

Le lemme 8.2 nous donne alors

$$|D(f_0,s)| \leq \frac{6\cdot 20}{\sigma-1}|t|^{2-\sigma}\log|t|$$

et il est alors facile de conclure puisque $\sigma - 1 \geq 3/4$.

La préparation est terminée, nous pouvons invoquer la formule du théorème 9.10 avec $\kappa = 3$.

Étape 5

Nous avons, lorsque $x \geq 10$

$$\sum_{n\geq 1} f_0(n)e^{-n/x} = \frac{1}{2i\pi}\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} D(f_0,s)\Gamma(s)x^s ds.$$

Nous connaissons plutôt bien la série $D(f_0,s)$ grâce au travail précédent, mais qu'en est-il de la fonction Γ ? Son comportement est réglé par la formule de Stirling complexe (lemme 9.5) et nous engrangeons cela dans l'énoncé qui suit.

Étape 6

Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que, pour tout $1 \leq \sigma \leq 3$ et tout $|t| \geq 1$, nous avons

$$|\Gamma(\sigma+it)| \leq c_2|t|^{\sigma-1/2}e^{-\pi|t|/2}.$$

Nous utilisons le lemme 9.5 avec $a = \sigma$ et $\varepsilon = \pi/2$. Il faut se méfier un peu des exponentielles complexes, et que signifie donc $(it)^{it+\sigma-1/2}$? Tout d'abord, l'expression de la fonction Γ à l'aide d'une intégrale montre que $\Gamma(\sigma - it) = \overline{\Gamma(\sigma+it)}$, tant et si bien qu'il nous suffit de considérer le cas où t est positif, et, ici, plus grand que 1. Posons $b = \sigma - 1/2$ pour simplifier la typographie. Par définition, nous avons

$$(it)^{it+b} = \exp\big((b+it)\log(it)\big)$$

ce qui transfère le problème vers celui de la définition du logarithme sans rien régler ! Mais nous avançons parce que ce logarithme est bien compris : nous avons $\log(it) = \log|it| + i\arg(it) = \log t + i\pi/2$. Comme

$$(b+it)(\log t + i\pi/2) = b\log t - \frac{\pi}{2}t + i(t\log t + b\pi/2)$$

et $|e^z| = e^{\Re z}$, nous avons

$$|\Gamma(\sigma+it)| = \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-1/2}e^{-\pi|t|/2}(1+\mathcal{O}(1/|t|)).$$

Ce qui implique bien ce que nous avons annoncé. En général, nous disons “la fonction Γ admet une décroissance exponentielle dans les bandes verticales”, pour dire que nous utilisons le résultat ci-dessus.

Étape 7

Nous avons, lorsque $x \geq 10$,

$$\sum_{n\geq 1} f_0(n)e^{-n/x} = H(2)x^2 + \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{7}{4}-i\infty}^{\frac{7}{4}+i\infty} D(f_0,s)\Gamma(s)x^s ds.$$

Il suffit de déplacer la droite d'intégration. Le théorème de Cauchy nous garantit que, pour $T \geq 2$ réel, nous avons

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-iT}^{2+iT} D(f_0,s)\Gamma(s)x^s ds + \frac{1}{2i\pi}\int_{2+iT}^{\frac{7}{4}+iT} D(f_0,s)\Gamma(s)x^s ds$$
$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D(f_0,s)\Gamma(s)x^s ds + \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{2-iT} D(f_0,s)\Gamma(s)x^s ds = H(2)x^2$$

puisque le seul pôle de l'intégrand $D(f_0,s)\Gamma(s)x^s$ est en $s=2$: ce pôle est simple et de résidu $H(2)\Gamma(2)x^2 = H(2)x^2$. Nous traitons facilement les intégrales sur les segments horizontaux :

$$\int_{3+iT}^{\frac{7}{4}+iT}\left|D(f_0,s)\Gamma(s)x^s ds\right| \leq 20\int_{\frac{3}{4}}^{3}|\zeta(u+iT)||\Gamma(1+u+iT)|x^3 du$$
$$\leq 20c_2\left(4+\log T + \frac{6}{3/4}T^{1/4}\log T\right)x^3T^{2-1/2}e^{-\pi T/2}$$

En effet, nous avons majoré $\zeta(s-1)$ à l'aide du lemme 8.2 : nous avons additionné la seconde majoration et la troisième pour couvrir tous les cas pour u, soit ≥ 1, soit < 1. La même majoration vaut pour $\int_{\frac{7}{4}-iT}^{2-iT}$, et il nous faut diviser par 2π. Tout cela tend vers 0 quand T tend vers l'infini.

Et voici enfin la dernière pierre à notre édifice :

Étape 8

Nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\frac{7}{4}-i\infty}^{\frac{7}{4}+i\infty} D(f_0,s)\Gamma(s)X^s ds\right| \ll X^{7/4}.$$

Il nous suffit d'écrire

$$\left|\int_{\frac{7}{4}-i\infty}^{\frac{7}{4}+i\infty} D(f_0,s)\Gamma(s)X^s ds\right| \leq X^{7/4}\int_{\frac{7}{4}-i\infty}^{\frac{7}{4}+i\infty}|D(f_0,s)\Gamma(s)||ds|$$

et de remarquer que la dernière intégrale est finie.

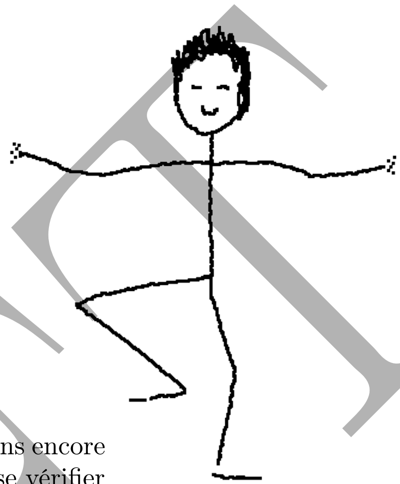
En collectant les différents morceaux, nous avons bien établi le théorème $\mathscr{A}$, soit :

Étape 9

Nous avons
$$\sum_{n \le X} f_0(n) e^{-n/x} = X^2 H(2) + \mathcal{O}\big(X^{7/4}\big).$$

EXERCICE 119. *Montrer en utilisant la même démarche que*
$$\sum_{n \ge 1} \varphi(n) e^{-n/x} = (1 + o(1))\pi^2 x^2/12.$$

EXERCICE 120. *Montrer en utilisant le théorème 9.9 que*
$$\sum_{n \le x} f_0(n)(1 - n/x)^2 = (1 + o(1))\mathscr{C} x^2/6.$$



Chapitre 11

Preuve du théorème $\mathscr{B}$

Nous continuons avec la fonction f_1 définie par (0.2). Nous présentons encore la démonstration avec le maximum de détails pour que le lecteur puisse vérifier sa compréhension. La preuve en devient longue, mais nous invitons la lectrice à en écrire une preuve plus courte.

Voici la première chose à vérifier :

Étape 1

La fonction f_1 est une fonction multiplicative.

Étape 2

La série de Dirichlet $D(f_0, s)$ vaut

$$D(f_1, s) = \prod_{p \geq 2} \biggl(1 + \frac{p+1}{(p+2)(p^s - 1)}\biggr).$$

Nous avons, par définition :

$$D(f_1, s) = \prod_{p \geq 2} \sum_{k \geq 0} \frac{\prod_{\ell | p^k} (\ell+1)/(\ell+2)}{p^{ks}}.$$

Regardons de plus près chaque facteur. Dans la somme portant sur k, la contribution correspondant à $k = 0$ est exceptionnelle et vaut 1 ; le facteur eulérien en p devient :

$$1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\prod_{\ell | p^k} (\ell+1)/(\ell+2)}{p^{ks}}.$$

Or ℓ et p sont des nombres premiers, ce qui implique que $\ell = p$. Il nous reste

$$\sum_{k \geq 1} \frac{p+1}{p+2} / p^{ks} = \frac{p+1}{(p+2)(p^s - 1)}$$

ce que nous avions annoncé.

Étape 3

Nous avons $D(f_1, s) = K(s)\zeta(s)$ où

$$K(s) = \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{(p+2)p^s}\right). \tag{11.1}$$

Ce produit est absolument convergent au sens de Godement dès que $\Re s > 0$.

En effet, le produit qui définit $D(f_1, s)$ *ressemble* à $\prod_{p\geq 2}(1 + \frac{1}{p^s - 1})$ qui, lui, est égal à $\zeta(s)$. Entreprenons par conséquent de sortir ce facteur de notre produit. Nous écrivons

$$\begin{aligned} D(f_1, s) &= \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{p+1}{(p+2)(p^s - 1)}\right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{p+1}{(p+2)(p^s - 1)}\right) \frac{p^s - 1}{p^s} \left(\frac{1}{1 - 1/p^s}\right) = K(s)\zeta(s) \end{aligned}$$

comme annoncé. Le produit définissant $K(s)$ converge absolument pour les s pour lesquels la série $\sum \frac{1}{p^s(p+2)}$ converge absolument, ce qui a lieu au moins, en étendant cette somme à tous les entiers, pour $\Re s > 0$.

Étape 4

La série de Dirichlet $D(f_1, s)$ admet un pôle simple en $s = 1$, de résidu

$$K(1) = \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p(p+2)}\right).$$

Lorsque $1/4 \leq \sigma \leq 2$ et t réel tel que $|t| \geq 2$, nous avons $|D(f_1, s)| \leq 3|\zeta(s)|$.

En effet, dans le domaine en question, la fonction $K(s)$ se majore (lorsque $s = \sigma + it$) en module par

$$\prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{1}{(p+2)p^\sigma}\right) \leq \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{1}{(p+2)p^{1/4}}\right) \leq 2.5$$

grâce à GP (PAR, 2011), via le petit script :

```
prodeuler(p=2,300000,1.0+1/(p+2)/p^(1/4))
```

La préparation est terminée, nous pouvons invoquer la formule du lemme 9.1 avec $a = 2$.

Étape 5

Nous avons, lorsque $x \geq 10$,

$$\sum_{n \geq 1} f_1(n) \left(1 - \frac{n}{X}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} D(f_1, s) \frac{x^s ds}{s(s+1)}.$$

Et voici enfin la dernière pierre à notre édifice :

Étape 6

Nous avons
$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\frac14-i\infty}^{\frac14+i\infty} D(f_1,s)\frac{X^s ds}{s(s+1)}\right| \ll X^{1/4}.$$

Il nous suffit d'écrire
$$\left|\int_{\frac74-i\infty}^{\frac74+i\infty} D(f_1,s)\frac{X^s ds}{s(s+1)}\right| \le X^{1/4}\int_{\frac14-i\infty}^{\frac14+i\infty} |D(f_1,s)|\frac{|ds|}{|s(s+1)|}$$
et de remarquer que la dernière intégrale est finie.

En collectant les différents morceaux, nous avons bien établi le théorème $\mathscr{B}$, soit :

Étape 7

Nous avons
$$\sum_{n\le X} f_1(n)\Big(1-\frac{n}{X}\Big) = \tfrac12 XK(1) + \mathcal{O}\big(X^{1/4}\big).$$

Chapitre 12

Preuves des théorèmes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$

Nous espérons que la lectrice sera suffisamment familière avec le procédé exposé dans les deux leçons précédentes pour voir comment démontrer le théorème suivant :

Théorème $\mathscr{C}$'

Soit X un réel positif. Nous avons

$$\sum_{n\le X} f_0(n)\Big(1-\frac{n}{X}\Big) = \tfrac{1}{6}\mathscr{C}_0 X^2 + \mathcal{O}(X^{7/4}).$$

Nous souhaitons ôter le coefficient $1-n/X$ pour atteindre le théorème $\mathscr{C}$. Nous remarquons la chose suivante, à partir d'un paramètre $L>0$:

$$(X+L)\Big(1-\frac{n}{X+L}\Big) - X\Big(1-\frac{n}{X}\Big) = L$$

et donc

$$\begin{aligned}(X+L)\sum_{n\le X+L} f_0(n)\Big(1-\frac{n}{X+L}\Big) - X\sum_{n\le X} f_0(n)\Big(1-\frac{n}{X+L}\Big)\\ = L\sum_{n\le X} f_0(n) + \mathcal{O}^*\Big(L\sum_{X<n\le X+L} f_0(n)\Big).\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons $f_0(n)\le n$ et par conséquent $\sum_{X<n\le X+L} f_0(n) \le (X+L)(L+1)$. En utilisant le théorème $\mathscr{C}'$ ci-dessus en X et en $X+L$, nous obtenons donc

$$\sum_{n\le X} f_0(n) = \mathscr{C}_0\frac{(X+L)^3 - X^3}{6L} + \mathcal{O}\Big((X+L)^{7/4}L^{-1} + X + L\Big)$$

ce qui nous donne (en supposant $L\le X$)

$$\sum_{n\le X} f_0(n) = \tfrac{1}{2}\mathscr{C}_0 X^2 + \mathcal{O}\Big(X^{7/4}L^{-1} + X + XL\Big).$$

Quel est le meilleur choix pour L ? Nous pouvons par exemple déterminer le minimum en L de la fonction $L \mapsto X^{7/4}L^{-1}+XL$ mais c'est parfois un peu pénible. Voici le raisonnement qui est usuellement tenu : le premier terme ($X^{7/4}L^{-1}$) est décroissant, alors que le second (XL)est croissant. Nous choisissons L quand ces deux courbes se croisent, i.e.

$$X^{7/4}/L = XL,$$

i.e. $L = X^{3/8}$. Du coup $X^{7/4}/L = XL = X^{11/8}$. Comme nous demandons que T soit plus grand que 2, if suffit de prendre $X \geq 10$ (c'est même bien trop fort). Et le théorème $\mathscr{C}$ est alors démontré.

Nous procédons de même en ce qui concerne le théorème $\mathscr{D}$. Cette fois-ci, le théorème $\mathscr{B}$ est bien adapté à nos besoins.

12.1. Retrouver le théorème $\mathscr{A}$ à partir du théorème $\mathscr{C}$

Chapitre 13

Devoirs

Les étudiants doivent se regrouper en groupe de quatre à cinq. Il faut ensuite choisir une fonction f dans la liste de gauche et un poids F dans celle de droite :

a) $\mu^2(n)$,	I) e^{-u},
b) $\varphi(n)/n$,	II) $\mathbb{1}_{u\le 1}(1-u)^2$,
c) $\varphi(n)/\sigma(n)$,	III) ue^{-u},
d) $\mu^2(n)\prod_{p\mid n} p/(p+3)$,	IV) $\mathbb{1}_{u\le 1}\log(1/u)$,
e) $n^2/\sigma(n^2)$,	V) e^{-u^2}.

Une fois cela déterminé, il faut donner un équivalent de la somme

$$S_X(f,F) = \sum_{n\ge 1} f(n)F(n/X) \tag{13.1}$$

lorsque X tend vers l'infini. Pour vous aider, voici une liste de questions.

1 – Montrer que la fonction f est multiplicative et déterminer sa série de Dirichlet $D(f,s)$.

2 – Montrer qu'il existe un réel $\sigma \in]0,1[$ et une série de Dirichlet $H(s)$ telle que $D(f,s) = \zeta(s)H(s)$ et la série de Dirichlet est définie par un produit absolument convergent pour $\Re > \sigma$.

3 – Déterminer une fonction de la variable complexe MF telle que

$$F(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} MF(s)u^{-s}ds$$

pour tout $u > 0$.

4 – Conclure.

La rédaction doit être soignée et les arguments détaillés : cela servira aux étudiants suivants.

Chapitre 14

Exercices

Exercice 121. *Soit d un entier ≥ 1 et N un réel ≥ 0. Montrer que*

$$\Big|\sum_{\substack{n\leq N,\\ (n,d)=1}} \mu(n)/n\Big| \leq 1.$$

Indication : *Soit d' le produit des nombres premiers $\leq N$ qui sont aussi premiers à d. Étudier la quantité $\sum_{n\leq N,(n,d')=1} 1$ en utilisant*

$$\sum_{\substack{\ell|n,\\ \ell|d'}} \mu(\ell) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \mathrm{pgcd}(n,d')=1,\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

On pourra supposer x entier.

Exercice 122. *Montrer que, pour tout entier n, nous avons*

$$\sum_{\substack{d,e\geq 1,\\ [d,e]=n}} \mu(d)\mu(e) = \mu(n).$$

Exercice 123. *Montrer que nous avons*

$$\sum_{d,e\geq 1} \frac{\mu(d)\mu(e)}{[d,e]^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Exercice 124. *Montrer que*

$$\Big|\sum_{d\leq N} \frac{\mu(d)}{d} \log\frac{N}{d}\Big| \ll 1.$$

Indication : *On pourra partir de*

$$\mu \star \log = \Lambda.$$

EXERCICE 125.

◇ 1 ◇ *Montrer que, lorsque* $\alpha \in [0,1[$, *nous avons*

$$\log(1-e(\alpha)) = \sum_{k\geq 1}\frac{e(k\alpha)}{k} = \log(2\sin\pi\alpha) + i\pi(\alpha - \tfrac{1}{2}).$$

(On rappelle que $e(\alpha) = \exp(2i\pi\alpha)$*).*

EXERCICE 126.

◇ 1 ◇ *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1}\mu(n)/n^\sigma$ *est convergente pour* $\sigma \geq 1$ *et représente une fonction continue.*

◇ 2 ◇ *Montrer qu'il existe une constante* $c' > 0$ *telle que, pour tout* $x \geq 2$, *nous avons*

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)/n = \mathcal{O}\big(1/\log x\big).$$

◇ 3 ◇ *Comparer la série de Dirichlet de* $\mu(n)/\varphi(n)$ *à* $1/\zeta(s+1)$ *et montrer qu'il existe une constante* $c'' > 0$ *telle que*

$$\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)} = \mathcal{O}\big(1/\log x\big).$$

INDICATION : *On pourra utiliser la méthode de convolution.*

EXERCICE 127. *Il s'agit de montrer que le nombre d'entiers* $\leq N$ *dont tous les facteurs sont* $\leq N^\varepsilon$ *est* $\gg_\varepsilon N$.
Soit $\epsilon = 1/k$, *où* $k \geq 1$ *est un entier. Soit* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des entiers qui n'ont que des facteurs* $\leq N^\epsilon$. *Et* Z *le nombre d'entre eux qui sont* $\leq N$.

◇ 1 ◇ *En partant de* $Z\log N \geq \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ n\leq N}}\sum_{p|n}\log p$, *montrer que*

$$Z\log N \geq C_6 N \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ N^{1-\epsilon}<n\leq N}} 1/n - C_7 Z$$

pour des constantes strictement positives C_6 *et* C_7.

◇ 2 ◇ *La minoration de la somme de* $1/n$ *pour* n *dans* $\mathcal{S}$ *et dans l'intervalle ci-dessus va suivre le même chemin, mais nécessite une récurrence dont voici l'élément clé : il existe deux constantes* $c_1 = c_1(\epsilon)$ *et* $N_0 = N_0(\epsilon)$ *telles que pour tout* $\ell \in \{0,\ldots,k-1\}$ *et* $N \geq N_0$, *nous avons*

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ 2^\ell N^{1-(\ell+1)/k}<n\leq N^{1-\ell/k}}} 1/n \geq c_1 \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ 2^{\ell+1}N^{1-(\ell+2)/k}<n\leq N^{1-(\ell+1)/k}}} 1/n. \tag{14.1}$$

Montrer cette inégalité.

⋄ 3 ⋄ *En utilisant* (14.1), *montrer par récurrence que*

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ N^{1-1/k}<n\le N}} 1/n \ge c_1^{k-1} \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ 2^{k-1}<n\le N^{1/k}}} 1/n.$$

Cette dernière quantité est $\gg \log N^\epsilon$ *puisque la condition* $n \in \mathcal{S}$ *y est superflue. En conclure que*

$$(\log N + C_7)Z \gg_\epsilon N \log N$$

ce que nous cherchions à démontrer.

Notations

Toutes les notations utilisées sont standards ... d'une façon ou d'une autre ! En voici quelques unes :

— $\|a\|$ désigne la norme L^2, mais $\|u\|$ désigne aussi la distance au plus proche entier.

— $\mathrm{e}(y) = \exp(2i\pi y)$.

— La lettre p pour une variable implique toujours que celle-ci est un nombre premier.

— Nous notons $[d, d']$ le ppcm et (d, d') le pgcd des entiers d et d'.

— $|\mathcal{A}|$ désigne le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}$ et $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ sa fonction caractèristique. Oui, bien sûr, $|s|$ est aussi le module du nombre complexe s.

— $q\|d$ signifie que q divise d de telle sorte que q et d/q soit premiers entre eux. Nous énoncerons : *q divise exactement d.*

— Le *noyau sans facteurs carrés* de $d = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ est $\prod_i p_i$, soit encore le produit de tous les diviseurs premiers de d.

— $\omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d, comptés sans multiplicité.

— $\varphi(d)$ est la fonction d'Euler, c'est à dire le cardinal du groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

— $\sigma(d)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de d.

— $\mu(d)$ est la fonction de Moebius, c'est à dire 0 si d est divisible par un carré > 1 et $(-1)^r$ sinon, où $r = \omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d.

— $c_q(n)$ désigne la somme de Ramanujan sum. Il s'agit de la somme des $\mathrm{e}(an/q)$ sur tous les a modulo q qui sont premiers à q.

— $\Lambda(n)$ est la fonction de van Mangoldt : $\log p$ si n est une puissance du nombre premier p et 0 sinon.

— La notation de Landau $f = \mathcal{O}_A(g)$ signifie qu'il existe une constante B telle que $|f| \le Bg$, constante qui peut dépendre de A. Si nous mettons plusieurs variables en indices, cela signfie tout simplement que la constante implicite B dépend de tous ceux-là.

— La notation $f = \mathcal{O}^*(g)$ signifie que $|f| \le g$, c'est à dire qu'il s'agit d'un $\mathcal{O}$ mais avec une constante implicite égale à 1.

— Nous utiliserons aussi la notation de Vinogradov $f \ll g$ qui signifie $f = \mathcal{O}(g)$. Ces deux notations seront donc pour nous équivalentes (ce n'est pas toujours le cas en général car les notations de Landau font appel à la notion de voisinage d'un point ; en ce sens, il est correct de dire que la notation de Vinogradov correposnd à une version uniforme de la notation de Landau). Nous utiliserons aussi $f \ll_A g$ pour $f = \mathcal{O}_A(g)$.

— La notation $f \star g$ désigne la convolution arithmétique, c'est à dire la fonction h sur les entiers positifs définie par $h(d) = \sum_{q|d} f(q)g(d/q)$.

— π est ... le nombre réel classique qui vaut à peu près $3.141\,5\ldots$! Mais π désigne aussi la fonction de comptage des nombres premiers et $\pi(X)$ est donc le nombre de nombres premiers inférieur ou égaux à X : par exemple $\pi(6) = 3$. Nous éviterons cette notation si possible. Une autre façon de dire la définition ci-dessus consite à écrire $\pi(X) = \sum_{p \le X} 1$.

— Les fonctions de Tchebyschev ϑ et ψ valent respectivement $\vartheta(X) = \sum_{p \le X} \log p$ et $\psi(X) = \sum_{n \le X} \Lambda(n)$. Ces deux fonctions sont très proches l'une de l'autre.

References

2011. *PARI/GP, version* `2.5.2`. The PARI Group, Bordeaux. `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

Apostol, T.M. 1976. *Introduction to analytic number theory.* New York : Springer-Verlag. Undergraduate Texts in Mathematics.

Bateman, P.T., & Diamond, H.G. 2004. *Analytic number theory.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. An introductory course.

Bombieri, E. 1987/1974. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. *Astérisque*, **18**, 103pp.

Bordellès, O. 2006. An inequality for the class number. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **7**(3), Article 87, 8 pp. (electronic).

Bordellès, O. 2012. *Arithmetic Tales.* Springer.

Cahen, E. 1894. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__75_0`.

Daboussi, H. 1989. On a convolution method. *Pages 110–137 of : Proceedings of the Congress on Number Theory (Spanish) (Zarauz, 1984).* Bilbao : Univ. País Vasco-Euskal Herriko Unib.

Daboussi, H. 1996. Effective estimates of exponential sums over primes. *Analytic number theory. Vol. 1. Proceedings of a conference in honor of Heini Halberstam, May 16-20, 1995, Urbana, IL, USA. Boston, MA: Birkhaeuser. Prog. Math.*, **138**, 231–244.

Daboussi, H., & Rivat, J. 2001. Explicit upper bounds for exponential sums over primes. *Math. Comp.*, **70**(233), 431–447.

Davenport, H. 2000. *Multiplicative Number Theory.* third edition edn. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag.

de la Vallée-Poussin, Ch. 1899. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Belg. Mém. cour. in* 8°, **LIX**, 74pp.

Dirichlet, P.G.L. 1837. Beweis des Satzes, das jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. *Abhandlungen der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Scan de l'article original : `http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=07-abh/1837&seite:int=00000286` et traduction : `http://arxiv.org/abs/0808.1408`.

Dress, F. 1983/84. Théorèmes d'oscillations et fonction de Möbius. *Sémin. Théor. Nombres, Univ. Bordeaux I*, **Exp. No 33**, 33pp. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002545454`.

Ellison, W.J. 1975. *Les nombres premiers.* Paris : Hermann. En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

Euclid. 300 BC. *Elements, Book VII.* http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0086%3Abook%3D7%3Atype%3DProp%3Anumber%3D30.

Granville, A., & Soundararajan, K. 2001. The spectrum of multiplicative functions. *Ann. of Math. (2)*, **153**(2), 407–470.

Halberstam, H., & Richert, H.E. 1974. Sieve methods. *Academic Press (London)*, 364pp.

Hardy, G. H., & Riesz, M. 1964. *The general theory of Dirichlet's series.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Stechert-Hafner, Inc., New York. Première édition en 1915.

Hewitt, E., & Williamson, J.H. 1957. Note on absolutely convergent Dirichlet series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**, 863–868.

Kahane, J.-P., & Queffélec, H. 1997. Ordre, convergence et sommabilité de produits de séries de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **47**(2), 485–529. http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_485_0.

Lejeune-Dirichlet, P.G. 1871. *Lectures on Number Theory, edited by R. Dedekind. Second edition. (Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind. Zweite Auflage.).* Braunschweig. Vieweg . Première édition en 1863.

Montgomery, H.L., & Vaughan, R.C. 2006. *Multiplicative Number Theory : I. Classical Theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97. Cambridge University Press.

Queffélec, H., & Queffélec, M. 2013. *Diophantine Approximation and Dirichlet Series.* Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes, vol. 2. Hindustan Book Agency.

Ramaré, O. 1995. On Snirel'man's constant. *Ann. Scu. Norm. Pisa*, **21**, 645–706. http://math.univ-lille1.fr/~ramare/Maths/Article.pdf.

Riemann, B. 1859. Üeber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.*

Riesel, H., & Vaughan, R.C. 1983. On sums of primes. *Arkiv för mathematik*, **21**, 45–74.

Rosser, J.B., & Schoenfeld, L. 1962. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, **6**, 64–94.

Tenenbaum, G. 1995. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Second edn. Cours Spécialisés, vol. 1. Paris : Société Mathématique de France.

Vinogradov, I. M. 1954. *Elements of number theory.* New York : Dover Publications Inc. Translated by S. Kravetz.

Index