Exercice K

Solution proposée par Khaddad Mahfoudh Moctar

5 décembre 2012

Exercice K. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme* $4m + 3$.

Indication : *On pourra montrer que l'entier* $4 \cdot n! + 3$ *admet au moins un facteur premier* $\equiv 3[4]$.

Pour démontrer cet énoncé, on utilisera le lemme suivant : pour tout couple d'entiers m et m', on a $(4m + 1)(4m' + 1) = 4M + 1$ avec $M = 4mm' + m + m'$. Par conséquent, un produit d'un nombre quelconque d'entiers $\equiv 1[4]$ est encore $\equiv 1[4]$.

Nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers, c'est à dire qu'il existe p_k qui est le plus grand de nombres premiers qui sont de la forme $\equiv 3[4]$. Soit donc $4 \cdot p_k! + 3 = \prod_i q_i^{\alpha_i}$, sa décomposition en facteurs premiers. Le membre de gauche est de la forme $4m + 3$ et le second ne peut pas être un produit d'entiers de la forme $4m' + 1$ d'après le lemme du début. Il existe donc nécessairement un $q_r > 3$ de la forme $4n + 3$. Or l'existence d'un tel q_r est une contradiction : si $q_r \leq p_k$, alors $q_r | 4 \cdot p_k!$ et donc $q_r | 3$. Donc $q_r > p_k$ ce qui est contradictoire avec la définition de p_k.