Exercice L

Solution proposée par Roukoy Ahmedouvall

24 décembre 2012

Exercice L. *Montrer que*

$$-\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} \geq 0$$

en utilisant $\log = \Lambda \star \mathbb{1}$.

Nous avons

$$\log d = \sum_{d_1|d} \Lambda(d_1)$$

et donc

$$\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} = \sum_{d|q} \frac{\mu(d)\sum_{d_1|d}\Lambda(d_1)}{d} = \sum_{d_1|q} \Lambda(d_1) \sum_{d_1|d|q} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Comme $\mu(d) = 0$ si d admet un facteur carré, nous pouvons ajouter la condition d sans facteurs carrés. Et comme d_1 divise d, il est aussi sans fateurs carrés. Les d_1 sans facteurs carrés tels que $\Lambda(d_1) \neq 0$ sont les nombres premiers. Il vient donc

$$\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} = \sum_{p|q} \log p \sum_{p|d|q} \frac{\mu(d)}{d}.$$

On a $d = p\ell$ où ℓ est premier à p. Bref

$$\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} = \sum_{p|q} \log p \sum_{\substack{\ell|q/p,\\ pgcd(\ell,p)=1}} \frac{-\mu(\ell)}{p\ell}.$$

Par ailleurs, p étant fixé,

$$\sum_{\substack{\ell|q/p,\\ pgcd(\ell,p)=1}} \frac{\mu(\ell)}{\ell} = \sum_{\ell|q_1} \frac{\mu(\ell)}{\ell}$$

où q_1 est le plus grand diviseur de q qui est premier à p. On reconnaît alors $\phi(q_1)/q_1$, i.e.

$$\sum_{\substack{\ell | q/p, \\ pgcd(\ell,p)=1}} \frac{\mu(\ell)}{\ell} = \frac{\phi(q_1)}{q_1} = \frac{\phi(q)}{q}\frac{p}{p-1}.$$

En définitive, cela nous donne

$$\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} = -\sum_{p|q} \frac{\log p}{p}\frac{p}{p-1}\frac{\phi(q)}{q}$$

qui est bien négatif.