Exercice J

Solution proposée par Mohamedcheikh ould Mohamedabdellahi &

5 décembre 2012

Exercice J.

◇ 1 ◇ *Montrer que, pour* $\Re s > 1$, *on a* $-\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n)/n^s$.

◇ 2 ◇ *Montrer que, pour* $\Re s > 1$, *on a* $\log \zeta(s) = \sum_{n\geq 2} \Lambda(n)/(n^s \log n)$.

1 – Nous avons pour s réel > 1

$$\zeta(s) = \prod_{p\geq 2} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

d'où

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\geq 2} -\log\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big).$$

En dérivant, cela nous donne

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p\geq 2} \frac{\log p}{p^s\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)}$$

et comme

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

nous arrivons à

$$\frac{1}{p^s\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)} = \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_{p\geq 2}(\log p)\Big(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\Big)\\ &= -\sum_{\substack{p\geq 2,\\ \nu\geq 1}}\frac{\log p}{p^{\nu s}} = -\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.\end{aligned}$$

Nous avons montré que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

2 – Nous intégrons la relation précédente :

$$\int_s^A -\frac{\zeta'(k)}{\zeta(k)}dk = \int_s^A \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^k}dk$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\big[-\log\zeta(k)\big]_s^A &= \int_s^A \sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^k}dk\big[-\log\zeta(k)\big]_s^A\\ \log\zeta(s)-\log\zeta(A) &= \sum_{n\geq 2}\Lambda(n)\int_s^A\sum_{n\geq 2}\frac{dk}{n^k}\\ &= \sum_{n\geq 2}\Lambda(n)\int_s^A\sum_{n\geq 2}e^{-k\log n}dk = \sum_{n\geq 2}\Lambda(n)\Big[\frac{-n^{-k}}{\ln n}\Big]_s^A.\end{aligned}$$

En réécrivant ce qui précède nous obtenons

$$\log\zeta(s)-\log\zeta(A) = -\sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^A\ln n}+\sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^s\ln n}.$$

Nous écrivons maintenant

$$\sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^A\ln n}\leq\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^A}\leq\int_1^\infty\frac{dt}{t^A}=\frac{1}{A-1}$$

et donc, lorsque A tend vers l'infini, nous avons

$$\sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^A\ln n}\to 0.$$

Nous montrons aussi que $\zeta(A)\to 1$ et donc

$$\log\zeta(s) = \sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^s\ln n}.$$