Exercice I

Solution proposée par Mohamed Haye ould Mohamed

4 décembre 2012

EXERCICE I. *Montrer que*

$$\sum_{n\leq x}\{x/n\} = (1-\gamma)x + \mathcal{O}(\sqrt{x})$$

où $\{y\}$ *est la partie fractionnaire de* y*.*

Nous partons de

$$\sum_{n\leq x}\left\{\frac{x}{n}\right\} = \sum_{n\leq x}\frac{x}{n} - \sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right].$$

Que vaut $\sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]$? Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} d(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} 1\\ &= \sum_{d\leq x}\sum_{\substack{n\leq x,\\ d|n}} 1 = \sum_{d\leq x}\sum_{m\leq x/d} 1\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n\leq x} d(n) = \sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right].$$

On rappelle que

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x + (2\gamma-1)x + \mathcal{O}(\sqrt{x}).$$

On a par conséquent que

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\Big\{\frac{x}{n}\Big\} &= x\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\sum_{n\le x}\Big[\frac{x}{n}\Big]\\ &= x\Big(\ln x+\gamma+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\\ &\ -x\ln x-2\gamma x+x+\mathcal{O}(\sqrt{x})\\ &= (1-\gamma)x+\mathcal{O}(\sqrt{x})\end{aligned}$$

d'où le résultat.