Exercice H

Solution proposée par Mounaya Mint Abdati

5 décembre 2012

Exercice H. *Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel $X \geq 1$, on a*

$$\sum_{n \leq X} \big(\log(X/n)\big)^k \ll X.$$

On a que

$$\frac{d}{dt}\Big(\log\frac{x}{t}\Big)^k = \frac{-k}{t}\Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1}$$

ce qui nous donne

$$\Big(\log\frac{x}{n}\Big)^k = \int_n^x \frac{k}{t}\Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1} dt.$$

Tout cela nous prépare à une sommation par parties :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x}\Big(\log\frac{x}{n}\Big)^k &= \sum_{n \leq x}\int_n^x \frac{k}{t}\Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1} dt \\
&= \int_1^x \big(\sum_{n \leq t} 1\big)\frac{k}{t}\Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1} dt \\
&= \int_1^x [t]\frac{k}{t}\Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1} dt.
\end{aligned}$$

Mais $[t] \leq t$ et donc

$$\sum_{n \leq x}\Big(\log\frac{x}{n}\Big)^k \leq k\int_1^x \Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1} dt = I.$$

Par un changement de variables

$$y = \frac{x}{t} \qquad \begin{cases} t = 1 & \text{correspond à } y = x, \\ t = x & \text{correspond à } y = 1. \end{cases}$$

Cela nous donne
$$I = k\int_x^1 -\frac{1}{y^2}\big(\log y\big)^{k-1}dy.$$
Nous procédons à un autre changement de variables :
$$y = e^u, \quad dy = e^u du \quad \begin{cases} y = 1 & \text{correspond à } t = 0, \\ y = x & \text{correspond à } t = \log x. \end{cases}$$
Donc
$$I = kx\int_0^{\log x} t^{k-1}e^{-t}dt \leq kx\Gamma(k) = kx(k-1)! = k!x.$$
Par conséquent
$$\sum_{n\leq x}\Big(\log\frac{x}{n}\Big)^k \leq k!x$$
pour tout $k \geq 1$ d'où le résultat.