Exercice G

Solution proposée par Amadou Mamadou Ba

5 décembre 2012

Exercice G.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que, pour tout réel* $\sigma > 1$, *on a* $1/(\sigma-1) < \zeta(\sigma) < \sigma/(\sigma-1)$.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que, pour* $\sigma > 1$, *on a* $\zeta(\sigma) = (\sigma-1)^{-1} + \gamma + O(\sigma-1)$.

1 – Montrons que pour $\sigma > 1$, on a

$$\frac{1}{\sigma-1} < \zeta(\sigma) < \frac{\sigma}{\sigma-1}.$$

Nous partons de $\zeta(\sigma) = \sum_{n\geq 1} 1/n^\sigma$. On a

$$\zeta(\sigma) = 1 + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sigma} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1}} = 1 + \frac{1}{\sigma-1} = \frac{\sigma}{\sigma-1}.$$

Donc $\zeta(\sigma) \leq \sigma/(\sigma-1)$. Par aileurs on a aussi

$$\begin{aligned}\zeta(\sigma) &= \frac{\sigma}{\sigma-1} - \sigma\int_1^\infty \{t\}\frac{dt}{t^{\sigma+1}}\\ &= \frac{1}{\sigma-1} + 1 - \sigma\int_1^\infty \{t\}\frac{dt}{t^{\sigma+1}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\zeta(\sigma) - \frac{1}{\sigma-1} = 1 - \sigma\int_1^\infty \{t\}\frac{dt}{t^{\sigma+1}} > 1 - \sigma\int_1^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1}}$$

car $\{t\} < 1$. Comme

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1}} = \int_1^\infty t^{-\sigma-1}dt = \frac{-1}{\sigma}[t^{-\sigma}]_1^\infty = \frac{1}{\sigma},$$

cela établit que

$$\zeta(\sigma) - \frac{1}{\sigma-1} \geq 1 - \sigma\frac{1}{\sigma} = 0$$

et par conséquent $\zeta(\sigma) \geq 1/(\sigma-1)$.

2 – Montrons que pour $\sigma > 1$, on a

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1} + \gamma + O(\sigma-1).$$

Nous écrivons

$$\begin{aligned}
\zeta(\sigma) &= \frac{\sigma}{\sigma-1} - \sigma \int_1^\infty \{t\} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \\
&= \frac{1}{\sigma-1} + 1 - \int_1^\infty \{t\} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} - (\sigma-1) \int_1^\infty \{t\} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \\
&= \frac{1}{\sigma-1} + 1 - \int_1^\infty \{t\} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} + \int_1^\infty \{t\} \Big(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^{\sigma+1}}\Big) dt + O(\sigma-1) \\
&= \frac{1}{\sigma-1} + \gamma + \int_1^\infty \{t\} \Big(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^{\sigma+1}}\Big) dt + O(\sigma-1).
\end{aligned}$$

Comme

$$t^{\sigma-1} - 1 = (\log t) \int_0^{\sigma-1} t^u du \leq (\sigma-1)(\log t) t^{\sigma-1}$$

donc

$$\int_1^\infty \{t\} \frac{t^{\sigma-1}-1}{t^{\sigma+1}} dt \leq (\sigma-1) \int_1^\infty (\log t) \frac{t^{\sigma-1}}{t^{\sigma+1}} dt \leq (\sigma-1) \int_1^\infty (\log t) dt/t^2$$

et par conséquent

$$\int_1^\infty \{t\} \frac{t^{\sigma-1}-1}{t^{\sigma+1}} dt = O(\sigma-1).$$

Nous avons bien montré que

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1} + \gamma + O(\sigma-1).$$