Exercice F

Solution proposée par Zeinebou Mint Mohamed ould Iyahi

24 décembre 2012

EXERCICE F. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à n associe $2^{\omega(n)}$ en fonction de la fonction ζ de Riemann.*

La série de Dirichlet de f est

$$D(f,s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

On a ici $f(n) = 2^{\omega(n)}$ et donc $f(p^k) = 2^{\omega(p^k)}$. Or on a $\omega(p^k) = 1$ *si* $k \geq 1$. Par conséquent

$$D(f,s) = \prod_{p\geq 2}\Big(1 + \sum_{k\geq 1}\frac{2}{p^{ks}}\Big).$$

Il vient

$$\begin{aligned}
D(f,s) &= \prod_{p\geq 2}\Big(1 + \frac{2}{p^s}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\Big)\\
&= \prod_{p\geq 2}\Big(1 + \frac{2}{p^s-1}\Big) = \prod_{p\geq 2}\frac{p^s+1}{p^s-1} = \prod_{p\geq 2}\frac{p^{2s}-1}{(p^s-1)^2}\\
&= \prod_{p\geq 2}\frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{(1-1/p^s)^2} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}
\end{aligned}$$

et donc

$$D(2^{\omega(n)}, s) = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}.$$