Exercice L

Solution proposée par Mouhamed Elfadedh Moulayezein

24 décembre 2012

Exercice L. *Montrer que*

1. $D(\varphi, s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$.
2. $D(\lambda, s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$.
3. $D(\mu^2, s) = \zeta(s)/\zeta(2s)$.

Nous avons

$$D(\varphi, s) = \prod_{p\geq 2} \sum_{k\geq 0} \frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}$$

avec $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ et $\varphi(1) = 1$. Il vient

$$\begin{aligned}
D(\varphi, s) &= \prod_{p\geq 2} \Big(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}\Big) = \prod_{p\geq 2} \Big(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{p^{k-1}(p-1)}{p^{ks}}\Big) \\
&= \prod_{p\geq 2} \Big(1 + \frac{p-1}{p} \sum_{k\geq 1} \frac{p^k}{p^{ks}}\Big) = \prod_{p\geq 2} \Big(1 + \frac{p-1}{p} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{p^{k(s-1)}}\Big) \\
&= \prod_{p\geq 2} \Big(1 + \frac{p-1}{p} \frac{1}{p^{s-1}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\Big) = \prod_{p\geq 2} \Big(1 + \frac{p-1}{p} \frac{1}{p^{s-1}-1}\Big) \\
&= \prod_{p\geq 2} \frac{p^s-1}{p^s-p}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\zeta(s-1) = \prod_{p\geq 2} \frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^{s-1}}{p^{s-1}-1}$$

et

$$\zeta(s) = \prod_{p\geq 2} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^s}{p^s-1}.$$

Par conséquent

$$\frac{zeta(s+1)}{\zeta(s)} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^{s-1}}{p^{s-1}-1}\frac{p^s-1}{p^s} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^s-1}{p(p^{s-1}-1)} = D(\varphi, s)$$

comme espéré.

La fonction de Liouville λ est définie sur les puissances de nombres premiers par $\lambda(p^k) = (-1)^k$. Cette expression est aussi valable pour $k = 0$. Donc

$$\begin{aligned} D(\lambda, s) &= \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda(p^k)}{p^{ks}} = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{p^{ks}} \\ &= \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0} \left(\frac{-1}{p^s}\right)^k = \prod_{p\geq 2} \frac{1}{1+\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^s}{p^s+1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^{2s}}{p^{2s}-1}\frac{p^s-1}{p^s} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^s}{p^s+1}.$$

Et donc

$$D(\lambda, s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

comme demandé.

$$D(\mu^2, s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0} \frac{\mu^2(p^k)}{p^{ks}} = \prod_{p\geq 2}\Big(1+\frac{1}{p^s}\Big) = \prod_{p\geq 2} \frac{p^s+1}{p^s}.$$

Nous venons de montrer que

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_{p\geq 2} \frac{p^s+1}{p^s}$$

et par conséquent

$$D(\mu^2, s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$