Exercice E

Solution proposée par Mohamed Abdellahi ould Elghadi

24 décembre 2012

EXERCICE E.

◇ 1 ◇ *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$n^{n+1}/\zeta(n+1) \leq \varphi(n)\sigma(n^n) \leq n^{n+1}.$$

◇ 2 ◇ *Déterminer si la série*

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{n}{\varphi(n)} - \frac{\sigma(n^n)}{n^n}\Big)$$

est convergente ou pas.

Nous avons

$$\sigma(m) = \prod_{p^\alpha \| m} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

et donc

$$\sigma(n^n) = \prod_{p^\alpha \| n} \frac{p^{n\alpha+1}-1}{p-1}. \tag{1}$$

De même

$$\varphi(n) = \prod_{p^\alpha \| n} p^{\alpha-1}(p-1). \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(n)\sigma(n^n) &= \prod_{p^\alpha \| n} \frac{p^{n\alpha+1}-1}{p-1}p^{\alpha-1}(p-1) = \prod_{p^\alpha \| n}\big(p^{(n+1)\alpha} - p^{\alpha-1}\big)\\ &\leq \prod_{p^\alpha \| n} p^{(n+1)\alpha} = \prod_{p^\alpha \| n} (p^\alpha)^{n+1} = n^{n+1}.\end{aligned}$$

Ce qui établit la première inégalité. La formule ci-dessus nous permet d'écrire aussi
$$\frac{\varphi(n)\sigma(n^n)}{n^{n+1}} = \prod_{p^\alpha \| n} \frac{p^{(n+1)\alpha} - p^{\alpha-1}}{p^{(n+1)\alpha}} = \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha n+1}}\right).$$
Comme $\alpha \geq 1$, nous avons, pour tout premier p :
$$1 - \frac{1}{p^{\alpha n+1}} \geq 1 - \frac{1}{p^{n+1}}.$$
De plus, comme $1 - p^{-n-1} \leq 1$, nous avons
$$\frac{\varphi(n)\sigma(n^n)}{n^{n+1}} \geq \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^{n+1}}\right) = \frac{1}{\zeta(n+1)}.$$
Ceci montre que
$$\frac{n^{n+1}}{\zeta(n+1)} \leq \varphi(n)\sigma(n^n)$$
comme demandé.

Déterminons si la série
$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{\varphi(n)} - \frac{\sigma(n^n)}{n^n}\right)$$
est convergente ou non. D'après la première question, on a
$$\frac{n^{n+1}}{\zeta(n+1)} \leq \varphi(n)\sigma(n^n) \leq n^{n+1}$$
que l'on inverse pour obtenir
$$\frac{1}{n^{n+1}} \leq \frac{1}{\varphi(n)\sigma(n^n)} \leq \frac{\zeta(n+1)}{n^{n+1}}.$$
On multiplie par $n\sigma(n^n)$ et on obtient
$$\frac{\sigma(n^n)}{n^n} \leq \frac{n}{\varphi(n)} \leq \frac{\sigma(n^n)\zeta(n+1)}{n^n}. \tag{*}$$
Nous posons
$$\beta_n = \frac{n}{\varphi(n)} - \frac{\sigma(n^n)}{n^n}. \tag{3}$$

La double inégalité $(*)$ montre déjà que $\beta_n \geq 0$. Par ailleurs elle montre aussi que
$$\beta_n \leq \frac{\sigma(n^n)}{n^n}(\zeta(n+1)-1) \leq \frac{n}{\varphi(n)}(\zeta(n+1)-1).$$
Montrons que $\zeta(n+1)-1 \leq 2/2^n$. En effet

$$\begin{aligned}\zeta(n+1)-1 &= \sum_{m\geq 2}\frac{1}{m^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{m\geq 3}\frac{1}{m^{n+1}}\\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \int_{3-1}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}\end{aligned}$$

en utilisant une comparaison à une intégrale. Comme

$$\int_2^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} = \left[\frac{1}{-nt^n}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{n2^n}$$

d'où
$$\zeta(n+1)-1 \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{n2^n} \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{2^n}.$$
Avec ce que nous avons déjà montré, cela nous donne

$$\beta_n \leq \frac{n}{\varphi(n)}\frac{2}{2^n} \leq \frac{2n}{2^n}.$$

Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{2n}{2^n}$ est convergente. Donc la série des β_n est elle aussi convergente.