Exercice D

Solution proposée par Sid'Ahmed ould Abe

5 décembre 2012

Exercice D. *Montrer que, pour tout* $n \geq 1$, *on a* $\sum_{m|n} d(m)^3 = \left(\sum_{m|n} d(m)\right)^2$.

Les deux fonctions $m \mapsto d(m)^3$ et $m \mapsto d(m)$ sont toutes les deux des fonctions multiplicatives. Par conséquent $\sum_{m|n} d(m)^3$ et $\left(\sum_{m|n} d(m)\right)^2$ sont deux fonctions multiplicatives. Il suffit par conséquent de vérifier l'égalité proposée pour $m = p^\nu$. Or

$$\sum_{p^k|p^\nu} d(p^k)^3 = \sum_{0\leq k\leq \nu} (k+1)^3 = \frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2}{4}$$

d'après une résultat classique. Par ailleurs

$$\left(\sum_{p^k|p^\nu} d(p^k)\right)^2 = \left(\sum_{0\leq k\leq \nu} (k+1)\right)^2 = \left(\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\right)^2.$$

Ainsi

$$\sum_{m|n} d(m)^3 = \left(\sum_{m|n} d(m)\right)^2.$$