Exercice B

Solution proposée par Mohamed Mourad Sidina

24 décembre 2012

Exercice B. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\varphi(n) \geq \sqrt{n/2}$.*

Rappelons que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto \operatorname{card}\{m \in \mathbb{N}^*, m \leq n \text{ et } m \text{ premier à } n\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $n = \prod_{i=1}^{q} p_i^{k_i}$ alors $\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{q}(1 - \frac{1}{p_i})$. Donc, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} &= \prod_{i=1}^{q} \frac{p^{k_i/2}}{p_i^{k_1-1}(p_i-1)} \leq \prod_{i=1}^{q} \max_{k\geq 1} \frac{1}{p_i^{k/2-1}(p_i-1)} \\ &\leq \prod_{i=1}^{q} \max_{k\geq 1}\Big(1, \frac{1}{p_i^{k/2-1}(p_i-1)}\Big) \leq \prod_{p\geq 2} \max_{k\geq 1}\Big(1, \frac{1}{p^{k/2-1}(p-1)}\Big) \end{aligned}$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers. Pour quelles valeurs de p et k a-t-on

$$1 \overset{?}{\leq} \frac{1}{p^{k/2-1}(p-1)}$$

Si $k \geq 2$, on a $p^{k/2-1}(p-1) \geq p^0(p-1) \geq 1$. Nous pouvons donc nous restreindre à $k = 1$, i.e.

$$\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} \leq \prod_{p\geq 2} \max\Big(1, \frac{1}{(p-1)/\sqrt{p}}\Big)$$

Maintenant la fonction

$$f(p) = (p-1)/\sqrt{p} = \sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}$$

admet pour dérivée $\frac{1}{2p^{3/2}}(p+1)$ qui est donc positif. Or $f(2) = 1/\sqrt{2} < 1$ et $f(3) = 2/\sqrt{3} > 1$. Donc $f(p) > 1$ pour tous $p \geq 3$. Bref,

$$\max\Big(1, \frac{1}{(2-1)/\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}$$

et, pour $p \geq 3$,

$$\max\Big(1, \frac{1}{(p-1)/\sqrt{p}}\Big) = 1.$$

En conséquence,

$$\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} \leq \sqrt{2}$$

comme demandé.