Exercice A

Solution proposée par Mane Sourie
& Aïchatou mint Brahim
& Jemila mint Mohamed Mohamed

24 décembre 2012

Exercice A. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, nous avons $d(n) \leq 4\,n^{1/3}$.*

L'énonce initial contenait une erreur, ce qui n'a pas simplifié notre tâche !

Rappelons que,

$$d(n) = \prod_i (1+\alpha_i) \quad \text{dès que} \quad n = \prod_i p^{\alpha_i}.$$

Cela nous donne donc

$$\frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}} = \prod_i \frac{1+\alpha_i}{p^{\alpha_i/3}}.$$

Nous en déduisons que

$$\frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}} \leq \prod_{p\geq 2} \max_{\alpha\geq 1}\Big(1, \frac{1+\alpha}{p^{\alpha/3}}\Big).$$

Démonstration. En effet, nous avons

$$\frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}} = \prod_i \frac{1+\alpha_i}{p^{\alpha_i/3}} \leq \prod_i \max_{\alpha\geq 1}\Big(1, \frac{1+\alpha}{p^{\alpha/3}}\Big).$$

Le produit est pris sur les nombres premiers p_i, mais comme chaque facteur est ≥ 1, nous pouvons étendre ce produit à tous les nombres premiers. C'est ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Nous montrons maintenant que, pour beaucoup de p et de α, nous avons $(1+\alpha)/p^{\alpha/3} \geq 1$. C'est assez long. Pour chaque nombre premier p, nous considérons

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$
$$x \mapsto f(x) = p^{x/3} - x - 1.$$

Nous avons

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{x(\log p)/3} - x - 1\right) = +\infty$$

1. **Lorsque** $p = 2$, nous avons $f'(x) = \frac{1}{3}(\log 2)2^{x/3} - 1$. Par conséquent, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 3\log(3/\log 2)/\log 2 = x_2 = 6.34\cdots$. Voici le tableau de variations :

x	$-\infty$	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$-3.01\cdots$	↗ $+\infty$

Nous calculons des valeurs

$$f(10) = -0.9\cdots < 0, \quad f(11) = 0.69\cdots > 0$$

et donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 11$. Par ailleurs

$$\frac{d(2)}{\sqrt[3]{2}} = 1.58\cdots, \quad \frac{d(2^2)}{\sqrt[3]{2^2}} = 1.88\cdots, \quad \frac{d(2^3)}{\sqrt[3]{2^3}} = 2,$$
$$\frac{d(2^4)}{\sqrt[3]{2^4}} = 1.98\cdots, \quad \frac{d(2^5)}{\sqrt[3]{2^5}} = 1.88\cdots, \quad \frac{d(2^6)}{\sqrt[3]{2^6}} = 1.75\cdots,$$
$$\frac{d(2^7)}{\sqrt[3]{2^7}} = 1.58\cdots, \quad \frac{d(2^8)}{\sqrt[3]{2^8}} = 1.41\cdots, \quad \frac{d(2^9)}{\sqrt[3]{2^9}} = 1.25\cdots,$$
$$\frac{d(2^{10})}{\sqrt[3]{2^{10}}} = 1.09\cdots, \quad \frac{d(2^{11})}{\sqrt[3]{2^{11}}} = 0.94\cdots$$

Nous avons donc montré que

$$\max_{\alpha\geq 1}\left(1, \frac{1+\alpha}{2^{\alpha/3}}\right) = 2$$

obtenu pour $\alpha = 3$.

2. **Lorsque** $p = 3$, nous avons $f'(x) = \frac{1}{3}(\log 3)3^{x/3} - 1$. Par conséquent, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 3\log(3/\log 3)/\log 3 = x_3 = 2.74\cdots$. Voici le tableau de variations :

x	$-\infty$	x_3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$-1.01\cdots$	↗ $+\infty$

Nous calculons des valeurs

$$f(4) = -2.4\cdots < 0, \quad f(5) = 0.2\cdots > 0$$

et donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 5$. Par ailleurs

$$\frac{d(3)}{\sqrt[3]{3}} = 1.38\cdots, \quad \frac{d(3^2)}{\sqrt[3]{3^2}} = 3^{1/3} = 1.44\cdots, \quad \frac{d(3^3)}{\sqrt[3]{3^3}} = 1.33\cdots,$$
$$\frac{d(3^4)}{\sqrt[3]{3^4}} = 1.15\cdots, \quad \frac{d(3^5)}{\sqrt[3]{3^5}} = 0.9\cdots,$$

Nous avons donc montré que

$$\max_{\alpha\geq 1}\Big(1, \frac{1+\alpha}{3^{\alpha/3}}\Big) = 3^{1/3}$$

obtenu pour $\alpha = 2$.

3. **Lorsque** $p = 5$, nous avons $f'(x) = (\log 5)5^{x/3} - 1$. Par conséquent, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 3\log(3/\log 5)/\log 5 = x_5 = 1.16\cdots$. Voici le tableau de variations :

x	$-\infty$		x_5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0.29\cdots$	$\nearrow$	$+\infty$

Nous calculons des valeurs

$$f(2) = -0.07\cdots < 0, \quad f(3) = 1 > 0$$

et donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 3$. Par ailleurs

$$\frac{d(5)}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = 1.16\cdots, \quad \frac{d(5^2)}{\sqrt[3]{3^2}} = 1.02\cdots, \quad \frac{d(5^3)}{\sqrt[3]{3^3}} = 0.8,$$

Nous avons donc montré que

$$\max_{\alpha\geq 1}\Big(1, \frac{1+\alpha}{5^{\alpha/3}}\Big) = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$$

obtenu pour $\alpha = 1$.

4. **Lorsque** $p = 7$, nous avons $f'(x) = \frac{1}{3}(\log 7)7^{x/3} - 1$. Par conséquent, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 3\log(3/\log 7)/\log 7 = x_7 = 0.66\cdots$. Voici le tableau de variations :

x	$-\infty$		x_7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0.12\cdots$	$\nearrow$	$+\infty$

Nous calculons des valeurs

$$f(1) = -0.08\cdots < 0, \quad f(2) = 0.65 > 0$$

et donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 2$. Par ailleurs

$$\frac{d(7)}{\sqrt[3]{7}} = 7^{2/3} = 1.04\cdots, \quad \frac{d(7^2)}{\sqrt[3]{7^2}} = 0.81\cdots.$$

Nous avons donc montré que

$$\max_{\alpha\geq 1}\Big(1, \frac{1+\alpha}{7^{\alpha/3}}\Big) = \frac{2}{7^{1/3}}$$

obtenu pour $\alpha = 1$.

5. **Lorsque** $p \geq 11$, nous avons $f'(x) = \frac{1}{3}(\log p)p^{x/3} - 1$. Comme $\frac{1}{3}\log p \geq \frac{1}{3}\log 11 > 1$, nous avons

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}(\log p)e^{\frac{1}{3}(\log p)x} - 1 \geq f'(x) = e^x - 1 \geq 0.$$

Par conséquent, $f(x) \geq f(0) = 0$ pour tout xx. Donc, pour tout $p \geq 11$, on a

$$\max_{\alpha\geq 1}\Big(1, \frac{1+\alpha}{p^{\alpha/3}}\Big) = 1.$$

Cela nous donne donc

$$\frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}} \leq \prod_{p\geq 2}\max_{\alpha\geq 1}\Big(1, \frac{1+\alpha}{p^{\alpha/3}}\Big) \leq 2\times 3^{1/3}\times\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\times\frac{2}{7^{1/3}} = 8\sqrt[3]{\frac{3}{35}} = 3.52\cdots$$

atteint en $n = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = 2520$.