Séries de Dirichlet et transformées de Mellin

en

théorie analytique des nombres

—

Une introduction agrémentée d'exercices

—

Cours donnés à l'université de Monastir

20 - 25 mai 2013

—

Olivier Ramaré

avec la collaboration de Sumaia Saad Eddin

Introduction

Les fonctions arithmétiques sont très souvent mal connues, et possèdent un comportement qui semble irrégulier et sans cohérence. Regardons par exemple la fonction

$$f_0(n) = \prod_{p|n} (p-2) \tag{0.1}$$

où le produit porte sur tous les nombres premiers p. La suite de ses valeurs sur les entiers entre 1 et 54, que voici

$$1, 0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 1, 0, 9, 0, 11, 0, 3, 0, 15, 0, 17, 0, 5, 0, 21, 0, 3, 0, 1, 0, 27,$$
$$0, 29, 0, 9, 0, 15, 0, 35, 0, 11, 0, 39, 0, 41, 0, 3, 0, 45, 0, 5, 0, 15, 0, 51, 0,$$

ne nous informe que peu, même si nous nous contentons de cette suite sur les entiers impairs de ce même intervalle :

$$1, 1, 3, 5, 1, 9, 11, 3, 15, 17, 5, 21, 3, 1, 27, 29, 9, 15, 35, 11, 39, 41, 3, 45, 5, 15, 51.$$

Mais une régularité apparaît lorsque l'on considère $(1/X)\sum_{n\le X} f_0(n)$. Ce cours explique comment obtenir la valeur moyenne de telles fonctions arithmétiques à partir de méthodes d'analyse complexe, i.e. via la transformation de Mellin. Nous allons en effet démontrer que

Théorème *Soit X un réel ≥ 32. Nous avons*

$$(1/X)\sum_{n\le X} f_0(n) = \mathscr{C} X + \mathcal{O}^*(170\, X^{13/16} \log X)$$

où la constante $\mathscr{C}$ est donnée par

$$\mathscr{C} = \tfrac{1}{2}\prod_{p\ge 2}\left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right) = 0.14630\cdots$$

Remarquons que dans cet énoncé et de façon systématique dans la suite, la lettre p désigne un nombre premier.

L'ordre moyen a pour effet de dissimuler certaines valeurs aberrantes prises par la fonction considérée.

Le lecteur pourra consulter les livres (Apostol, 1976) ou (Ellison, 1975). Les livres (Bombieri, 1987/1974) et (Halberstam & Richert, 1974) sont deux autres références incontournables. D'autres très bons livres : (Vinogradov, 1954), (Davenport, 2000), (Montgomery & Vaughan, 2006) et (Bordellès, 2012).

1 heure	Séries de Dirichlet : $\zeta(s)$, Convergence absolue et unicité des coefficients, Prolongement de zeta dans la bande critique et majoration.
1 heure	Fonctions arithmétiques et multiplicativité Produit de convolution arithmétique Produit de convolution de fonctions multiplicatives.
1 heure	Produit eulérien convergent à la Godement Série de Dirichlet d'un produit de convolution
1 heures	Transformée de Mellin : Le théorème d'inversion, Des exemples (e^{-x}, $(1-x)^+$, ...) $\sum_{n\geq 1}\phi(n)e^{-n/x}$ Formule de Perron tronquée, version Ramaré $\sum_{n\leq x}\phi(n)$
2 heures	Exemples

Table des matières

Table des matières **1**

Introduction **1**

1 La fonction zeta de Riemann **7**
1.1 Majorations dans la bande critique 8

2 Séries de Dirichlet **11**
2.1 Abscisse de convergence absolue 11
2.2 Abscisse de convergence (simple) 13
2.3 Quelques digressions sans preuve 14

3 Convolution arithmétique **15**
3.1 Bestiaire 15
3.2 Produit de convolution 16
3.3 Séries de Dirichlet et produit de convolution 16

4 Multiplicativité **19**
4.1 Fonctions multiplicatives 19
4.2 La fonction nombre de diviseurs 21
4.3 Convolution et fonctions multiplicatives 22

5 Multiplicativité et série de Dirichlet **25**
5.1 Preuve du dévelopement en produit eulérien 27

6 Transformée de Mellin **31**
6.1 Exemples 31
6.2 Transformées de Mellin 34
6.3 Transformation tronquée 35
6.4 Des formules lissées 38

7 Application **41**

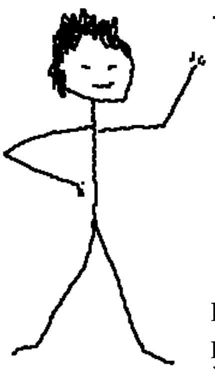
Notations **49**

References **51**

Index **54**

Chapitre 1

La fonction zeta de Riemann



La fonction ζ est très importante en arithmétique puisqu'elle intervient dans la formule d'Euler, elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi la série de Dirichlet la plus simple puisqu'elle est associée à la fonction constante 1 (fonction que nous notons $\mathbb{1}$). Elle est définie pour $\Re s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s.$$

Si il s'agit de la série de Dirichlet la plus simple et la plus célèbre, cependant elle reste assez mal connue. Pour une étude approfondie de cette fonction, le lecteur pourra se référer à (Tenenbaum, 1995) et (Ellison, 1975).

Exercice 1. *Montrer que la série qui définit $\zeta(s)$ est absolument convergente pour $\Re s > 1$.*

Indication : *On pourra utiliser une comparaison à une intégrale.*

Exercice 2. *Montrer que l'on a*

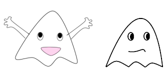
$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{u\}\frac{du}{u^{s+1}}$$

où $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire de u, c'est à dire $u-[u]$, où, cette fois-ci, $[u]$ désigne la partie entière de u. En déduire un équivalent de $\zeta(1+z)$ lorsque z tend vers 0.

Indication : *On pourra écrire, pour $n \geq 1$,*

$$\frac{1}{n^s} = s\int_n^\infty \frac{dt}{t^{s+1}}$$

(technique dite de sommation par parties).



Exercice 3. *Montrer que, pour $\sigma > 1$, nous avons $\zeta(\sigma) = (\sigma - 1)^{-1} + \gamma + \mathcal{O}(\sigma - 1)$.*

Indication : *On rappelle que la constante d'Euler est aussi définie par*

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \{u\} du/u^2.$$

Voici un autre exercice qui démontre la même chose que le précédent.

Exercice 4. *On définit une série de fonctions $\sum f_n$ par*

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1)$ est convergente. Sa limite est notée γ et on l'appelle la constante d'Euler.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Prouver que pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on a : $0 \leq f_n(x) \leq n^{-x} - (n+1)^{-x}$.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est convergente sur $]0, \infty[$.*

$\diamond$ 4 $\diamond$ *Soit S la somme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $S(1) = \gamma$ et donner l'expression de $S(x)$ quand $x > 1$.*

$\diamond$ 5 $\diamond$ *Prouver que la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur $[1, \infty[$.*

$\diamond$ 6 $\diamond$ *En déduire que lorsque x tend vers 1 alors $\zeta(s) - \frac{1}{x-1}$ tend vers γ.*

1.1. Majorations dans la bande critique

Écrivons

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n \leq N} n^{-s} + s \int_N^\infty \sum_{N < n \leq u} 1 \, \frac{du}{u^{s+1}} \\
&= \sum_{n \leq N} n^{-s} + s \int_N^\infty (u - \{u\} - N) \frac{du}{u^{s+1}} \\
&= \sum_{n \leq N} n^{-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^\infty \{u\} \frac{du}{u^{s+1}} \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

pour un entier $N \geq 0$ à choisir. Remarquons que nous aurions pu intégrer au départ de $N+1$ à l'infini, ce qui est effectivement le mieux à faire lorsque $N = 0$ et donne

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{u\} \frac{du}{u^{s+1}}. \qquad (1.2)$$

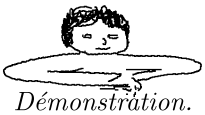
Théorème 1.1 *La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\Re s > 0$ avec un unique pôle en $s = 1$ de résidu 1.*

La fonction ζ se prolonge se prolonge en fait à tout le,plan complexe avec un unique pôle en $s = 1$.

Démonstration. L'équation (1.1) donne un prolongement à $\Re s > 0$. □

Lemme 1.2 *Si $s = \sigma + it$ avec $\sigma > 0$, nous avons*

$$\begin{cases} |\zeta(s)| \leq |s| \left(\dfrac{1}{|1-\sigma|} + \dfrac{1}{\sigma} \right) & \text{si } |t| \leq 2, \\ |\zeta(s)| \leq 4 + \log |t| & \text{si } |t| \geq 2 \text{ et } 2 \geq \sigma \geq 1, \\ |\zeta(s)| \leq 6\sigma^{-1} |t|^{1-\sigma} \log |t| & \text{si } |t| \geq 2 \text{ et } 1 \geq \sigma \geq 0. \end{cases}$$



Démonstration. Commençons par (1.2). Cela nous donne pour $|t| \leq 2$

$$|\zeta(s)| \leq \frac{|s|}{|\sigma - 1|} + |s| \int_1^\infty \frac{du}{u^{1+\sigma}}.$$

Maintenant, si $|t| \geq 2$ et $\sigma \geq 1$, nous prenons $N = 1 + [|t|]$ dans (1.1) (soit 1 plus la partie entière de la valeur absolue de t), ce qui nous donne

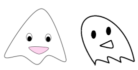
$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq \sum_{n \leq N} n^{-\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{|1-s|} + (2 + |t|) \int_N^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} \\ &\leq 1 + \log N + \frac{1}{2} + \frac{2 + |t|}{N} \leq 4 + \log |t|. \end{aligned}$$

Supposons enfin que $|t| \geq 2$ et que $\sigma \leq 1$. Il vient

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq \sum_{n \leq N} n^{-\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{|1-s|} + (2 + |t|) \int_N^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} \\ &\leq 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{1 + |t|} + \frac{2 + |t|}{\sigma N^\sigma} \\ &\leq 1 + \frac{N^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{1 + |t|} + \frac{2 + |t|}{\sigma(1 + |t|)} N^{1-\sigma}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que la dérivée en x de $N^x - 1 - xN^x \log N$ est négative alors que cette fonction s'annule en $x = 0$, ce qui nous donne

$$\frac{N^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \leq N^{1-\sigma} \log N \quad (1 \geq \sigma \geq 0)$$



et par conséquent

$$|\zeta(s)| \leq 1 + N^{1-\sigma}\log N + \frac{N^{1-\sigma}}{1+|t|} + \frac{2+|t|}{\sigma(1+|t|)}N^{1-\sigma}.$$

Nous majorons finalement N par $1+|t|$, et nous montrons que, lorsque $|t| \geq 2$, nous avons

$$\left(1 + \frac{\log(|t|+1)}{3} + \frac{4}{3\sigma}\right)\frac{(|t|+1)^{1-\sigma}}{|t|^{1-\sigma}\log|t|} \leq 3(1+\sigma^{-1}) \leq 6/\sigma.$$

□

Exercice 5. *Montrer que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 1^+ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 6. *Montrer que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est convexe pour $s \in]1, +\infty[$.*

Exercice 7.

◇ 1 ◇ *Nous posons $L(s) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n n^{-s}$. Montrer que $L(s)$ est convergente pour $\Re s > 0$, puis que $L(1) < 0$ et enfin que $L'(1) < 0$.*

◇ 2 ◇ *Montrer que $-\zeta'(s)/\zeta(s) < 1/(s-1)$ lorsque s est réel et > 1.*

Indication : *On pourra utiliser $\zeta(s) = L(s)/(2^{1-s}-1)$, que l'on démontrera.*

Exercice 8. *Montrer que, pour $\sigma > 1$, nous avons $1/(\sigma-1) < \zeta(\sigma) < \sigma/(\sigma-1)$.*

Chapitre 2

Séries de Dirichlet

Le lecteur peut ici se restreindre aux séries de Dirichlet d'argument réel dans un premier temps, mais les leçons ultérieures demanderont des variables complexes. Pour une étude plus complète, voir (Tenenbaum, 1995) ou (Ellison, 1975).

2.1. Abscisse de convergence absolue

Lorsque nous disposons d'une fonction arithmétique, disons f, nous pouvons former sa *série de Dirichlet* qui est, pour tout argument complexe s :

$$D(f,s) = \sum_{n\geq 1} f(n)/n^s. \tag{2.1}$$

Cette définition est a priori formelle, puisqu'il n'est pas toujours vrai qu'il existe au moins un s pour lequel cette série converge (il n'en existe d'ailleurs pas quand $f(n) = e^n$).

Nous rappelons que lorsque $s = \sigma + it$ avec $\sigma = \Re s$ et $t = \Im s$ réels, nous avons $n^s = n^\sigma n^{it}$ et que le module $|n^s|$ de n^s est égal à n^σ.

Lemme 2.1 *Soit f une fonction arithmétique dont la série de Dirichlet converge absolument pour un certain nombre complexe s. Alors, pour tout nombre réel $r > \Re s$, la série $D(f,r)$ converge absolument, et donc, pour tout nombre complexe s' tel que $\Re s' > \Re s$, la série $D(f,s')$ converge absolument.*

Précisons que dire « la série de Dirichlet $D(f,s)$ converge absolument » signifie que $\sum_{n\geq 1} |f(n)|/n^\sigma$ converge, où $\sigma = \Re s$.

Démonstration. Nous avons

$$D(f,r) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^\sigma}\frac{n^\sigma}{n^r}.$$

Or $r > \sigma$ donc $n^\sigma/n^r < 1$, d'où $D(|f|, r) < D(|f|, \sigma)$, i.e. la série de Dirichlet de f converge pour tout $r > \sigma$. $\square$

Cette propriété nous donne accès à la notion d'abscisse de convergence absolue.

Définition 2.2 *On appelle* abscisse de convergence absolue *de la fonction f, le plus petit réel s tel que la série de Dirichlet $D(f, s)$ converge absolument. Si $D(f, s)$ converge absolument pour tout s, on dit alors que l'abscisse de convergence absolue est $-\infty$.*

Notons qu'il n'est pas acquis que la série en question converge absolument en son abscisse de convergence absolue. D'après un théorème de Landau, voir (Dress, 1983/84), cette situation n'arrive même jamais dès que cette abscisse est finie et que f est positive ou nulle. Notons ici que l'abscisse de convergence absolue peut valoir $-\infty$ et la fonction f être positive ou nulle, sans que cela n'implique que f soit à support borné, i.e. qu'elle s'annule partout sauf sur un nombre fini de valeurs. Le cas $f(n) = e^{-n}$ fournit un contre-exemple.

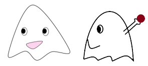
Nous pouvons associer à chaque fonction arithmétique f une série de Dirichlet, et cette série convergera absolument au moins en un point si la fonction f croît *raisonnablement*. Une telle série de Dirichlet définit en fait parfaitement la fonction dont elle est issue comme le montre la propriété suivante. Nous ne l'utiliserons pas dans la suite.

Lemme 2.3 *Soit f et g deux fonctions arithmétiques telles que leurs séries de Dirichlet respectives convergent absolument pour un certain s. Supposons en outre que $D(f, r) = D(g, r)$ pour tout r réel tel que $r > \Re s$. Alors $f = g$.*

Démonstration. En posant $h_1 = f - g$, nous avons $D(h_1, r) = 0$ pour tout $r > \Re s$. Comme cette série converge en $r = \Re s + 1$, nous en déduisons que $h_2(n) = h_1(n)/n^{r+1}$ est bornée en valeur absolue et vérifie $D(h_2, r) = 0$ pour tout $r > -1$ et il nous faut établir que $h_2 = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas, et nommons n_0 le plus petit entier n tel que $h_2(n) \neq 0$. Une comparaison à une intégrale nous donne directement, pour $r > 1$:

$$\begin{aligned}|n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0)| &\le \max_n |h_2(n)| \sum_{n \ge n_0+1} \frac{n_0^r}{n^r} \\ &\le \max_n |h_2(n)| n_0^r \int_{n_0}^\infty \frac{dt}{t^r} \le n_0 \max_n |h_2(n)|/(r-1),\end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Mais $D(h_2, r) = 0$, ce qui nous garantit que $h_2(n_0) = 0$ contrairement à notre hypothèse. Le lecteur pourra modifier cette démonstration de deux façons : tout d'abord remplacer le recours à un raisonnement par l'absurde par une démonstration par récurrence. Ensuite, une petite modification donne $n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0) = \mathcal{O}((1 + n_0^{-1})^{-r})$ alors que la preuve ci-dessus ne donne que $\mathcal{O}(1/r)$. $\square$



2.2. Abscisse de convergence (simple)

Nous n'utiliserons que l'abscisse de convergence absolue, mais voici le lemme qui permet l'abscisse de convergence (simple) :

Lemme 2.4 *Soit f une fonction arithmétique dont la série de Dirichlet converge simplement pour un certain nombre complexe s_0. Alors, pour tout nombre complexe tel que $\Re s > \Re s_0$, la série $D(f,s)$ converge (simplement).*

Démonstration. La clé de ce lemme passe par le critère de Cauchy : nous allons donc majorer les sommes partielles $\sum_{M<n\le N} a_n/n^s$. Notre hypothèse porte sur les somems partielles de $\sum a_n/n^{s_0}$ et il nous faut passer des premières sommes à celles-ci, ce que nous faisons via une *sommation par parties*. Nous remarquons tout d'abord que

$$\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{N^{s-s_0}} = (s-s_0)\int_n^N \frac{du}{u^{s-s_0+1}}.$$

Par conséquent, cela nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{M<n\le N} \frac{a_n}{n^s} &= \sum_{M<n\le N} \frac{a_n}{n^{s_0}}\frac{1}{N^{s-s_0}} + (s-s_0)\sum_{M<n\le N}\frac{a_n}{n^{s_0}}\int_n^N \frac{du}{u^{s-s_0+1}} \\ &\sum_{M<n\le N} \frac{a_n}{n^{s_0}}\frac{1}{N^{s-s_0}} + (s-s_0)\int_M^N \sum_{M<n\le t}\frac{a_n}{n^{s_0}}\frac{du}{u^{s-s_0+1}}\end{aligned}$$

ce qui est l'expression que nous cherchions. Cela nous donne en particulier

$$\left|\sum_{M<n\le N}\frac{a_n}{n^s}\right| \le \left(1+\frac{|s-s_0|}{\Re(s-s_0)}\right)\max_{M\le a\le b\le N}\left|\sum_{a<n\le b}\frac{a_n}{n^{s_0}}\right|.$$

La quantité

$$1+\frac{|s-s_0|}{\Re(s-s_0)} = C$$

est une constante positive. Le critère de Cauchy nous dit que, puisque la série $\sum_{n\ge1} a_n/n^{s_0}$ converge, nous avons

$$\forall\varepsilon>0, \exists M_0(\varepsilon), \qquad \max_{M_0(\varepsilon)\le a\le b}\left|\sum_{a<n\le b}\frac{a_n}{n^{s_0}}\right| \le \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\forall\varepsilon>0, \exists M_0'(\varepsilon) = M_0(\varepsilon/C), \qquad \max_{M_0'(\varepsilon)\le M\le N}\left|\sum_{M<n\le N}\frac{a_n}{n^{s}}\right| \le \varepsilon.$$

Ce qu'il fallait démontrer ! □

Exercice 9. *Établir le lemme 2.1 en employant le lemme 2.4.*

2.3. Quelques digressions sans preuve

Les séries des Dirichlet ont été introduites dans (Dirichlet, 1937) par P.G. Lejeune-Dirichlet en 1937 pour montrer de l'existence d'une infinité de nombres premiers dans les progressions arithmétiques (de type $a + nq$ avec a et q premiers entre eux). Dedekind, d'abord un élève puis un ami de Dirichlet, a établi plusieurs propriétés de ces séries enrichissant ainsi le livre (Lejeune-Dirichlet, 1871). L'étape de structuration suivante est due à un mémoire de Cahen (Cahen, 1894), qui est notamment célèbre pour ... l'inexactitude de ses preuves ! L'élaboration de la théorie est allée bon train à cette période, et en 1915 parut la splendide petite monographie (Hardy & Riesz, 1964) de Hardy & Riesz qui reste à ce jour l'ouvrage de base sur la question. La lectrice pourra retrouver dans (Tenenbaum, 1995) une partie de ce matériel.

Il existe une formule qui permet de calculer l'abscisse de convergence absolue en fonction de coefficients (due à Cahen (Cahen, 1894)) :

Théorème 2.5 *Si l'abscisse de convergence absolue σ_0 de $D(f,s)$ est strictement positive, elle est donnée par*

$$\sigma_0 = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sum_{1\le n\le N} |f(n)|}{\log N}.$$

Il existe un théorème analogue pour déterminer l'abscisse de convergence, et il est aussi possible de traiter le cas où σ_0 est négative ou nulle (mais la formule est différente). La lectrice remarquera que cette formule est l'exact pendant de la formule de Hadamard donnant le rayon de convergence d'une série entière. Cependant notre démarche est ici autre : nous cherchons à obtenir des informations sur $\sum_{1\le n\le N} |f(n)|$ à partir d'informations sur sa série de Dirichlet !

De nombreux travaux comparent les abscisses de convergence simple, absolue ou uniforme des trois constituants de l'égalité $D(f,s) = D(h,s)D(g,s)$; la lectrice en trouvera un exposé ainsi que leurs extensions au cas de plusieurs facteurs et les dernières améliorations (optimales) dans (Kahane & Queffélec, 1997).

Chapitre 3

Convolution arithmétique

3.1. Bestiaire

1. La fonction de Moebius $\mu(n)$ vaut -1 sur chaque nombre premier et 0 sur toutes leurs puissances.
2. $\varphi(n)$ est l'indicateur d'Euler, c'est à dire le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers à n.
3. $d(n)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n.
4. $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs (positifs) de n.
5. La fonction de Liouville $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ en est assez proche : en effet cette dernière est la fonction multiplicative (voir plus loin) qui vaut $(-1)^\alpha$ sur chaque p^α.
6. $d(n^2)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n^2. Il s'agit aussi d'une fonction multiplicative (voir plus loin) de n.
7. $\omega(n)$ est le nombre de diviseurs premiers de n et par exemple $\omega(12) = 2$ puisque 2 et 3 sont les deux seuls nombres premiers divisant 12. On dit aussi "sans multiplicité" car, en fait, 2^2 divise aussi 12. Le nombre de diviseurs avec multiplicité est $\Omega(n)$ qui vérifie $\Omega(12) = 3$. Ces deux fonctions sont *additives*, i.e. $\omega(nm) = \omega(n) + \omega(m)$ si $(n,m) = 1$ et de même pour Ω. Cette notion est bien sûr le pendant additif de la notion de fonction multiplicative introduite ci-après.
8. $\mu^2(n)$ vaut 1 si n est divisible par un carré > 1 et 0 sinon.
9. $\Lambda(n)$ est a fonction de van Mangoldt
10. $\delta_{n=1}$ ou δ_1 est la fonction qui vaut 1 en $n = 1$ et 0 ailleurs, alors que $\mathbb{1}$ est la fonction qui vaut uniformément 1 sur tous les entiers.

Nous pouvons aussi considérer

1. la fonction φ_2 qui à chaque entier n associe le nombre d'entiers modulo n qui sont premiers à n et tels que $n+2$ qui le sont aussi,
2. la fonction qui à chaque entier n associe le nombre de carrés modulo n.

3.2. Produit de convolution

Nous définissons le produit de convolution arithmétique $f \star g$ par

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d) \tag{3.1}$$

où la somme porte sur les diviseurs d de n. En notant $\mathbb{1}$ la fonction qui vaut 1 sur tous les entiers, nous avons $d(n) = \mathbb{1} \star \mathbb{1}$. La lectrice vérifiera que ce produit est associatif et commutatif. La fonction $\delta_{n=1}$ en est l'élément neutre, puisque pour toute fonction arithmétique g, nous avons

$$(\delta_1 \star g)(n) = \sum_{\ell m = n} \delta_1(\ell) g(m) = g(n).$$

Ce produit est par ailleurs distributif vis-à-vis de l'addition de deux fonctions arithmétiques et ces deux lois permettent de munir l'ensemble de fonctions arithmétiques d'une structure d'algèbre commutative unitaire sur $\mathbb{C}$.

Exercice 10. *Montrer qu'une fonction f admet un inverse pour le produit de convolution $\star$ si et seulement si $f(1) \neq 0$.*

Indication : *On pourra construire un inverse par récurrence.*

Nous pourrions aussi enrichir cette structure en considérant la dérivation

$$\partial : (f(n))_{n\geq 1} \mapsto (f(n)\log n)_{n\geq 1}$$

qui est linéaire et vérifie de surcroît $\partial(f \star g) = (\partial f) \star g + f \star (\partial g)$ mais nous sortons ici de notre cadre. Le lecteur trouvera une étude assez détaillée de cette structure dans le livre de Bateman & Diamond (Bateman & Diamond, 2004).

Exercice 11. *Montrer que, si $D(f, s)$ converge absolument, il en est de même de $D(\partial f, r)$ pour $r > s$. Que penser de la réciproque ? Peut-on affaiblir cette condition à $r \geq s$?*

3.3. Séries de Dirichlet et produit de convolution

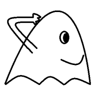
Les deux lois internes sur les fonctions arithmétiques se traduisent agréablement en termes de séries de Dirichlet :

– Concernant l'addition (+) : étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, nous avons

$$D(f + g; s) = D(f; s) + D(g; s).$$

– Concernant la multiplication ($\star$) : étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, alors celle de $f \star g$ est également absolument convergente, et nous avons

$$D(f \star g; s) = D(f; s)D(g; s).$$



Cette dernière égalité est facile à vérifier de ce que les séries convergent absolument, ce qui nous permet d'en déplacer les termes comme bon nous semble. Elle montre en particulier que l'opérateur qui, à une fonction arithmétique, lui associe sa série de Dirichlet trivialise le produit de convolution arithmétique, de la même façon que la transformée de Fourier trivialise le produit de convolution des fonctions de la droite réelle.

Il est clair que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet de $f \star g$ est majorée par le maximum des abscisses de convergence absolue des séries de Dirichlet associées à de f et g. Cette majoration est souvent une égalité *lorsque* ces deux abscisses ne sont pas égales ... et qu'aucun des facteurs n'est nul !

Exercice 12. *Montrer que la série de Dirichlet associée à la fonction de diviseurs $d(n)$ est $\zeta(s)^2$.*

Exercice 13. *Montrer que $\mathbb{1} \star \varphi = \mathrm{Id}$ et en déduire que la série de Dirichlet associée à l'indicateur d'Euler $\varphi(n)$ est $\zeta(s-1)/\zeta(s)$.*

Chapitre 4

Multiplicativité

4.1. Fonctions multiplicatives

Une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est dite *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{si } n \text{ et } m \text{ sont premiers entre eux.} \end{cases} \tag{4.1}$$

De façon équivalente, nous pouvons écrire

$$f\big(\prod_p p^{\alpha_p}\big) = \prod_p f(p^{\alpha_p}) \tag{4.2}$$

où le produit porte sur tous les nombres premiers et où les α_p sont des entiers positifs ou nuls, dont tous sauf un nombre fini sont nuls. Cette expression montre clairement que la fonction f est complètement déterminée par sa valeur sur les entiers qui sont des puissances de nombres premiers. Réciproquement la donnée de telles valeurs détermine bien une fonction multiplicative, tout simplement en la définissant à partir de l'égalité ci-dessus.

Exercice 14. *Montrer que la fonction de Moebius est multiplicative.*

Exercice 15. *Montrer que x, y et z sont trois entiers, et si x est premier à z, alors le pgcd de xy et z est égal au pgcd de y et de z, i.e.*

$$\mathrm{pgcd}(xy, z) = \mathrm{pgcd}(y, z).$$

Indication : *Utiliser les décompositions en facteurs premiers.*

Exercice 16. *Soit a et b deux entiers premiers entre eux.*

◇ 1 ◇ *Montrer que* $\mathrm{pgcd}(a + b, a - b)$ *vaut 1 ou 2. Donner des exemples de chacun des cas.*

◇ 2 ◇ *Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.*

Cette notion de multiplicativité va s'avérer fondamentale. Nous constaterons en particulier que beaucoup de fonctions arithmétiques a priori mystérieuses se comprennent beaucoup mieux lorsque l'on regarde leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers.

Exercice 17. *Soit f une fonction multiplicative et m et n deux entiers. Nous avons*

$$f([m,n])f((m,n)) = f(m)f(n)$$

où $[m,n]$ et (m,n) désigne respectivement le ppcm et le pgcd des entiers m et n.

Indication : *Utiliser les décompositions en facteurs premiers.*

Exercice 18.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que la fonction somme de diviseurs σ est multiplicative.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Soit p un nombre premier et $a \geq 1$ un entier. Montrer que*

$$\sigma(p^a) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}$$

où $\sigma(d)$ est la somme des diviseurs entiers positifs de d.

Exercice 19.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que la fonction f qui à l'entier n associe n admet la fonction g définie par*

$$g(d) = d\mu(d)$$

comme inverse de convolution.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Démontrer l'identité suivante*

$$\sigma(n)^2 = n \sum_{d|n} \sigma(d^2)/d.$$

Exercice 20. *Pour tout module $r \geq 1$, nous posons*

$$\Xi_r = \left\{ \frac{u}{r}, 1 \leq u \leq r, \mathrm{pgcd}(u,r) = 1 \right\}.$$

Soit q et q' deux entiers premiers entre eux. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \Xi_q \times \Xi_{q'} & \to & \Xi_{qq'} \\ & (a/q, a'/q') & \mapsto & (aq' + a'q)/(qq') \end{array}$$

est une bijection.

Indication : *On vérifiera que cette fonction est injective. Pour montrer la surjectivité, ou bien on prendra un argument de cardinalité, ou bien on emploiera le théorème de Bezout : il existe deux entiers u et v tels que $uq + vq' = 1$. Le point $b/(qq')$ de $\Xi_{qq'}$ est alors égal à $\Psi(bv/q \bmod 1, bu/q' \bmod 1)$.*

Exercice 21. *Soit $P(X)$ un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $\rho(q)$ le nombre de solutions de $P(x) \equiv 0[q]$. Montrer que la fonction $q \mapsto \rho(q)$ est multiplicative.*

4.2. La fonction nombre de diviseurs

Commençons par détailler ce pourquoi la fonction qui à n associe son nombre de diviseurs est multiplicative. Ceci repose en fait sur la structure de l'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des diviseurs de n. Tout d'abord

$$\mathcal{D}(p^\alpha) = \{1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1}\}. \tag{4.3}$$

Ensuite, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, chaque diviseur du produit $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ est de la forme $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$ avec $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$ et $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$. Par ailleurs, chaque entier de cette forme est bien un diviseur de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Ceci nous donne

$$\mathcal{D}\big(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\big) = \mathcal{D}\big(p_1^{\alpha_1}\big) \cdot \mathcal{D}\big(p_2^{\alpha_2}\big). \tag{4.4}$$

Nous montrons de la même façon que $\mathcal{D}(mn) = \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n)$ si m et n sont premiers entre eux. De façon explicite la fonction suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(mn) &\to \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n) \\ d &\mapsto \big((d,m),(d,n)\big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Il s'agit là d'une forme de multiplicativité au niveau des ensembles, et que nous allons exploiter sous la forme suivante : pour toute fonction F, l'identité suivante a lieu dès que m et n sont deux entiers premiers entre eux

$$\sum_{d|mn} F(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} F(d_1 d_2). \tag{4.6}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{D}(\ell)$ l'ensemble des diviseurs positifs de ℓ. Étant donné deux entiers premiers entre eux m et n, nous considérons

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n) &\to \mathscr{D}(mn) \\ (u,v) &\mapsto uv \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} g : \mathscr{D}(mn) &\to \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n) \\ w &\mapsto (\mathrm{pgcd}(w,m), \mathrm{pgcd}(w,n)) \end{aligned}$$

Nous montrons que $g \circ f = \mathrm{Id}$. En effet $(g \circ f)(u,v) = (\mathrm{pgcd}(uv,m), \mathrm{pgcd}(uv,n))$. Comme v divise n et que n est premier à m, les entiers v et m sont premiers entre eux. L'exercice 15 nous donne alors $\mathrm{pgcd}(uv,m) = \mathrm{pgcd}(u,m) = u$ et de même $\mathrm{pgcd}(uv,n) = \mathrm{pgcd}(v,n) = v$. Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Exercice 22. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $d(n) \le 2\sqrt{n}$.*

Indication : *La meilleure constante est $\sqrt{3}$.*

Exercice 23. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $d(n) \le 4\, n^{1/3}$.*

Indication : *La meilleure constante est $18^{1/3}$.*

Exercice 24. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $\varphi(n) \ge \sqrt{n/2}$.*

Exercice 25. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $\varphi(n) \ge (9/2)^{1/3} n^{2/3}$.*

Exercice 26. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $\sigma(n)\varphi(n) \le n^2$.*

4.3. Convolution et fonctions multiplicatives

Les deux théorèmes généraux suivants nous donnent la multiplicativité de toute une kyrielle de fonctions :

Théorème 4.1
Si f et g sont deux fonctions multiplicatives, il en est de même de $f \star g$.

Théorème 4.2
Si f et g sont deux fonctions multiplicatives, il en est de même de $f \cdot g : n \mapsto f(n)g(n)$.

Démonstration. Commençons par le premier théorème. La valeur en 1 est aisée : $f \star g(1) = f(1)g(1) = 1$. Soit ensuite deux entiers m et n premiers entre eux. Nous avons

$$(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f(mn/d)g(d)$$

et appliquons (4.6) :

$$\begin{aligned}(f \star g)(mn) &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\Big(\frac{mn}{d_1 d_2}\Big) g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\Big(\frac{m}{d_1}\Big) f\Big(\frac{n}{d_2}\Big) g(d_1) g(d_2) = (f \star g)(m)(f \star g)(n)\end{aligned}$$

comme requis. Le second théorème est facile et nous le laissons à la lectrice assidue ! □

Ceci nous donne d'un seul coup la multiplicativité de beaucoup de fonctions, en partant des exemples simples que sont les fonctions $\mathbb{1}$ et plus généralement $X^a : n \mapsto n^a$. En particulier, le lecteur vérifiera que

$$d(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1})(n), \quad \sigma(n) = (\mathbb{1} \star X)(n).$$

Cette convolution nous permet aussi d'exprimer simplement certaines relations, comme $\mu^2(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1}_{X^2})(n)$ où $\mathbb{1}_{X^2}$ est la fonction caractéristique des carrés.

Exercice 27. *Montrer que la fonction de Moebius est l'inverse de convolution de la fonction $\mathbb{1}$ constante égale à 1.*

Indication : *On pourra remarquer que la fonction $\mathbb{1} \star \mu$ est multiplicative.*

Exercice 28. *Montrer que* $d(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$.

Exercice 29. *Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont dans $\mathscr{F}$, rappelons que $f \star g$ est défini par*

$$f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Alors

1. *Montrer que $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$.*
2. *Montrer que $(\mathscr{F}, +, \star)$ est une algèbre commutative sur $\mathbb{C}$.*
3. *Déterminer une unité δ pour $\star$.*
4. *Montrer que $\mathbb{1}$ (la suite constante égale à 1) et μ sont inverses l'un de l'autre.*

Exercice 30.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que pour tout entier d sans facteurs carrés, le nombre de solutions en d_1 et d_2 de $[d_1, d_2] = d$ est $3^{\omega(d)}$.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Soit q un entier. Nous notons $f(q)$ le nombre de solutions en q_1 et q_2 de $[q_1, q_2] = q$. Montrer que f est multiplicative.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que $\mathbb{1} \star f(n)$ est le nombre de couples (q_1, q_2) tels que $[q_1, q_2] | n$.*

Exercice 31. *On rappelle que f est complètement multiplicative si et seulement si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tout couple d'entiers m et n.*

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Déterminer toutes les fonctions complètement multiplicatives f qui sont telles que $\mathbb{1} \star f$ est encore complètement multiplicatif.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Déterminer l'inverse de la fonction complètement multiplicative f.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que l'inverse de l'inverse de convolution de la fonction $\mathbb{1} \star f$ n'est en général pas $\mu \cdot (\mathbb{1} \star f)$, même si nous nous restreignons aux fonctions complètement multiplicatives f.*

Exercice 32. *Montrer que la fonction qui à l'entier $n > 1$ associe le double de la somme des entiers entre 1 et n qui lui sont premiers, et qui à 1 associe 1, est multiplicative.*

Indication : *On pourra calculer cette somme directement en utilisant le fait que la fonction caractéristique des entiers m premiers à n s'écrit aussi*

$$\sum_{\substack{d|n, \\ d|m}} \mu(d),$$

ce que l'on prendra soin de démontrer.

Exercice 33. *Nous posons* $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. *Montrer que*

$$\sigma_k(n) \leq n^k \zeta(k)$$

dès que $k > 1$.

Exercice 34. *Montrer que* $\mathbb{1} \star \lambda$ *est la fonction caractéristique des carrés et en déduire la série de Dirichlet de* λ. *Ici,* λ *est la fonction de Liouville, définie par* $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ *où* $\Omega(n)$ *est le nombre de facteurs premiers de* n *comptés avec multiplicité.*

Exercice 35. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à* n *associe* $\varphi(n)$ *en fonction de la fonction* ζ *de Riemann.*

Exercice 36.

◇ 1 ◇ *Déterminer la série de Dirichlet de* $d(n^2)$.

◇ 2 ◇ *Déterminer la série de Dirichlet de* $d(n)^2$.

◇ 3 ◇ *En utilisant les deux questions précédentes, montrer que*

$$d(n)^2 = \sum_{m|n} d(m^2).$$

Chapitre 5

Multiplicativité et séries de Dirichlet

> **Théorème 5.1** *Supposons que la série de Dirichlet de la fonction multiplicative f converge absolument pour un certain s. Alors, $D(f,s)$ est développable en produit eulérien :*
>
> $$D(f,s) = \prod_{p \geq 2} \sum_{k \geq 0} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Le reste de cette section est dédiée à établir cette propriété, mais il est préférable de commencer par quelques commentaires.

Convergence et produit convergent

Nous ouvrons ici une parenthèse sur la signification du produit infini. La suite $1/2$, $(1/2) \times (1/2)$, $(1/2) \times (1/2) \times (1/2)$, et de terme général $(1/2)^n$, est convergente, et de limite 0. Ici, rien de neuf. Toutefois, par une maladresse terminologique, on dit parfois qu'un produit (formel) infini

$$\prod_{n \geq 1} a_n$$

est convergent si et seulement si

1. La suite des produits partiels converge vers une limite, disons P ;
2. $P \neq 0$.

Ceci nous donne donc une écriture sous forme de produit, c'est à dire comme la limite d'une suite de produits partiels qui converge vers une limite, mais il faut en général vérifier la condition 2 ci-dessus. Parfois on dit que le produit *converge strictement* lorsque cette condition est vérifiée.

Convergence et produit convergent : le point de vue de Godement

Hervé Queffelec propose d'adopter le point de vue suivant, qui est efficace et limpide. Godement dit que le produit $\prod_{n \geq 1} a_n$ est absolument convergent en tant que produit si $\sum_{n\geq 1}|a_n - 1| = M < \infty$. Ceci à cause du théorème suivant :

Théorème 5.2 *Supposons que* $\sum_{n\geq 1}|u_n| = M < \infty$. *Alors*

1. $P_n = \prod_{1\leq j\leq n}(1+u_j) \to P \in \mathbb{C}$.
2. *Si* $1+u_j \neq 0$ *pour tout* j *alors* $P \neq 0$.

Démonstration. Nous avons $P_n - P_{n-1} = u_n P_{n-1}$ et donc

$$|P_n - P_{n-1}| \leq |u_n||P_{n-1}| \leq |u_n| \prod_{1\leq j\leq n-1} e^{|u_j|} \leq |u_n| e^M.$$

Il en résulte que la série $\sum_n (P_n - P_{n-1})$ est absolument convergente, et donc la suite P_n converge, disons vers $P \in \mathbb{C}$.

Pour montrer que $P \neq 0$, on exhibe Q tel que $PQ = 1$. Quoi de plus naturel que de chercher Q sous la forme d'un autre produit infini $Q = \prod_{j\geq 1}(1+v_j)$, avec $\sum_{j\geq 1}|v_j| < \infty$? L'idéal serait d'ajuster v_j pour avoir $(1+u_j)(1+v_j) = 1$ pour tout j. Or c'est possible car $1+u_j \neq 0$. Et ça donne

$$v_j = \frac{1}{1+u_j} - 1 = \frac{-u_j}{1+u_j}, \quad \text{d'où } |v_j| \sim |u_j|$$

et tout est dit. □

Les logarithmes sont cachés dans les majorations $1+x \leq e^x$ et $P_{n-1} \leq e^M$. Mais leur présence reste discrète.

Nouvel énoncé et preuve

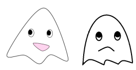
Théorème 5.3 *Supposons que la série de Dirichlet de la fonction multiplicative f converge absolument pour un certain s. Alors, $D(f,s)$ est développable en produit eulérien :*

$$D(f,s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}$$

où le produit est absolument convergent au sens de Godement.

Démonstration. Nous constatons que le produit en question s'écrit $\prod_p (1+u_p)$ avec

$$u_p = \sum_{k\geq 1}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}. \tag{5.1}$$



Or

$$\sum_p |u_p| \leq \sum_p \sum_{k\geq 1} \frac{|f(p^k)|}{|p^{ks}|} \leq \sum_{n\geq 1} |f(n)|/|n^s|$$

et le théorème 5.2 s'applique. Nous nous sommes concentrés jusqu'à maintenant sur l'existence du produit eulérien, mais n'avons pas montré l'égalité entre le membre de gauche (la série de Dirichlet) et le membre de droite (le produit eulérien) ! Nous développons cela en prenant notre temps dans la section 5.1. □

Il s'agit véritablement de la bonne notion qui accompagne la notion de série absolument convergente. Notons que le produit peut être convergent et nul, mais alors l'un des facteurs est nul. Voici un exemple. Nous définissons la fonction multiplicative f_4 par

$$f_4(2) = 1, f_4(4) = -6,\ \forall k \geq 3,\ f_4(2^k) = 0,$$
$$\forall p \geq 3, \forall k \geq 1,\ f_4(p^k) = 1.$$

En conséquence $\sum_{n\geq 1} f_4(n)/n^s$ est absolument convergent pour $\Re s > 1$ et l'on a

$$\sum_{n\geq 1} f_4(n)/n^s = \Big(1 + \frac{2}{2^s} - \frac{6}{2^{2s}}\Big) \prod_{p\geq 3} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}.$$

qui s'annule effectivement pour $s = 2$.

5.1. Preuve du dévelopement en produit eulérien

Nous nous donnons ici une fonction arithmétique multiplicative f que nous supposerons bornée en valeur absolue par 1. Nous pouvons dans tous les cas pratiques nous ramener à ce cas, quitte à considérer une fonction auxiliaire de la forme $f(n)/n^a$ qui est, elle aussi, multiplicative (dès lors que f l'est).

Soit $y \geq 1$ un paramètre réel. Nous considérons la fonction multiplicative f_y définie par

$$\begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1, f_y(p^a) = f(p^a), \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1, f_y(p^a) = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

(p est ici un nombre premier) et, de façon symétrique,

$$\begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = 0, \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = f(p^a). \end{cases} \tag{5.3}$$

Notons que nous avons l'équation

$$f = f_y \star f^y \tag{5.4}$$

Démonstration. En effet, les sommants de la somme

$$\sum_{d_1 d_2 = n} f_y(d_1) f^y(d_2)$$

sont presque tous nuls puisque l'entier n admet une unique écriture sous la forme $n = \ell m$ où tous les facteurs premiers de ℓ sont inférieurs y et tous ceux de m sont strictement supérieurs à y. La somme ci-dessus se réduit donc à $f_y(\ell)f^y(m)$ qui vaut bien $f(n)$. □

Nous posons alors

$$D_y^\flat(f,s) = D(f_y,s), \quad D_y^\sharp(f,s) = D(f^y,s) \tag{5.5}$$

de telle sorte que $D(f,y) = D_y^\flat(f,s)D_y^\sharp(f,s)$. La série de Dirichlet $D_y^\flat(f,s)$ se réduit à un produit, pour $\Re s > 1$:

$$D_y^\flat(f,s) = \prod_{p\le y}\Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\Big). \tag{5.6}$$

La série $D_y^\sharp(f,s)$ tend à dévenir petite lorsque y tend vers l'infini. En effet, avec $\sigma = \Re s$,

$$|D_y^\sharp(f,s) - 1| \le \sum_{n>y} 1/n^\sigma \le y^{-\sigma} + \int_y^\infty dt/t^\sigma \le \frac{\sigma}{(\sigma-1)y^{\sigma-1}}. \tag{5.7}$$

En laissant y tendre vers l'infini, nous obtenons donc l'expression de $D(f,s)$ sous forme d'un produit dit *eulérien*

$$D(f,s) = \prod_{p\ge 2}\Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\Big), \quad (\Re s > 1), \tag{5.8}$$

où chaque facteur est dit le facteur *local*, ou *eulérien*, en p.

Exercice 37. *Montrer que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) \neq 0$ quel que soit le nombre complexe s.*

Exercice 38. *Soit a un réel ≥ 0. Nous posons $\lambda_a(n) = \sum_{d|n} d^a\lambda(d)$ où $\lambda(d)$ est la fonction de Liouville. Montrer que*

$$\sum_{n\ge1}\frac{\lambda_a(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s-2a)}{\zeta(s-a)} \quad \textit{et} \quad \sum_{n\ge1}\frac{\lambda(n)\lambda_a(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)\zeta(s-a)}{\zeta(s)}$$

pour $\Re s > 1 + a$.

Exercice 39. *Montrer que l'on a, pour $\Re s > 1$,*

$$\zeta(s) = \prod_{p\ge2}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

où le produit est absolument convergent au sens de Godement.

Exercice 40. *Montrer que*

1. $D(\varphi,s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$,
2. $D(\lambda,s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$,
3. $D(\mu^2,s) = \zeta(s)/\zeta(2s)$.

Exercice 41. *Montrer que la série de Dirichlet associée à la fonction de Moebius* μ *est* $1/\zeta(s)$ *et en déduire un exemple montrant que l'abscisse de convergence absolue d'un produit peut être strictement inférieure à la plus grande des deux abscisses des deux facteurs (considérer* $\mathbb{1} \star \mu$*).*

Exercice 42. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à* n *associe* $2^{\omega(n)}$ *en fonction de la fonction* ζ *de Riemann. Ici* $\omega(n)$ *est le nombre de facteurs premiers de* n *comptés sans multiplicité.*

Exercice 43. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à* n *associe* $2^{\omega(n)}\lambda(n)$ *en fonction de la fonction* ζ *de Riemann. Ici,* λ *est la fonction de Liouville définie par* $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ *où* $\Omega(n)$ *est le nombre de facteurs premiers de* n *comptés avec multiplicité.*

Exercice 44. *Dans cet exercice, nous posons* $\kappa(n) = \nu_1\nu_2\cdots\nu_k$*, où* n *est décomposé en facteurs premiers sous la forme* $n = p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\cdots p_k^{\nu_k}$ *avec* $p_i \neq p_j$ *si* $i \neq j$*. Montrer que*

$\diamond$ 1 $\diamond$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\kappa(n)/n^s = \zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)/\zeta(6s)$,

$\diamond$ 2 $\diamond$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}3^{\omega(n)}\kappa(n)/n^s = \zeta^3(s)/\zeta(3s)$.

Indication : *Toutes ces fonctions étant multiplicatives (à montrer), il suffit de calculer chaque facteur eulérien.*

Chapitre 6

Transformée de Mellin

Commençons par un petit détour historique. Robert Hjalmar Mellin était un mathématicien finlandais (un éléve de Weierstrass) qui a, entre 1880 et 1920, étudié le couple de transformations

$$\begin{cases} \Phi(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}dz, \quad (x>0) \\ F(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} \Phi(x)x^{z-1}dx. \end{cases}$$

Chacune des intégrales en question requiert bien sûr des hypothèses pour converger ! Et dans les bons cas, ces transformations sont inverses l'une de l'autre. Lorsqu'elle existe, la fonction F est dite la transformée de Mellin de Φ et on note $F = M\Phi$.

6.1. Exemples

Avant toute généralités, il nous faut calculer quelques intégrales complexes à titre d'exemples.

Lemme 6.1 *Nous avons, pour $x > 0$:*

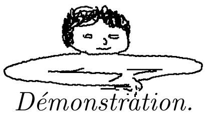
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{-s}ds}{s(s+1)} = \begin{cases} 1-x & si\ x<1 \\ 0 & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

Lemme 6.2 *Nous avons, pour $x > 0$:*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{-s}ds}{s^2} = \begin{cases} -\log x & si\ x<1 \\ 0 & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

Lemme 6.3 *Nous avons, pour $x > 0$:*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{2x^{-s}ds}{s(s+1)(s+2)} = \begin{cases}(1-x)^2 & si\ x < 1\\ 0 & si\ x \geq 1.\end{cases}$$



Démonstration. En effet, si $x \geq 1$, il suffit de déplacer la droite d'intégration vers la droite, en notant que dans ce cas-là, les contributions des pôles doivent être affectées d'un signe $-$ et que les segments horizontaux ne contribuent pas. Cette phrase peut sembler mystérieuse de prime abord, aussi donnons-nous ici une démonstration complète. Tout d'abord l'intégrale sur un chemin infini est la limite de l'intégrale sur un chemin fini :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)} = \lim_{T,T'\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{2-iT}^{2+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)}$$

où s parcourt le segment du bas vers le haut, et où T et T' tendent indépendamment vers l'infini. Nous comparons ensuite l'intégrale sur le segment à

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{A-iT}^{A+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)}$$

pour un $A \geq 2$ que l'on prendra grand mais qui est pour l'instant fixé. Cette comparaison se fait en appliquant le théorème des résidus sur le rectangle de sommets $2-iT$, $2-iT'$, $A-iT$ et $A-iT'$. Les intégrales sur les segments horizontaux sont majorées respectivement par A/T^2 et A/T'^2 qui tendent bien vers 0 quand T et T' tendent vers 0. Par ailleurs aucun résidu n'appartient à la zone enclose par le contours, donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-iT}^{2+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)} = \frac{-1}{2i\pi}\int_{A-iT}^{A+iT'}\frac{x^{-s}ds}{s(s+1)} + o(1)$$

où ce $o(1)$ tend vers 0 quand T et T' tendent vers l'infini. Ensuite l'intégrale sur $\Re s = A$ est un $\mathcal{O}(x^{-A})$ car

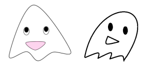
$$\frac{1}{2\pi}\int_{A-iT}^{A+iT'}\left|\frac{ds}{s(s+1)}\right|$$

est majoré indépendamment de T, T' et $A \geq 2$. Il suffit alors de laisser tendre A vers l'infini. Procédé que l'on résumera dans la suite par un "on déplace la droite d'intégration vers la droite".

Si $x < 1$, nous déplaçons cette fois-ci la droite d'intégration vers la gauche et rencontrons des contributions polaires en $s = 0$, $s = -1$ et $s = -2$ qui donnent la valeur :

$$1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

comme attendu. Le second lemme se prouve de la même façon. □



Exercice 45. *Nous avons pour $x > 0$:*

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{2x^s ds}{s^2(1-s)(2-s)} = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \log x + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 46. *Nous avons pour $x > 0$:*

$$\mathfrak{q}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{x^s ds}{s(1-s)(2-s)} = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Le lecteur remarquera que déplacer la droite d'intégration de $\Re s = \frac{1}{2}$ à $\Re s = 3$ changerait la fonction obtenue dans les deux derniers exercices.

Exercice 47. *Pour $x > 0$ et $n \geq 1$, montrer que :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{x^{-z}}{z^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n!}\log^n x, & \text{si } x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Voici une autre transformation classique (lemme de Cahen-Millen).

Lemme 6.4 *Nous avons pour $x > 0$:*

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s)x^{-s} ds$$

La convergence de l'intégrale du membre de droite est garantie par la formule de Stirling complexe. Celle-ci nous dit en effet que $\Gamma(\frac{1}{2} + it)$ décroît exponentiellement en $|t|$.

Démonstration. Nous repoussons la droite d'intégration vers gauche. En chaque entier négatif $-n$, la fonction Γ admet un pôle simple de résidu $(-1)^n/n!$ comme le montre par exemple la formule des compléments

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}.$$

Ceci nous donne la contribution $\sum_{n\geq 0}(-x)^n/n! = e^{-x}$ comme attendu. □

Exercice 48. *Rappelons la fonction Gamma d'Euler est définie par*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^s \frac{dt}{t}.$$

Cette fonction est holomorphe pour $\Re(s) > 0$.

⋄ 1 ⋄ *La fonction Gamma d'Euler satisfait l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ (ce qui permet de la prolonger en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier).*

⋄ 2 ⋄ *Si* $\Re(s) > 1$, *alors*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} t^s \frac{dt}{t}.$$

6.2. Transformées de Mellin

Illustrons tout d'abord comment nous entendons utiliser les lemmes précédents. Nous pouvons écrire par exemple

$$\begin{aligned}\sum_{q \le Q} f_0(q)(1 - q/Q) &= \sum_{q \ge 1} f_0(q) \frac{1}{2i\pi} \int_{3-\infty}^{3+i\infty} \frac{(q/Q)^{-s} ds}{s(s+1)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \sum_{q \ge 1} \frac{f_0(q)}{q^s} \frac{Q^s ds}{s(s+1)}\end{aligned}$$

ce qui nous permet de lier l'étude de la somme initiale à celle de la série de Dirichlet $D(f_0, s)$ que nous étudions page 42. Formellement, nous partons d'une fonction f sur $]0, \infty[$ et cherchons à l'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Mf(s) x^{-s} ds. \tag{6.1}$$

Si nous écrivons $s = c + 2i\pi y$ et $x = e^u$, il vient

$$f(e^u) = \int_{-\infty}^{\infty} Mf(c + 2i\pi y) e^{-uc} e^{-2i\pi uy} dy$$

c'est à dire que $Mf(c + 2i\pi y)$ est simplement la transformée de Fourier de $e^{uc} f(e^u)$, i.e.

$$Mf(c + 2i\pi y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^u) e^{uc} e^{2i\pi uy} du$$

soit encore

$$Mf(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx \tag{6.2}$$

et l'on nomme Mf la transformée de Mellin de la fonction f. Il s'agit bien sûr d'une argumentation formelle et il convient aussi de s'adresser aux problèmes de convergence mais les exemples donnés aux exercices 45 et 46 montrent que la situation peut être délicate. Nous n'entendons pas ici de rédiger un traité théorique abordant ces problèmes mais de montrer comment atteindre (6.1) et donc comment deviner Mf. Un procédé consiste à utiliser le paramètre c pour garantir la convergence, mais les conditions en 0 et en l'infini sont souvent antagonistes. Il suffit alors de de décomposer f est $f_1 + f_2$, où f_1 est nulle pour $x > 1$ et f_2 nulle pour $x < 1$ et par exemple $f_1(1) = f_2(1) = f(1)/2$. Nous pouvons alors calculer les transformées de Mellin de f_1 et de f_2 mais dans des domaines distincts de s. Si ces fonctions admettent un prolongement dans un domaine commun du plan complexe, alors $Mf_1 + Mf_2$ est le candidat pour Mf.

6.3. Transformation tronquée

La transformée de Mellin de la fonction Y qui vaut 0 sur $]0,1[$, puis $1/2$ en 1 et 1 ensuite est tout simplement $1/s$. Mais cette transformée ne tend généralement pas suffisamment vite vers 0 dans les bandes verticales et pose des problèmes de convergence. Le mieux est alors d'avoir recours à une transformation tronquée et le matériel nécessaire est contenu dans le lemme suivant :

Lemme 6.5 *Pour $\kappa > 0$ et $x > 0$, nous avons*

$$\left| Y(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s} \right| \le \frac{x^\kappa}{\pi} \min\left(\tfrac{7}{2}, \frac{1}{T|\log x|}\right).$$

La preuve montrera que nous aurions eu la même majoration en prenant n'importe quelle valeur entre 0 et 1 pour $Y(1)$.

Démonstration. Si $x < 1$, nous écrivons pour $K > \kappa$ et tendant vers l'infini :

$$\left(\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} + \int_{\kappa+iT}^{K+iT} + \int_{K+iT}^{K-iT} + \int_{K-iT}^{\kappa-iT}\right) \frac{x^s ds}{s} = 0.$$

La troisième intégrale tend vers 0 quand K tend vers l'infini. Les deux intégrales sur des segments horizontaux sont chacunes majorées par $x^\kappa/(T|\log x|)$. Ce qui nous donne

$$\left| Y(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s} \right| \le \frac{x^\kappa}{\pi T|\log x|} \quad (0 < x < 1).$$

La même majoration a lieu si $x > 1$, ce que nous prouvons en procédant comme précédemment, mais en déplaçant cette fois-ci la droite d'intégration vers la gauche. Ces majorations sont efficaces si $T|\log x|$ est assez grand ; sinon nous écrivons

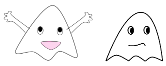
$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s} = x^\kappa \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s} + x^\kappa \int_{-T}^{T} \frac{(x^{it}-1)idt}{\kappa+it}.$$

La première intégrale vaut $2\arctan(T/\kappa) \le \pi$ alors que pour la seconde, nous utilisons

$$\left|\frac{x^{it}-1}{it\log x}\right| = \left|\int_0^1 e^{iut\log x} du\right| \le 1$$

ce qui nous permet de la majorer par $2T|\log x|$ (même si $x = 1$), d'où

$$\left| \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s ds}{s} \right| \le \frac{x^\kappa}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + T|\log x|\right)$$



ce qui nous suffit si $x < 1$. Si $x > 1$, nous remarquons que

$$1 - \frac{x^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s} = 1 - \frac{x^\kappa}{\pi}\arctan(T/\kappa)$$

qui est $\geq -x^\kappa/2$ et $\leq 1 \leq x^\kappa$. En définitive, nous obtenons

$$\left|Y(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{x^s ds}{s}\right| \leq \frac{x^\kappa}{\pi}\min\left(\pi + T|\log x|, \frac{1}{T|\log x|}\right).$$

Nous simplifions cette borne supérieure en remarquant que

$$\min(\pi + u, 1/u) \leq \min(\alpha, 1/u)$$

avec $\alpha = 1/u_0 = \pi + u_0$. Comme cela nous donne $\alpha \leq 7/2$, le lemme est bien démontré. □

Exercice 49. *Soit s un nombre complexe tel que $\Re s > 1$.*

◇ 1 ◇ *Montrer que*

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[u]}{u^{s+1}}du \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{M(u)}{u^{s+1}}du$$

où $M(t) = \sum_{n\leq t}\mu(n)$.

◇ 2 ◇ *Montrer que*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u^{s+1}}du,$$

où $\psi(u) = \sum_{n\leq u}\Lambda(n)$.

Indication : *Pour la seconde question, le lecteur pourra appliquer l'opérateur de dérivation logarithmique aux deux membres de la formule énoncée à l'exercice 39.*

Nous déduisons du lemme 6.5 la formule de sommation classique et très utile suivante.

Théorème 6.6 (Formule de Perron tronquée) *Soit $F(s) = \sum_n a_n/n^s$ une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\Re s > \kappa_a$, et soit $\kappa > 0$ strictement plus grand que κ_a. Pour $x \geq 1$ et $T \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{n\leq x} a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^s ds}{s} + \mathcal{O}^*\left(\int_{1/T}^\infty \sum_{|\log(x/n)|\leq u}\frac{|a_n|}{n^\kappa}\frac{2x^\kappa du}{Tu^2}\right).$$

Le mémoire de 1908 du mathématicien allemand Oskar Perron est un point fort de l'histoire des séries de Dirichlet, mais des formules d'inversion apparaissent dès 1859 dans les travaux de Riemann.

Dans ce théorème, le terme d'erreur est essentiellement inétudié. Il fait toutefois intervenir une majoration des sommes plutôt courtes

$$\sum_{|\log(x/n)|\le u} |a_n|/n^\kappa$$

où l'intervalle en n peut se réécrire $e^{-u}x \le n \le e^u x$. Pour $u \ge 1$, la majoration par $\sum_{n\ge1} |a_n|/n^\kappa$ suffit généralement. Pour u plus petit, nous aurons recours la plupart du temps à une majoration du style $ux^{\kappa_a}B/x^\kappa$ avec un B *raisonnable* (une constante fois $\log x$ par exemple), ce qui résultera en le terme d'erreur

$$\mathcal{O}\left(\frac{Bx^{\kappa_a}\log T}{T} + \frac{x^\kappa}{T}\sum_{n\ge1}|a_n|/n^\kappa\right).$$

Il faut noter que les sommes les plus courtes que nous aurons à considérer sont de taille $\asymp x/T$.

Démonstration. Nous partons de

$$\sum_{n\le x} a_n = \sum_{n\ge1} a_n Y(x/n) = \sum_{n\ge1} a_n \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{(x/n)^s ds}{s} + \mathcal{O}^*\left(\sum_{n\ge1}\frac{|a_n|x^\kappa}{\pi n^\kappa}\min\left(\tfrac{7}{2}, \frac{1}{T|\log(x/n)|}\right)\right)$$

d'après le lemme 6.5. Nous posons $\varepsilon = 1/T$. Pour l'étude du terme d'erreur, commençons par la contribution des entiers n tels que $|\log(x/n)| \le \varepsilon$, contribution que nous gardons telle quelle. Sinon, nous écrivons

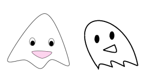
$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon\le|\log(x/n)|}\frac{|a_n|x^\kappa}{n^\kappa|\log(x/n)|} &= \sum_{\varepsilon\le|\log(x/n)|}\frac{|a_n|x^\kappa}{n^\kappa}\int_{|\log(x/n)|}^\infty\frac{du}{u^2}\\ &= \int_\varepsilon^\infty\sum_{|\log(x/n)|\le u}\frac{|a_n|x^\kappa}{n^\kappa}\frac{du}{u^2} - \int_\varepsilon^\infty\sum_{|\log(x/n)|\le\varepsilon}\frac{|a_n|x^\kappa}{n^\kappa}\frac{du}{u^2}\end{aligned}$$

ce qui nous suffit. □

Pour à la fois tester la force et illustrer le théorème précédent, essayons de calculer le nombre d'entiers inférieurs à x … La série génératrice est bien sûr la fonction ζ de Riemann qui vérifie $\kappa_a = 1$. Nous prenons $\kappa = 1 + 1/\log x$ et obtenons un terme d'erreur de $\log(xT)/T$ si $T \le x$. Quant à l'intégrale, nous la déplaçons jusqu'à la droite $\kappa = 0$ où la fonction zeta de Riemann est $\mathcal{O}(\sqrt{|t|+1}\log(|t|+2))$. Cela nous donne finalement

$$\sum_{n\le x} 1 = x + \mathcal{O}\big(\sqrt{T}\log T + x\log(xT)/T\big).$$

En prenant $T = x^{2/3}$, nous obtenons un terme d'erreur de taille … $x^{1/3}\log x$. Voilà qui permet de se faire une idée de la perte occasionnée par cette technique,

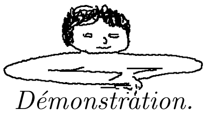


puisque nous pouvons ici espérer un terme d'erreur en $\mathcal{O}(1)$. Il est assez facile de récupérer un terme d'erreur en $\mathcal{O}_\varepsilon(x^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ en utilisant un lissage au lieu de la somme tronquée brutalement en $n \leq x$.

Toutefois, lorsque nous utilisons cette formule, la perte est généralement compensée par le fait que l'on peut ensuite utiliser des informations sur la transformée de Mellin de la suite de départ.

Lemme 6.7 *Nous avons pour $x > 0$:*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{x^s ds}{s \sin \pi s} = \log(1+x).$$



Démonstration. Nous distinguons encore selon que x est ou non < 1. Si oui, nous déplaçons la droite d'intégration vers la droite et obtenons le développement en série de $\log(1+x)$. Sinon, nous déplaçons la droite vers la gauche et tenons compte du pôle double en 0 qui contribue pour $\log x$ alors que les autres pôles contribuent comme $\log(1+x^{-1})$. □

6.4. Des formules lissées

Le lecteur vérifiera facilement les deux formules suivantes.

Théorème 6.8 *Soit $F(s) = \sum_n a_n/n^s$ une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\Re s > \kappa_a$, et soit $\kappa > 0$ strictement plus grand que κ_a. Pour $x \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{n \leq x} a_n(1-n/x)^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} F(s)\frac{2x^s ds}{s(s+1)(s+2)}.$$

Théorème 6.9 *Soit $F(s) = \sum_n a_n/n^s$ une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\Re s > \kappa_a$, et soit $\kappa > 0$ strictement plus grand que κ_a. Pour $x > 0$, nous avons*

$$\sum_{n \geq 1} a_n e^{-n/x} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} F(s)\Gamma(s)x^s ds.$$

Exercice 50. *Si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ à décroissance rapide à l'infini.*

◇ 1 ◇ *Montrer que pour $\Re(s) > 0$, la fonction $D(f,s)$ donnée par l'equation suivante*

$$D(f,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(t)\, t^s \frac{dt}{t},$$

admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier.

◇ 2 ◇ *Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, alors $D(f,-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.*

◇ 3 ◇ *Soit*

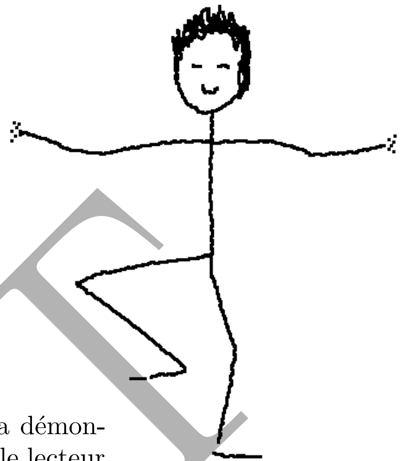
$$f_0(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

Les b_n sont des nombres rationnels appelés nombres de Bernoulli. On a en particulier

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\tfrac{1}{2},\ b_2 = \tfrac{1}{6},\ b_4 = -\tfrac{1}{30}, \cdots,\ b_{12} = -\tfrac{691}{2730},$$

et $b_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$. Montrer que :
a. Pour $n \in \mathbb{Q}$, nous avons $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{b_{n+1}}{n+1}$.
b. Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{b_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}.$$



Chapitre 7

Application

Revenons-en à la fonction f_0 définie par (0.1). Nous présentons la démonstration avec le maximum de détails dans un premier temps pour que le lecteur puisse vérifier sa compréhension. La preuve en devient longue, mais nous invitons le lecteur à en écrire une preuve plus courte, en omettant de calculer les constantes explicitement.

Voici la première chose à vérifier :

Étape 1

La fonction f_0 est une fonction multiplicative.

Notre outil principal est le lemme de Gauss, que voici :

Lemme 7.1 (Lemme de Gauss) *Si a et b sont deux entiers premiers entre eux, alors et si le nombre premier p divise le produit ab, alors p divise a ou p divise b.*

(Un peu de théorie des anneaux : ceci est une conséquence du fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau *factoriel*). Ce lemme est attribué à Gauss en France, mais comme Jörn Steuding me l'a fait remarquer, il est attribué à Euclide en Allemagne ! Cette appelation est historiquement plus correcte : il s'agit bel et bien de la proposition 30 du livre VII des éléments d' Euclide, voir (Euclid, 300 BC).

Donnons-nous donc m et n deux entiers premiers entre eux. Nous avons donc

$$f_0(mn) = \prod_{p|mn} (p-2).$$

Les nombres premiers p qui divisent le produit mn se séparent, d'après le Lemma de Gauss, en deux groupes : ceux qui divisent m et ceux qui divisent n. Ces deux groupes sont distincts puisque tout premier dans l'intersection diviserait le pgcd (m, n) de m et n, lequel vaut 1. Par conséquent

$$f_0(mn) = \prod_{p|m}(p-2)\prod_{p|n}(p-2) = f_0(m)f_0(n)$$

ce que nous voulions démontrer. Qu'en est-il de la condition $f_0(1) = 1$? Dans l'expression $\prod_{p|1}(p-2)$, l'ensemble de nombres premiers du produit est vide, et, par convention, un produit sur un ensemble vide vaut 1.

Étape 2

La série de Dirichlet $D(f_0, s)$ vaut

$$D(f_0, s) = \prod_{p \geq 2} \Big(1 + \frac{p-2}{p^s - 1}\Big).$$

Nous avons, par définition :

$$D(f_0, s) = \prod_{p \geq 2} \sum_{k \geq 0} \frac{\prod_{\ell | p^k}(\ell - 2)}{p^{ks}}.$$

Regardons de plus près chaque facteur. Dans la somme portant sur k, la contribution correspondant à $k = 0$ est exceptionnelle et vaut 1 ; le facteur eulérien en p devient :

$$1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\prod_{\ell | p^k}(\ell - 2)}{p^{ks}}.$$

Or ℓ et p sont des nombres premiers, ce qui implique que $\ell = p$. Il nous reste

$$\sum_{k \geq 1} (p-2)/p^{ks} = \frac{p-2}{p^s - 1}$$

ce que nous avions annoncé.

Étape 3

Nous avons $D(f_0, s) = H(s)\zeta(s-1)$ où

$$H(s) = \prod_{p \geq 2} \Big(1 - \frac{2p^{s-1} + p - 3}{(p^s - 1)p^{s-1}}\Big). \tag{7.1}$$

Ce produit est absolument convergent au sens de Godement dès que $\Re s > 3/2$.

En effet, le produit qui définit $D(f_0, s)$ *ressemble* à $\prod_{p \geq 2}(1 + \frac{1}{p^{s-1}-1})$ qui, lui, correspond à $\zeta(s-1)$. Entreprenons par conséquent de sortir ce facteur de notre produit. Nous écrivons

$$\begin{aligned} D(f_0, s) &= \prod_{p \geq 2} \Big(1 + \frac{p-2}{p^s - 1}\Big) = \prod_{p \geq 2} \Big(1 - \frac{2p^{s-1} + p - 3}{(p^s - 1)p^{s-1}}\Big)\Big(\frac{1}{1 - 1/p^{s-1}}\Big) \\ &= H(s)\zeta(s-1) \end{aligned}$$

commen annoncé. Le produit définissant $H(s)$ converge absolument pour les s pour lesquels la série $\sum \frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}$ converge absolument, ce qui a lieu au moins, en étendant cette somme à tous les entiers, pour $\Re s > 3/2$.

Étape 4

La série de Dirichlet $D(f_0, s)$ admet un pôle simple en $s = 2$, de résidu

$$H(2) = \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right).$$

Lorsque $1 + \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 2$ et t réel tel que $|t| \geq 2$, nous avons

$$|D(f_0, s)| \leq 160 |t|^{2-\sigma} \log |t|.$$

Si nous savons juste que $\sigma \geq 74$ et que t est réel, nous disposons de $|D(f_0, s)| \leq 20|\zeta(s-1)|$.

En effet, dans le domaine en question, la fonction $H(s)$ se majore (lorsque $s = \sigma + it$) en module par

$$\prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{3p+3}{(p^\sigma - 1)p^{\sigma-1}}\right) \leq \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{3p+3}{(p^{7/4} - 1)p^{3/4}}\right) \leq 20$$

grâce à GP, via le petit script :

```
prodeuler(p=2,300000,1.0+3*(p+1)/(p^(7/4)-1)/p^(3/4))
```

Le lemme 1.2 nous donne alors

$$|D(f_0, s)| \leq \frac{6 \cdot 20}{\sigma - 1} |t|^{2-\sigma} \log |t|$$

et il est alors facile de conclure puisque $\sigma - 1 \geq 3/4$.

La préparation est terminée, nous pouvons invoquer la formule de Perron tronquée du théorème 6.6.

Étape 5

Nous avons, lorsque $x \geq 10$ et avec $\kappa = 2 + (1/\log x)$ et un paramètre T dans l'intervalle $[1, x]$,

$$\sum_{n \leq x} f_0(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} D(f_0, s) \frac{x^s ds}{s} + \mathcal{O}^*\left(14\, x^2 \frac{\log x}{T}\right).$$

Nous employons le théorème 6.6 avec $\kappa_a = 2$ et $\kappa = 2 + (1/\log x)$ pour $x \geq 10$. La formule de ce théorème nous donne le terme d'erreur

$$\mathcal{O}^*\left(\int_{1/T}^{\infty} \sum_{|\log(x/n)| \leq u} \frac{|f_0(n)|}{n^\kappa} \frac{2x^\kappa du}{Tu^2}\right).$$

Ici, nous majorons $|f_0(n)|$ simplement par n.

(A) Lorsque $u \leq 1$, nous employons

$$\begin{aligned}\sum_{|\log(x/n)|\leq u} \frac{|f_0(n)|}{n^\kappa} &\leq \frac{1}{(xe^{-u})^{\kappa-1}} \sum_{|\log(x/n)|\leq u} 1 \\ &\leq \frac{e^{1+1/\log x}}{ex}(xe^u - xe^{-u} + 1) \\ &\leq \frac{e^{1/\log 10}}{x}(xu \cdot 2\,\mathrm{sh}(1) + 1)\end{aligned}$$

car $\mathrm{sh}\, u \leq u\,\mathrm{sh}\,1$ lorsque $0 \leq u \leq 1$. Comme $u \geq 1/T \geq 1/x$, cela nous donne $xu \geq 1$ et donc $xu \cdot 2\,\mathrm{sh}(1) + 1 \leq xu(2\,\mathrm{sh}(1) + 1) \leq 4xu$. Par conséquent

$$\sum_{|\log(x/n)|\leq u} \frac{|f_0(n)|}{n^\kappa} \leq 7u \quad (1/T \leq u \leq 1).$$

(B) Lorsque $u \geq 1$, nous employons

$$\sum_{|\log(x/n)|\leq u} \frac{|f_0(n)|}{n^\kappa} \leq \zeta(\kappa - 1) \leq \frac{\kappa - 1}{\kappa - 2} = 1 + \log x.$$

En définitive, ce terme d'erreur est majoré par

$$\mathcal{O}^*\left(\int_{1/T}^{1} \frac{2x^\kappa du}{Tu} + \int_{1}^{\infty} \frac{2x^\kappa(1 + \log x)du}{Tu^2}\right)$$

qui est lui-même majoré par, puisque $x^\kappa = ex^2$,

$$2ex^2\left(\frac{\log T}{T} + \frac{1 + \log x}{T}\right) \leq 2ex^2\frac{1 + 2\log x}{T} \leq 14\, x^2\frac{\log x}{T}.$$

Étape 6

Nous avons, lorsque $x \geq 10$ et avec $\kappa = 2 + (1/\log x)$ et un un paramètre $T \geq 2$ dans l'intervalle $[1, x]$,

$$\sum_{n\leq x} f_0(n) = x^2\frac{H(2)}{2} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D(f_0, s)\frac{x^s ds}{s} + \mathcal{O}^*\left(250\, x^2\frac{\log x}{T^{3/4}}\right).$$

Il suffit de déplacer la droite d'intégration. Le théorème de Cauchy nous garantit que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} D(f_0, s)\frac{x^s ds}{s} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa+iT}^{\frac{7}{4}+iT} D(f_0, s)\frac{x^s ds}{s} \\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D(f_0, s)\frac{x^s ds}{s} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\kappa-iT} D(f_0, s)\frac{x^s ds}{s} = H(2)\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

puisque le seul pôle de l'intégrand $D(f_0,s)x^s/s$ est en $s=2$: ce pôle est simple et de résidu $H(2)x^2/2$. Nous traitons facilement les intégrales sur les segments horizontaux :

$$\begin{aligned}\int_{\kappa+iT}^{\frac74+iT}\Big|D(f_0,s)\frac{x^s ds}{s}\Big| &\le 20\int_{\frac34}^{\kappa-1}|\zeta(u+iT)|\frac{x^\kappa du}{T}\\ &\le 20\biggl(4+\log T+\frac{6}{3/4}T^{1/4}\log T\biggr)\frac{ex}{T}\\ &\le 750\frac{x\log T}{T^{3/4}}.\end{aligned}$$

La même majoration vaut pour $\int_{\frac74-iT}^{\kappa-iT}$, et il nous faut diviser par 2π. Ceci nous donne bien un terme d'erreur total de

$$14\,x^2\frac{\log x}{T}+229\frac{x\log T}{T^{3/4}}\le 250\,x^2\frac{\log x}{T^{3/4}}.$$

Et voici enfin la dernière pierre à notre édifice :

Étape 7

Nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\frac74-iT}^{\frac74+iT}D(f_0,s)\frac{x^s ds}{s}\right|\le 750\,x^{7/4}T^{1/4}\log T.$$

Disons que la variable d'intégration s s'écrit $\frac74+it$. Lorsque $|t|\le 2$, nous écrivons

$$|D(f_0,s)|\le 20|\zeta(s-1)|\le 20\sqrt{(3/4)^2+4}\biggl(\frac{1}{1/4}+\frac{1}{3/4}\biggr)\le 230$$

toujours à l'aide du lemme 1.2. Donc

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\frac74-2i}^{\frac74+2i}D(f_0,s)\frac{x^s ds}{s}\right|\le\frac{230x^{7/4}}{2\pi}\frac{4}{7/4}\le 85\,x^{7/4}.$$

Sinon, nous procédons ainsi :

$$\left|\int_{\frac74+2i}^{\frac74+iT}D(f_0,s)\frac{x^s ds}{s}\right|\le x^{7/4}\int_2^T 160|t|^{1/4}\log t\frac{dt}{t}\le 640x^{7/4}T^{1/4}\log T.$$

Étape 8

Nous avons

$$\sum_{n\le x}f_0(n)=x^2\frac{H(2)}{2}+\mathcal{O}^*\Bigl(170\,x^{29/16}\log x\Bigr).$$

Il suffit juste de choisir T. En effet, nous avons montré que

$$\sum_{n\le x} f_0(n) = x^2\frac{H(2)}{2} + \mathcal{O}^*\left(750\,x^{7/4}T^{1/4}\log T + 250\,x^2\frac{\log x}{T^{3/4}}\right).$$

Il nous suffit de choisir maintenant T au mieux de nos intérêt. Nous pouvons par exemple déterminer le minimum en T de la fonction $T \mapsto 750\,x^{7/4}T^{1/4}\log T + 14\,x^2(\log x)/T^{3/4}$ mais c'est un peu pénible. Voici le raisonnement qui est usuellement tenu : T va être une puissance de x, donc $\log T$ est quasiment $\log x$. De plus, le premier terme $(750\,x^{7/4}T^{1/4}\log T)$ est croissant, alors que le second $(14\,x^2(\log x)/T^{3/4})$est décroissant. Nous choisissons T quand ces deux courbes se croisent. En comme nous ne sommes pas très précis numériquement, nous nous contentons de prendre le T qui vérifie

$$x^{7/4}T^{1/4} = x^2/T^{3/4},$$

i.e. $T = x^{1/4}$. Du coup $x^2/T^{3/4} = x^{29/16}$. Comme nous demandons que T soit plus grand que 2, cela requiert $x \ge 32$.

Exercice 51. *Montrer en utilisant la même démarche que*

$$\sum_{n\le x}\varphi(n) = (1+o(1))\pi^2x^2/12.$$

Exercice 52. *Montrer en utilisant le théorème 6.8 que*

$$\sum_{n\le x} f_0(n)(1-n/x)^2 = (1+o(1))\mathscr{C}x^2/6.$$

Exercices

Voici quelques exercices supplémentaires.

Exercice 53. *Montrer que*

$$\sum_{m|n} d(m)^3 = \Big(\sum_{m|n} d(m)\Big)^2.$$

Exercice 54. *Montrer que*

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) k^{\omega(d)} = (k+1)^{\omega(d)}.$$

Exercice 55.

◇ 1 ◇ *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\frac{n^{n+1}}{\zeta(n+1)} \leq \varphi(n)\sigma(n^n) \leq n^{n+1}.$$

◇ 2 ◇ *Déterminer si la série*

$$\sum_{n\geq 1} \Big(\frac{n}{\varphi(n)} - \frac{\sigma(n^n)}{n^n}\Big)$$

est convergente ou non.

Exercice 56.

◇ 1 ◇ *Montrer que si n et m sont sans facteurs carrés et distincts, alors*

$$\frac{\varphi(m)}{m} \neq \frac{\varphi(n)}{n}.$$

◇ 2 ◇ *Montrer que la fonction $n \mapsto \sigma(n)/n$ vérifie la même propriété (i.e. que celle de $n \mapsto \varphi(n)/n$ exhibée à la question précédente).*

◇ 3 ◇ *Que pensez-vous de la fonction $n \mapsto \sigma(n)/\varphi(n)$ vis à vis de cette propriété ?*

◇ 4 ◇ *Que pensez-vous de la fonction $n \mapsto \prod_{p|n}(p+2)/(p+1)$ vis à vis de cette propriété ?*

EXERCICE 57. *Soit d un entier ≥ 1 et N un réel ≥ 0. Montrer que*

$$\Big|\sum_{\substack{n\leq N,\\(n,d)=1}} \mu(n)/n\Big| \leq 1.$$

INDICATION : *Soit d' le produit des nombres premiers $\leq N$ qui sont aussi premiers à d. Étudier la quantité $\sum_{n\leq N,(n,d')=1} 1$ en utilisant*

$$\sum_{\substack{\ell|n,\\ \ell|d'}} \mu(\ell) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \operatorname{pgcd}(n,d')=1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On pourra supposer x entier.

EXERCICE 58. *Donner une majoration de*

$$\Big|\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log \frac{x}{n}\Big|$$

à partir de $\sum_{nm\leq x} \mu(n)d(m)$.

EXERCICE 59. *Montrer que, pour tout entier n, nous avons*

$$\sum_{\substack{d,e\geq 1,\\ [d,e]=n}} \mu(d)\mu(e) = \mu(n).$$

EXERCICE 60. *Montrer que nous avons*

$$\sum_{d,e\geq 1} \frac{\mu(d)\mu(e)}{[d,e]^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Notations

Toutes les notations utilisées sont standards … d'une façon ou d'une autre ! En voici quelques unes :

— La lettre p pour une variable implique toujours que celle-ci est un nombre premier.

— Nous notons $[d, d']$ le ppcm et (d, d') le pgcd des entiers d et d'.

— $q \| d$ signifie que q divise d de telle sorte que q et d/q soit premiers entre eux. Nous énoncerons : *q divise exactement d*.

— Le *noyau sans facteurs carrés* de $d = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ est $\prod_i p_i$, soit encore le produit de tous les diviseurs premiers de d.

— $\omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d, comptés sans multiplicité.

— $\varphi(d)$ est la fonction d'Euler, c'est à dire le cardinal du groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

— $\sigma(d)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de d.

— $\mu(d)$ est la fonction de Moebius, c'est à dire 0 si d est divisible par un carré > 1 et $(-1)^r$ sinon, où $r = \omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d.

— $c_q(n)$ désigne la somme de Ramanujan sum. Il s'agit de la somme des $\mathrm{e}(an/q)$ sur tous les a modulo q qui sont premiers à q.

— La notation de Landau $f = \mathcal{O}_A(g)$ signifie qu'il existe une constante B telle que $|f| \le Bg$, constante qui peut dépendre de A. Si nous mettons plusieurs variables en indices, cela signfie tout simplement que la constante implicite B dépend de tous ceux-là.

— La notation $f = \mathcal{O}^*(g)$ signifie que $|f| \le g$, c'est à dire qu'il s'agit d'un $\mathcal{O}$ mais avec une constante implicite égale à 1.

— Nous utiliserons aussi la notation de Vinogradov $f \ll g$ qui signifie $f = \mathcal{O}(g)$. Ces deux notations seront donc pour nous équivalentes (ce n'est pas toujours le cas en général car les notations de Landau font appel à la notion de voisinage d'un point ; en ce sens, il est correct de dire que la notation de Vinogradov correposnd à une version uniforme de la notation de Landau). Nous utiliserons aussi $f \ll_A g$ pour $f = \mathcal{O}_A(g)$.

— La notation $f \star g$ désigne la convolution arithmétique, c'est à dire la fonction h sur les entiers positifs définie par $h(d) = \sum_{q|d} f(q)g(d/q)$.

References

Apostol, T.M. 1976. *Introduction to analytic number theory.* New York : Springer-Verlag. Undergraduate Texts in Mathematics.

Bateman, P.T., & Diamond, H.G. 2004. *Analytic number theory.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. An introductory course.

Bombieri, E. 1987/1974. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. *Astérisque*, **18**, 103pp.

Bordellès, O. 2012. *Arithmetic Tales.* Springer.

Cahen, E. 1894. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__75_0`.

Davenport, H. 2000. *Multiplicative Number Theory.* third edition edn. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag.

Dirichlet, P.G.L. 1937. Beweis des Satzes, das jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. *Abhandlungen der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Scan de l'article original : `http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=07-abh/1837&seite:int=00000286` et traduction : `http://arxiv.org/abs/0808.1408`.

Dress, F. 1983/84. Théorèmes d'oscillations et fonction de Möbius. *Sémin. Théor. Nombres, Univ. Bordeaux I*, **Exp. No 33**, 33pp. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002545454`.

Ellison, W.J. 1975. *Les nombres premiers.* Paris : Hermann. En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

Euclid. 300 BC. *Elements, Book VII.* `http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0086%3Abook%3D7%3Atype%3DProp%3Anumber%3D30`.

Halberstam, H., & Richert, H.E. 1974. Sieve methods. *Academic Press (London)*, 364pp.

Hardy, G. H., & Riesz, M. 1964. *The general theory of Dirichlet's series.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Stechert-Hafner, Inc., New York. Première édition en 1915.

Kahane, J.-P., & Queffélec, H. 1997. Ordre, convergence et sommabilité de produits de séries de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **47**(2), 485–529. `http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_485_0`.

Lejeune-Dirichlet, P.G. 1871. *Lectures on Number Theory, edited by R. Dedekind. Second edition. (Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind. Zweite Auflage.).* Braunschweig. Vieweg . Première édition en 1863.

Montgomery, H.L., & Vaughan, R.C. 2006. *Multiplicative Number Theory : I. Classical Theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97. Cambridge University Press.

Tenenbaum, G. 1995. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Second edn. Cours Spécialisés, vol. 1. Paris : Société Mathématique de France.

Vinogradov, I. M. 1954. *Elements of number theory.* New York : Dover Publications Inc. Translated by S. Kravetz.

Index

$[u]$, 7
$\mathbb{1}$, 7
$\zeta(s)$, 7
$\{u\}$, 7
f_0, 1
f_4, 27

Exercice
no 1, 7
no 2, 7
no 3, 8
no 4, 8
no 5, 10
no 6, 10
no 7, 10
no 8, 10
no 9, 14
no 10, 16
no 11, 16
no 12, 17
no 13, 17
no 14, 19
no 15, 19
no 16, 19
no 17, 20
no 18, 20
no 19, 20
no 20, 20
no 21, 20
no 22, 21
no 23, 21
no 24, 21
no 25, 21
no 26, 21
no 27, 22
no 28, 22
no 29, 23
no 30, 23
no 31, 23
no 32, 23
no 33, 24
no 34, 24
no 35, 24
no 36, 24
no 37, 28
no 38, 28
no 39, 28
no 40, 28
no 41, 29
no 42, 29
no 43, 29
no 44, 29
no 45, 33
no 46, 33
no 47, 33
no 48, 33
no 49, 36
no 50, 39
no 51, 46
no 52, 46
no 53, 47
no 54, 47
no 55, 47
no 56, 47
no 57, 48
no 58, 48
no 59, 48
no 60, 48

Fonction
Additive, 15
Multiplicative, 19
Fonction de Liouville, 15
Fonction de Moebius, 15

Lemme de Gauss / Euclide, 41

Noyau sans facteurs carrés, 49

Partie entière, 7
Partie fractionnaire, 7
Produit de convolution, 16

Sommation par parties, 7, 13
Somme de Ramanujan, 49

Transformation de Fourier, 34
Transformation de Mellin, 34